

DOI: 10.53078/20778481\_2023\_3\_104

УДК 629.113

**В. П. ТАРАСИК**, *д-р техн. наук, проф.*

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТРАНСМИССИИ КАРЬЕРНОГО САМОСВАЛА

### Аннотация

Изложена методика определения вероятностных характеристик процессов функционирования механизмов гидромеханической трансмиссии карьерного самосвала с имитацией реальных эксплуатационных условий, предназначенная для применения на стадии проектирования. Полученные вероятностные характеристики нагрузок использовались при проектировании планетарной коробки передач карьерного самосвала.

### Ключевые слова:

карьерный самосвал, гидромеханическая трансмиссия, планетарная коробка передач, вероятностные характеристики, математическое ожидание, дисперсия, гистограмма распределения вероятностей.

### Для цитирования:

Тарасик, В. П. Вероятностные оценки процессов функционирования гидромеханической трансмиссии карьерного самосвала / В. П. Тарасик // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2023. – № 3 (80). – С. 104–114.

Для карьерного самосвала БелАЗ грузоподъемностью 60 т создана новая гидромеханическая передача (ГМП) с планетарной коробкой передач (ПКП). Кинематическая схема ПКП приведена в [1]. Она выполнена с тремя степенями свободы и обеспечивает шесть передач переднего хода.

Для оценки возможности достижения планируемого ресурса ПКП необходимо располагать характеристиками нагруженности её механизмов. При проектировании ПКП получение требуемых характеристик осуществлялось на основе математического моделирования процессов функционирования механизмов ГМП с имитацией её работы в карьерных условиях. Использовалось описание характеристик дорожных условий в двух карьерах, существенно различающихся глубиной и уклонами дороги: карьер «Гранит» (г. п. Микашевичи, Брестская обл., Республика Беларусь) и карьер «Ерунаковский» (г. Новокузнецк, Кемеровская обл., Российская Федерация). Параметры характеристик дорожных усло-

вий выбранных карьеров приведены в [2].

Микропрофиль опорной поверхности карьерных дорог описывался случайными функциями и представлял собой случайный процесс, поэтому исследуемые процессы функционирования и нагружения механизмов ГМП были также случайными.

В результате моделирования получены характеристики нагружения основных элементов конструкции ГМП: зубчатых колес и фрикционов ПКП, карданных валов трансмиссии, вращающих моментов двигателя и гидротрансформатора, а также мощности двигателя, частоты вращения его вала и расхода топлива. Информация о результатах моделирования приведена в виде графиков и таблиц в [2, 4]. В качестве примера на рис. 1 представлены графики изменения во времени вращающих моментов на карданном валу трансмиссии самосвала  $M_{к.в}$  при движении в карьере «Гранит» (а) и в карьере «Ерунаковский» (б).

При проведении анализа процес-

сов функционирования исследуемых механизмов выполнялось определение оценок их вероятностных характеристик – дисперсий, корреляционных

функций, спектральных плотностей, а также характеристик плотности вероятности оцениваемых параметров [3].

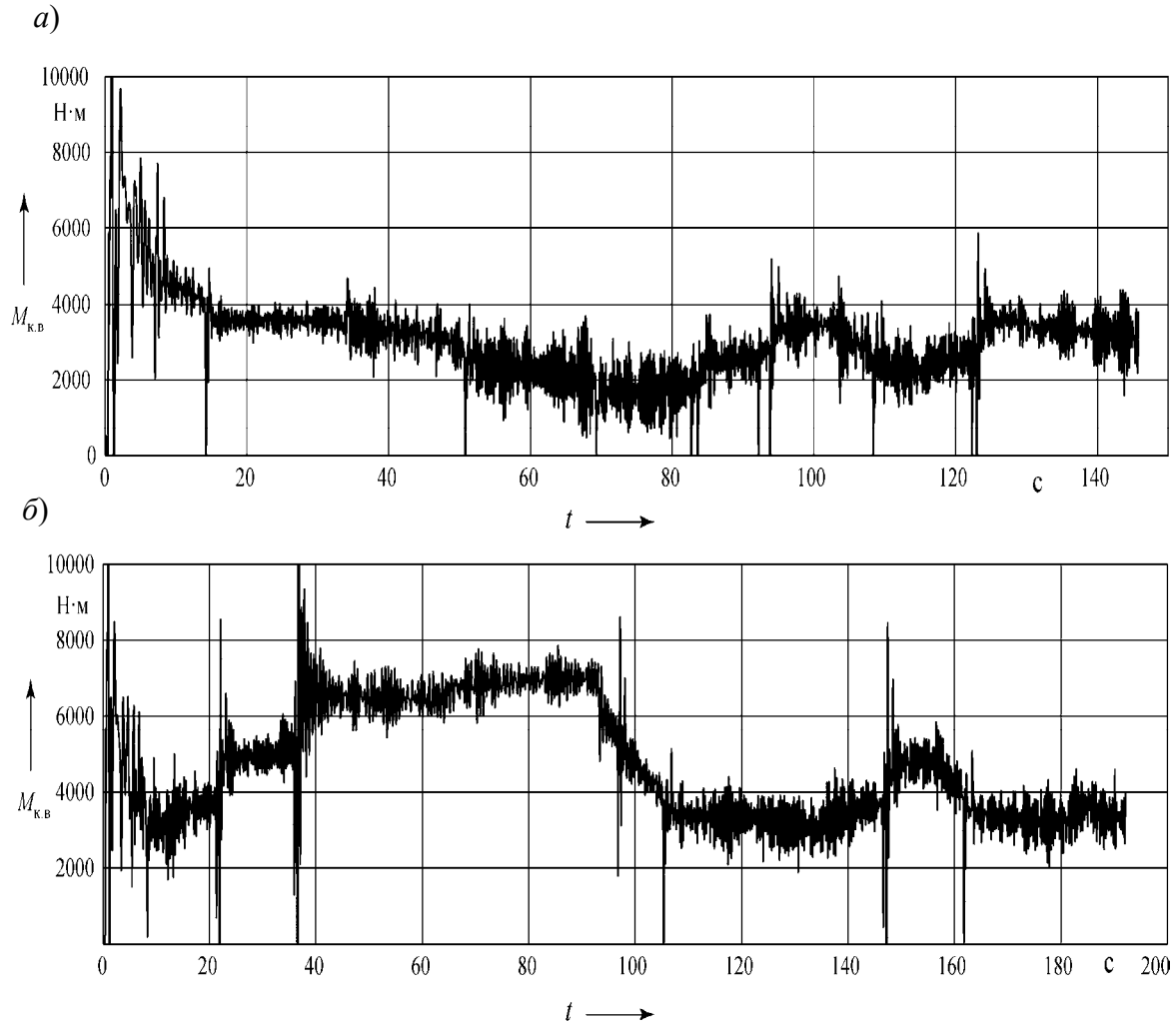


Рис. 1. Графики изменения во времени моментов нагрузки на карданном валу трансмиссии самосвала при движении в карьере «Гранит» (а) и в карьере «Ерунаковский» (б)

При вычислении статистических оценок характеристик случайных процессов необходимо вначале определить шаг дискретизации независимой переменной (времени  $t$ ) и объем выборки  $N$ . Шаг дискретизации  $\Delta t$  выбирают с учетом внутренней структуры случайного процесса, а объем выборки зависит от характера процесса и определяет необходимую точность статистических оценок [3]. На основе теоремы Котельникова – Шеннона о квантовании непрерыв-

ных сигналов был принят шаг дискретизации  $\Delta t = 0,05$  с, а объем выборки  $N = 2000$ .

Для оценки плотности вероятности случайного процесса  $x(t)$  используется массив чисел, составляющих его реализацию. Вначале необходимо произвести группирование данных массива. Для этого вся область изменения выборки от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  разбивается на  $k_{\text{гр}}$  интервалов одинаковой длины  $\Delta x$

и подсчитывается число элементов выборки  $n_j$ ,  $j = \overline{1, k_{\text{Гр}}}$ , попавших в каждый интервал. Значениям  $x$ , находящимся в одном и том же интервале  $j$ , присваивается значение  $\bar{x}_j$ , соответствующее середине данного интервала.

Для определения количества интервалов группирования  $k_{\text{Гр}}$  используют различные полуэмпирические выражения. Одно из них имеет вид

$$k_{\text{Гр}} = 1 + 3,2 \lg N. \quad (1)$$

Полученное значение  $k_{\text{Гр}}$  округляют в сторону ближайшего целого числа. После выбора  $k_{\text{Гр}}$  определяют длину интервала:

$$\Delta x = (x_{\text{max}} - x_{\text{min}}) / k_{\text{Гр}}. \quad (2)$$

Схема процесса группирования элементов выборки случайного процесса  $x(t)$  представлена на рис. 2.

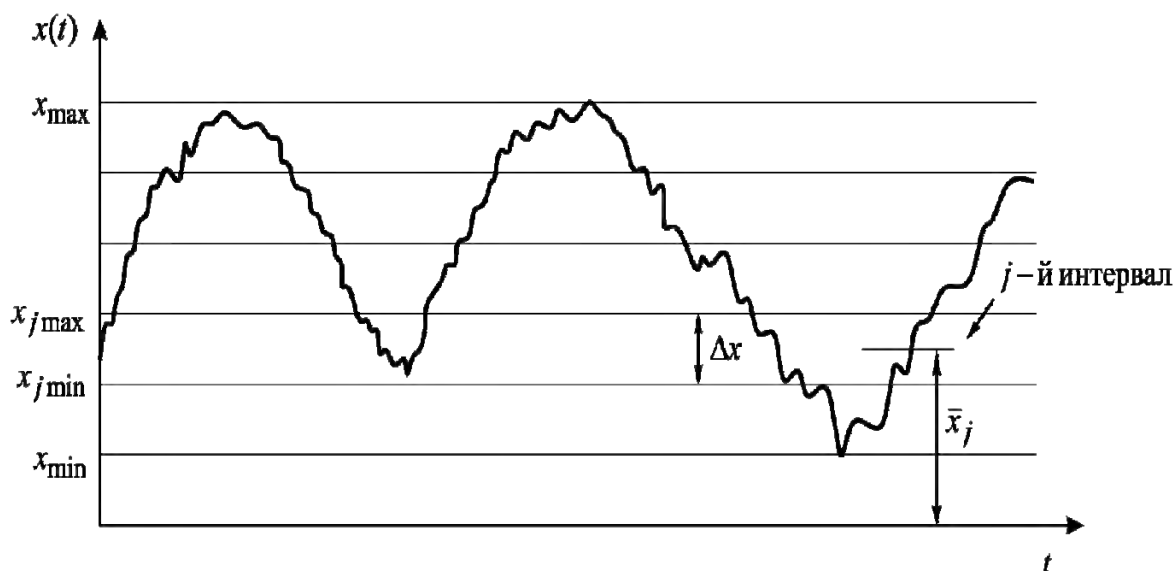


Рис. 2. Схема процесса группирования элементов выборки случайного процесса  $x(t)$

Сгруппированные данные используются для определения эмпирической функции  $\hat{f}_N(j\Delta x)$ , являющейся оценкой  $\hat{f}_N(x)$  плотности вероятности  $f(x)$  случайного процесса  $x(t)$  в точках  $j = \overline{1, k_{\text{Гр}}}$ , соответствующих серединам

интервалов  $\Delta x$ :

$$\hat{f}_N(j\Delta x) = \frac{n(j\Delta x)}{N\Delta x} = \frac{v_j}{\Delta x}, \quad (3)$$

где

$$n(j\Delta x) = \begin{cases} n_j, & \text{если } x_j \text{ попадает в } j\text{-й интервал;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Графическое изображение функции  $\hat{f}_N(x)$  называют *гистограммой*. Для построения гистограммы на оси абсцисс откладывают границы интервалов и для каждого интервала строят прямоугольник с высотой, равной  $n_j/(N\Delta x)$ . Сумма площадей всех прямоугольников равна 1. Отношение  $n_j/N$  называют *относительной частотой* (или *частотью*) и обозначают  $v_j$ . Частость  $v_j$  является несмещенной состоятельной оценкой  $\hat{P}_j$  для вероятности  $P_j$  попадания реализаций случайного процесса  $x_i, i = \overline{1, N}$ , в  $j$ -й интервал группирования [3].

На основе изложенной методики определим оценки плотности вероятности

$\hat{f}(M_{к.в})$  вращающего момента карданного вала  $M_{к.в}$  гидромеханической трансмиссии исследуемого самосвала. Для этого используем выборки случайных процессов  $M_{к.в}(t)$ , полученные в двух различных карьерах, графики которых представлены на рис. 1, а, б.

На рис. 3, а приведена гистограмма распределения вращающего момента  $M_{к.в}$  при работе самосвала в условиях карьера «Гранит», а на рис. 3, б – в карьере «Ерунаковский». По оси абсцисс отложены значения исследуемого случайного процесса  $M_{к.в}(t)$ , а по оси ординат – оценки плотности вероятности его распределения по выделенным интервалам процесса.

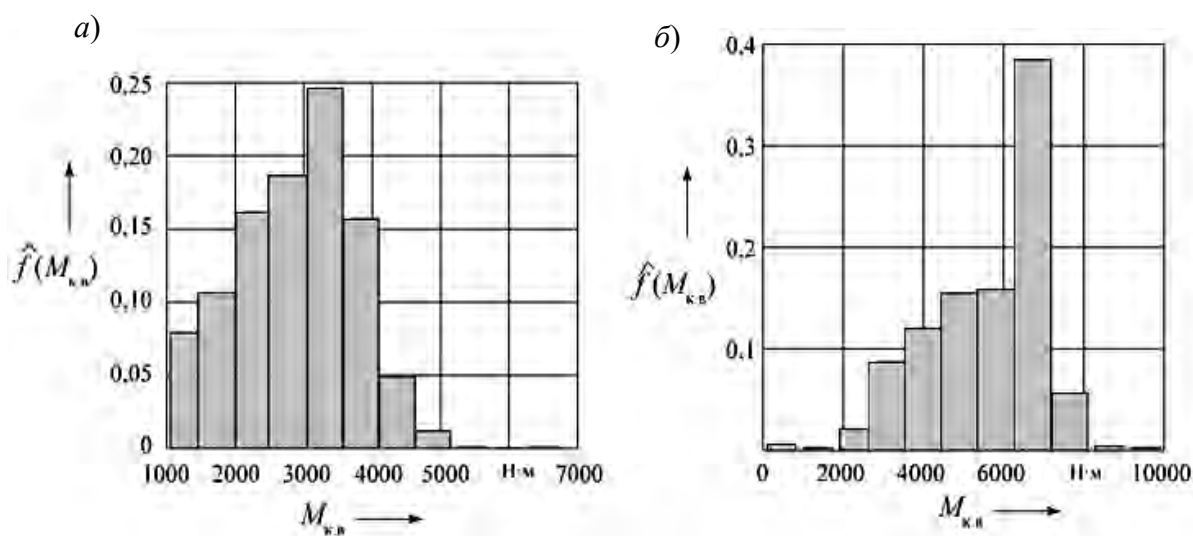


Рис. 3. Гистограммы распределения момента на карданном валу трансмиссии самосвала при движении в карьере «Гранит» (а) и в карьере «Ерунаковский» (б)

Сравнивая приведенные гистограммы, можно отметить, что величина момента  $M_{к.в}$  в условиях карьера «Гранит» находится в основном в пределах 1000...4000 Н·м, максимальные значения не превышают 6500 Н·м, а в условиях карьера «Ерунаковский» наибольшая вероятность момента сосредото-

чена в диапазоне 3000...8000 Н·м, максимальное значение достигает 10000 Н·м. Следовательно, нагруженность механизмов трансмиссии автомобиля во втором карьере существенно выше, чем в первом.

Аналогичные вероятностные оценки определены для вращающего момен-

та  $M_{\text{д}}$  и мощности  $P_{\text{д}}$  двигателя самосвала. На рис. 4, а, б приведены гистограммы распределения момента  $\hat{f}(M_{\text{д}})$  и мощности  $\hat{f}(P_{\text{д}})$  двигателя при движении в условиях карьера «Гранит», а на рис. 4, в, г – в условиях карье-

ра «Ерунаковский». Очевидно, что условия работы двигателя значительно меньше зависят от параметров характеристик маршрутов движения по сравнению с влиянием их на нагрузки трансмиссии.

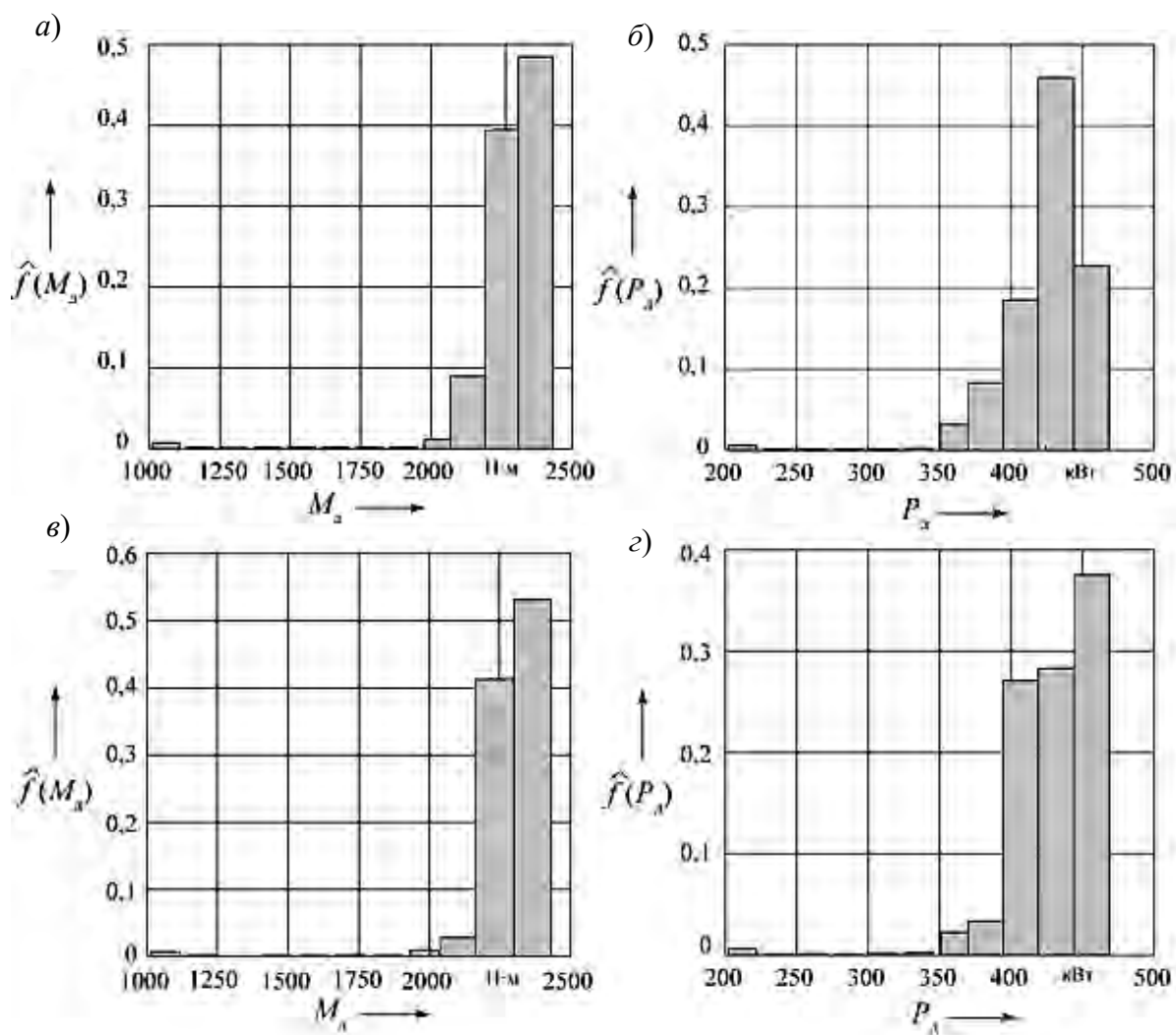


Рис. 4. Гистограммы распределения момента  $M_{\text{д}}$  и мощности  $P_{\text{д}}$  двигателя при движении самосвала в карьере «Гранит» (а, б) и в карьере «Ерунаковский» (в, г)

Из рис. 1, а, б видно, что исследуемые случайные процессы  $M_{\text{к.в}} = f(t)$  не стационарны. Это обусловлено значительными изменениями детерминированной составляющей дорожного сопротивления, определяемой продоль-

ными уклонами участков маршрута. Поэтому при вероятностном анализе этих случайных процессов необходимо выделить текущие значения их математических ожиданий (текущие средние) и осуществить их центрирование.

Обозначим реализацию исследуемого случайного процесса  $x(t)$ , текущее значение математического ожидания  $\bar{x}(t)$ , а центрированную составляющую  $\overset{\circ}{x}(t)$ . Тогда

$$x(t) = \bar{x}(t) + \overset{\circ}{x}(t). \quad (5)$$

Для выделения  $\bar{x}(t)$  используем фильтр В. С. Пугачёва (рис. 5), имеющий следующую характеристику [3]:

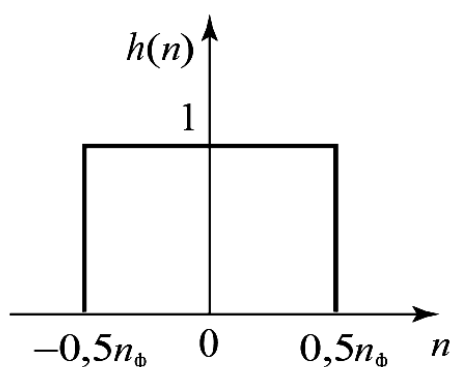


Рис. 5. Характеристика фильтра В. С. Пугачёва

Значение текущего среднего  $\bar{x}_j(t)$  можно найти по формуле

$$\bar{x}_j(t) = \frac{1}{n_\phi + 1} \sum_{i=-0,5n_\phi}^{0,5n_\phi} h(n_i)x_{j+i}, \quad (7)$$

$j = \overline{1, N}.$

При определении  $\bar{x}(t)$  используется объем выборки  $N^*$ , отличающийся от объема  $N$  величиной  $n_\phi$ :  $N^* = N - n_\phi$ , т.е. первые  $n_\phi$  значений выборки не используются. При трогании автомобиля с места и на начальном этапе разгона наблюдаются значительные кратковременные пиковые выбросы момента (см. рис. 1). Их также желательно не использовать при определении вероятностных характеристик, т.к. на началь-

$$h(n_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } |n_i| \leq 0,5n_\phi; \\ 0 & \text{при } |n_i| > 0,5n_\phi, \end{cases} \quad (6)$$

где  $n_\phi$  – количество ординат случайного процесса, используемых для вычисления  $j$ -го значения  $\bar{x}_j(t)$ ;  $n_i$  – порядковые номера текущих ординат в интервале от  $-0,5n_\phi$  до  $+0,5n_\phi$ , покрываемых фильтром.

ном участке реализации текущее среднее будет вычисляться со значительной погрешностью. Поэтому ординаты начального участка длительностью 5 с не использовались для определения  $\bar{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{x}(t)$ . Длительность реализации исследуемых случайных процессов  $T$ , необходимая для получения их вероятностных характеристик, вычисляется по формуле

$$T = N\Delta t. \quad (8)$$

В данном случае  $T = 100$  с.

На основе изложенной методики, используя дискретные значения ординат исследуемых случайных процессов  $M_{к.в.}$ ,  $M_d$ ,  $P_d$ ,  $n_d$  и др., были определены их текущие средние и получены ординаты центрированных составляю-

ших  $M_{к.в}$ ,  $M_d$ ,  $P_d$ ,  $n_d$ . На рис. 6, а приведены графики, иллюстрирующие выделение текущего среднего значения момента на карданном валу  $\bar{M}_{к.в}(t)$  (изображено сплошной жирной линией), а на рис. 6, б – его центрированной составляющей  $\overset{\circ}{M}_{к.в}(t)$ . Очевидно, что

последняя представляет собой стационарный случайный процесс. На характеристики двигателя существенное влияние оказывают переходные процессы при переключении передач, что затрудняет приведение их к стационарному виду при оценке вероятностных характеристик.

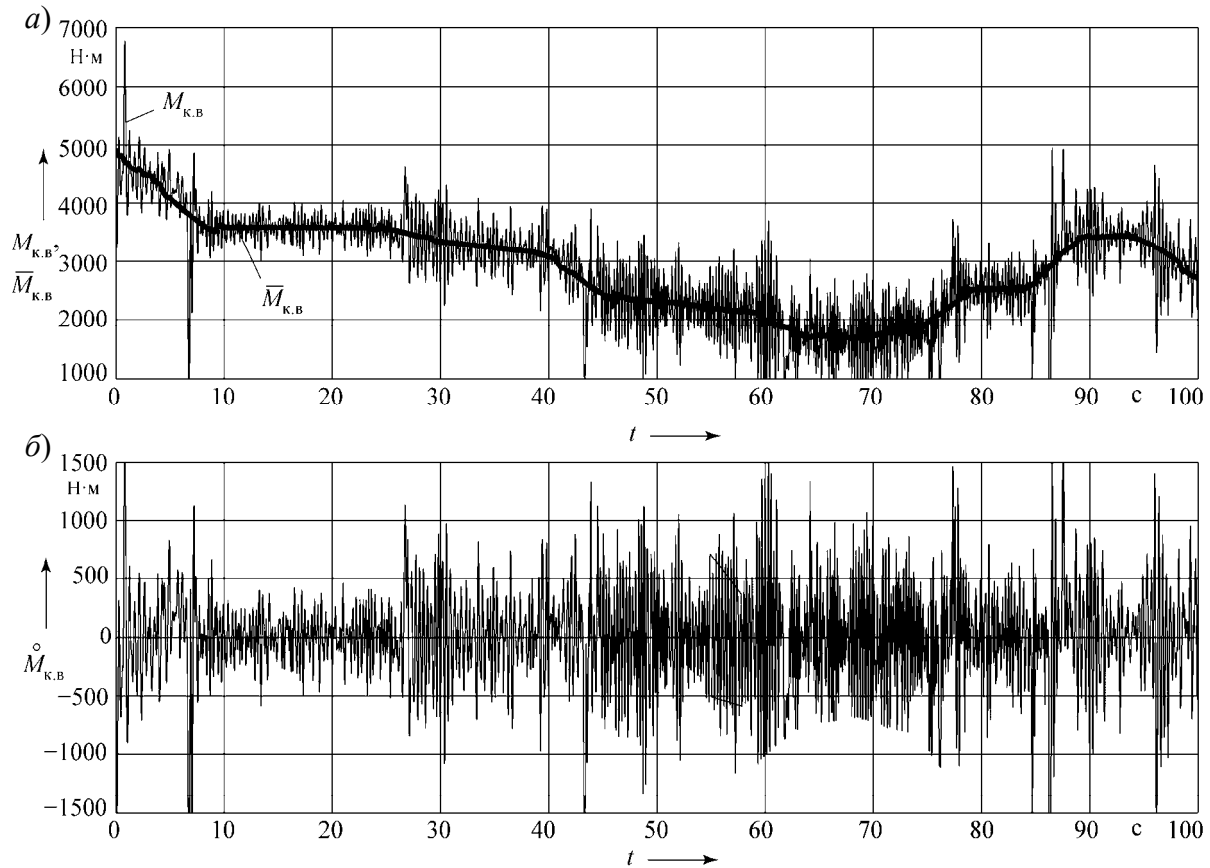


Рис. 6. Графики, отображающие выделение текущего среднего значения момента  $\bar{M}_{к.в}(t)$  на карданном валу (а) и его центрированной составляющей  $\overset{\circ}{M}_{к.в}(t)$  (б)

В табл. 1 приведены значения оценок математических ожиданий  $\bar{x}$  и дисперсий  $D_x$  исследованных процессов  $M_{к.в}$ ,  $M_d$ ,  $P_d$ ,  $n_d$  при движении самосвала по маршруту. Среднее значение нагруженности валов трансмиссии в карьере «Ерунаковский» в 1,5 раза выше, чем в карьере «Гранит», а дисперсия

момента на карданном валу выше более чем в 2 раза. Использование мощности двигателя в обоих случаях примерно одинаково, но дисперсия  $M_d$  и  $P_d$  выше в карьере «Гранит», что обусловлено более легкими дорожными условиями. Это хорошо видно также из сопоставления графиков на рис. 4, а–г.

Табл. 1. Значения оценок числовых вероятностных характеристик исследованных случайных процессов

Карьер	Обозначение оценки	Значение по исходным ординатам				Значение по центрированным ординатам			
		$M_{к.в}$	$n_d$	$M_d$	$P_d$	$\overset{\circ}{M}_{к.в}$	$\overset{\circ}{n}_d$	$\overset{\circ}{M}_d$	$\overset{\circ}{P}_d$
«Гранит»	$\bar{x}$	$3,064 \cdot 10^3$	$1,756 \cdot 10^3$	$2,293 \cdot 10^3$	$4,212 \cdot 10^2$	1,132	-1,605	10,764	0,748
	$D_x$	$1,275 \cdot 10^6$	$3,615 \cdot 10^4$	$5,225 \cdot 10^4$	$1,882 \cdot 10^3$	$2,061 \cdot 10^5$	$5,868 \cdot 10^3$	$7,058 \cdot 10^3$	$6,862 \cdot 10^2$
«Ерунаковский»	$\bar{x}$	$4,693 \cdot 10^3$	$1,784 \cdot 10^3$	$2,290 \cdot 10^3$	$4,273 \cdot 10^2$	-0,543	1,349	7,776	1,363
	$D_x$	$2,613 \cdot 10^6$	$2,963 \cdot 10^4$	$4,229 \cdot 10^4$	$1,537 \cdot 10^3$	$3,767 \cdot 10^5$	$6,314 \cdot 10^3$	$4,023 \cdot 10^3$	$2,489 \cdot 10^2$

Одной из важнейших характеристик случайного процесса является корреляционная функция  $R_x(\tau)$ . Эта функция характеризует степень линейной связи (корреляцию) между значениями случайного процесса в различные моменты времени. Для дискретного случайного процесса  $x(t)$  корреляционную функцию вычисляют по формуле [3]

$$R_x(\tau) = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} x_i x_{i+n}, \quad (9)$$

где  $\tau$  – аргумент корреляционной функции – временной сдвиг,  $\tau = n\Delta t$ ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  – число, определяющее величину сдвига по оси абсцисс;  $\Delta t$  – шаг дискретизации независимой переменной (времени).

При  $n = 0$  получаем оценку дисперсии случайного процесса  $R_x(0) = D_x$ . Значение  $R_x(\tau)$  при этом максимально. С увеличением сдвига  $\tau$  значение  $R_x(\tau)$  уменьшается. При некотором значении  $\tau = \tau_0$  график  $R_x(\tau)$  пересекает ось абсцисс. Это значение называют временем корреляции. При  $\tau > \tau_0$  случайные значения функции  $x(t)$  практически независимы друг от друга.

Для сравнения корреляционных функций случайного процесса, получаемых в различных условиях эксплуатации машины, удобно использовать

нормированную корреляционную функцию  $\rho_x(\tau)$ , определяемую из соотношения

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}. \quad (10)$$

Нормированная корреляционная функция  $\rho_x(\tau)$  безразмерная, максимальное ее значение равно единице. Это создает удобства для сравнительного анализа получаемых результатов эксперимента.

На рис. 7, а приведены графики нормированной корреляционной функции момента на карданном валу  $\rho_{M_{к.в}}(\tau)$ . График 1 соответствует карьере «Гранит», а график 2 – карьере «Ерунаковский». Эти графики позволяют исследовать структуру случайного процесса и определить период низкочастотных колебаний. На основе графиков  $R_{M_{к.в}}(\tau)$  можно получить графики спектральной плотности момента на карданном валу  $G_{M_{к.в}}(\omega)$ .

Спектральная плотность характеризует распределение дисперсии случайного процесса по частоте  $\omega$ , т. е. аргументом спектральной плотности является круговая частота  $\omega$ , рад/с (или циклическая частота  $\nu$ , Гц). При использовании корреляционной функции для получения спектральной плотности необходимо иметь в виду, что с увели-



чением аргумента  $\tau$  возрастает погрешность корреляционной функции, что может привести к существенному искажению графика спектральной плотности. Поэтому для получения оценки

спектральной плотности случайного процесса применяют сглаживание корреляционной функции посредством корреляционного окна.

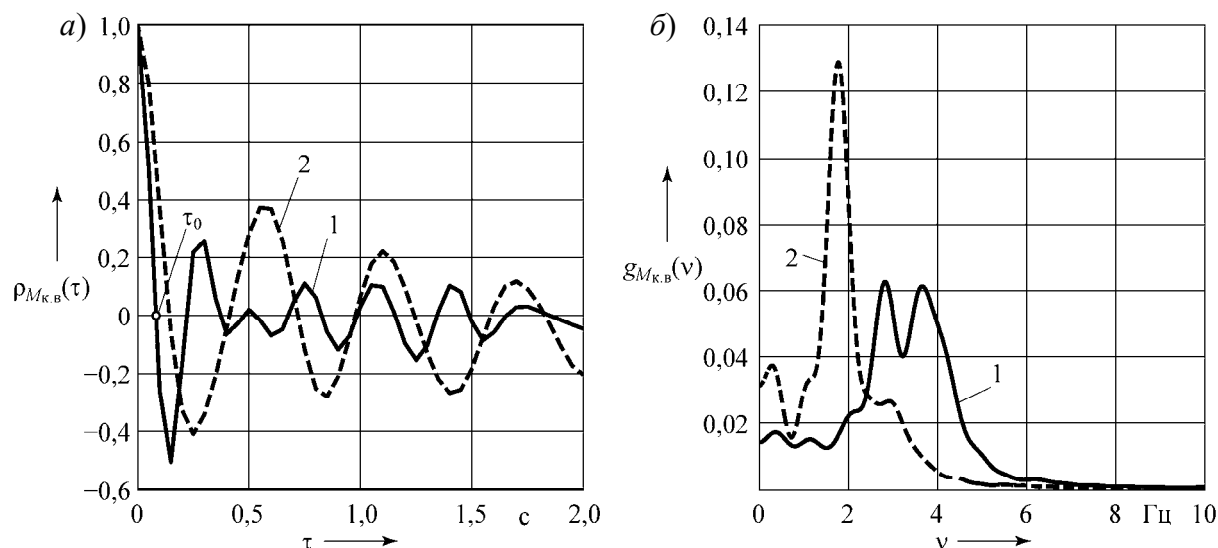


Рис. 7. Графики нормированных корреляционной функции (а) и спектральной плотности (б): 1 – карьер «Гранит»; 2 – карьер «Ерунаковский»

Сглаживание представляет собой такую же фильтрацию ординат функции  $R_x(\tau)$ , как и фильтрация ординат реализации случайного процесса  $x(t)$  низкочастотным фильтром  $h(n_i)$ . Существует несколько функций сглаживания корреляционной функции [3].

В данном случае была использована функция Бартлета (рис. 8), которая имеет вид

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/\tau_{\max} & \text{при } |\tau| \leq \tau_{\max}; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_{\max}. \end{cases} \quad (11)$$

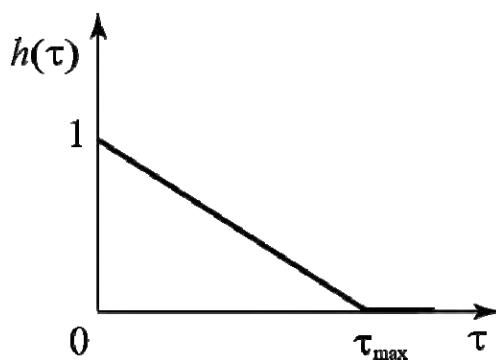


Рис. 8. График функции корреляционного окна Бартлета

Для дискретных случайных процессов  $x(t)$  спектральная плотность  $G_x(\omega)$

$$G_x(\omega) = G_x(j\Delta\omega) = \frac{\Delta\tau}{\pi} \left[ R_x(0) + 2 \sum_{i=1}^{n_{\max}} R_x(i\Delta\tau) h(i\Delta\tau) \cos(j\Delta\omega) i\Delta\tau \right], \quad (12)$$

где  $\Delta\omega$  – шаг дискретизации аргумента  $\omega$  спектральной плотности  $G_x(\omega)$ ;  $j$  – номер точки дискретного аргумента  $\omega_j$ ,  $\omega_j = j\Delta\omega$ ;  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, k$ ;  $\Delta\tau = \Delta t$ ;  $n_{\max} = \tau_{\max} / \Delta t$ .

Для сравнения результатов экспериментальных исследований автомобиля в различных условиях эксплуатации удобно использовать нормированную спектральную плотность  $g_x(\omega)$ , вычисляемую из соотношения

$$g_x(\omega) = \frac{G_x(\omega)}{D_x}. \quad (13)$$

Нормированная спектральная плотность – безразмерная функция. На рис. 7, б приведены графики нормированных спектральных плотностей момента на карданном валу  $g_{M_{к.в}}(\nu)$ , соответствующие графикам нормированных корреляционных функций  $\rho_{M_{к.в}}(\tau)$ , представленным на рис. 7, а. В качестве аргумента функций спектральных плотностей на рис. 7, б вместо  $\omega$  использована циклическая частота  $\nu = \omega / (2\pi)$ , Гц.

Рассмотрим графики функций  $\rho_{M_{к.в}}(\tau)$  и  $g_{M_{к.в}}(\nu)$ . Корреляционная функция момента на карданном валу имеет затухающий колебательный характер. Из рис. 7, а видно, что частота колебаний этой функции, соответствующая условиям движения в карьере «Гранит», значительно выше, чем в карьере «Ерунаковский». На графике 1 нормированной спектральной плотности  $g_{M_{к.в}}(\nu)$ , полученной для карьера «Гранит», выявлены два значитель-

вычисляется по формуле [3]

ных пика дисперсий при частотах 2,83 и 3,67 Гц. При движении в карьере «Ерунаковский» (график 2) пиковое значение дисперсии момента на карданном валу соответствует частоте 1,75 Гц. Причем дисперсия момента в этом случае в 2 раза выше, чем в первом. Это обусловлено существенными различиями характеристик рассматриваемых карьеров, что сказывается на режимах движения самосвала и нагружения механизмов трансмиссии. Изменения частоты колебаний обусловлены различными резонансными частотами масс трансмиссии при движении на разных передачах. Так, в карьере «Гранит» автомобиль в исследуемом интервале времени движется на IV, V и VI передачах, а в карьере «Ерунаковский» – на II и III передачах. Дисперсия колебаний момента на карданном валу в трансмиссии в основном сосредоточена в диапазоне частоты до 6 Гц.

Таким образом, функция спектральной плотности позволяет выявить резонансные частоты колебаний исследуемых процессов объекта проектирования, определить дисперсии максимальных моментов нагрузок и осуществить обоснованный выбор параметров, обеспечивающих надежное функционирование объекта проектирования.

Время корреляции  $\tau_0$  ординат момента на карданном валу также связано со спектром резонансных частот трансмиссии. С увеличением частоты колебаний момента значение  $\tau_0$  снижается (см. рис. 7, а).

Полученные характеристики распределения плотности вероятностей, математических ожиданий и дисперсий вероятностных процессов функциони-

рования механизмов самосвала в реальных дорожных условиях использовались затем при проектировании планетарной коробки передач, входящей в состав гидромеханической трансмиссии самосвала.

Использование вероятностных ха-

рактеристик позволило существенно повысить достоверность информации о нагрузках механизмов объекта проектирования, что в результате обеспечит надежность их функционирования в реальных условиях эксплуатации.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диагностирование гидромеханических передач: монография / Н. Н. Горбатенко [и др.]; под ред. В. П. Тарасика. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2010. – 511 с.
2. Прогнозирование нагруженности механизмов гидромеханической трансмиссии карьерного самосвала на основе математического моделирования / В. П. Тарасик [и др.] // Грузовик. – 2013. – № 6. – С. 24–36.
3. **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание; Москва : ИНФРА-М, 2016. – 592 с.
4. **Тарасик, В. П.** Моделирование нагрузочных режимов гидромеханической трансмиссии карьерного самосвала / В. П. Тарасик // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2023. – № 2. – С. 75–86.

*Статья сдана в редакцию 9 июня 2023 года*

Контакты:

avtobru@gmail.com (Тарасик Владимир Петрович).

**V. P. TARASIK**

#### **PROBABILISTIC EVALUATION OF PROCESSES RELATED TO FUNCTIONING OF THE HYDROMECHANICAL TRANSMISSION OF MINING DUMP TRUCKS**

##### **Abstract**

The paper presents a technique for determining probabilistic characteristics of processes related to functioning of mechanisms of hydromechanical transmission in mining dump trucks with the imitation of real operating conditions to be used at the design stage. The resulting probabilistic load characteristics were used when designing a planetary gearbox for a mining dump truck.

##### **Keywords:**

mining dump truck, hydromechanical transmission, planetary gearbox, probabilistic characteristics, mathematical expectation, variance, probability distribution histogram.

##### **For citation:**

Tarasik, V. P. Probabilistic evaluation of processes related to functioning of the hydromechanical transmission of mining dump trucks / V. P. Tarasik // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2023. – № 3 (80). – P. 104–114.