

DOI: 10.53078/20778481\_2023\_3\_57

УДК 621.83.06

**Е. С. ЛУСТЕНКОВА**

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ПОДЪЕМА БЕГОВЫХ ДОРОЖЕК СФЕРИЧЕСКИХ РОЛИКОВЫХ ПЕРЕДАЧ**

### **Аннотация**

Определяются углы подъема беговых дорожек как одни из основных геометрических параметров сферической роликовой передачи, от которых зависят ее эксплуатационные характеристики. Исследуемая передача содержит сателлит, который совершает сферическое движение. На сателлите коаксиально установлены два ряда роликов, взаимодействующих с пространственными периодическими беговыми дорожками, расположенными на сферических поверхностях, образованными кулачками, соединенными с корпусом и ведомым валом. Углы подъема беговых дорожек циклически изменяются при перемещении ролика по этим дорожкам. Приведены различные алгоритмы определения углов подъема и их сравнительный анализ. Проведена оценка применимости различных зависимостей для определения средних значений углов подъема беговых дорожек.

### **Ключевые слова:**

прецессионная передача, нутационный привод, сферический механизм, роликовая передача, угол подъема кривой, редуктор.

### **Для цитирования:**

Лустенкова, Е. С. Определение углов подъема беговых дорожек сферических роликовых передач / Е. С. Лустенкова // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2023. – № 3 (80). – С. 57–65.

### **Введение**

К современной редукторной технике предъявляются требования улучшения эксплуатационных характеристик при снижении материалоемкости для обеспечения конкурентоспособности и импортозамещения [1]. Применение передач с промежуточными телами качения (ППТК) позволяет увеличить передаваемый момент при небольших габаритах и массе привода по сравнению с известными передачами других типов при сопоставимых массогабаритных параметрах [2]. В ППТК сферического типа (прецессионных, нутационных) повышается уравновешенность системы и снижаются пусковые моменты [3, 4]. В сферических роликовых передачах (СРП) [5] одними из основных геометрических параметров являются углы подъема беговых дорожек, по которым перемещаются тела качения. Они выполняют такую же функцию, как уг-

лы давления (дополняют их до  $90^\circ$ ) в кулачковых механизмах и углы подъема винтовой линии в паре «винт – гайка», и определяют направления реакций в зацеплении и его КПД [6, 7]. При перемещении ролика по беговой дорожке угол ее подъема периодически изменяется по определенному закону, который зависит от параметрических уравнений, описывающих данную беговую дорожку. Для проведения силового анализа передачи и разработки инженерных методик расчета и проектирования СРП необходимо установить средние значения углов подъема. Выражения для их определения были получены для дорожек, расположенных на цилиндрических поверхностях втулок ППТК цилиндрического типа [8, 9]. Целью работы являлась оценка применимости этих выражений для передач сферического типа.

### Конструкция СРП с коаксиальным расположением рядов роликов и принцип ее работы

Передача (рис. 1) содержит ведущий вал 1, имеющий наклоненный участок б (кривошип). Этот наклон может обеспечиваться установкой эксцентриковой втулки на ведущий вал.

На кривошипе с помощью подшипников качения размещается составная сателлит 5. Сателлит содержит коаксиально расположенные наружную и внутреннюю втулки с отверстиями, выполненными с постоянным угловым шагом. В эти отверстия установлены два ряда роликов 4' и 4'' соответственно,

оси которых лежат в одной плоскости. При работе передачи наружный ряд роликов 4' контактирует своими поверхностями сферической формы с замкнутой беговой дорожкой 3. Эта беговая дорожка образована двумя остановленными сферическими кулачками 9, закрепленными в корпусе 10. Внутренний ряд роликов 4'' контактирует своими сферическими поверхностями с беговой дорожкой 2 ведомого сферического кулачка 7, соединенного с ведомым валом 8 СРП. Центр масс сателлита совпадает с центром сферического движения  $O$  и расположен на оси передачи [10].

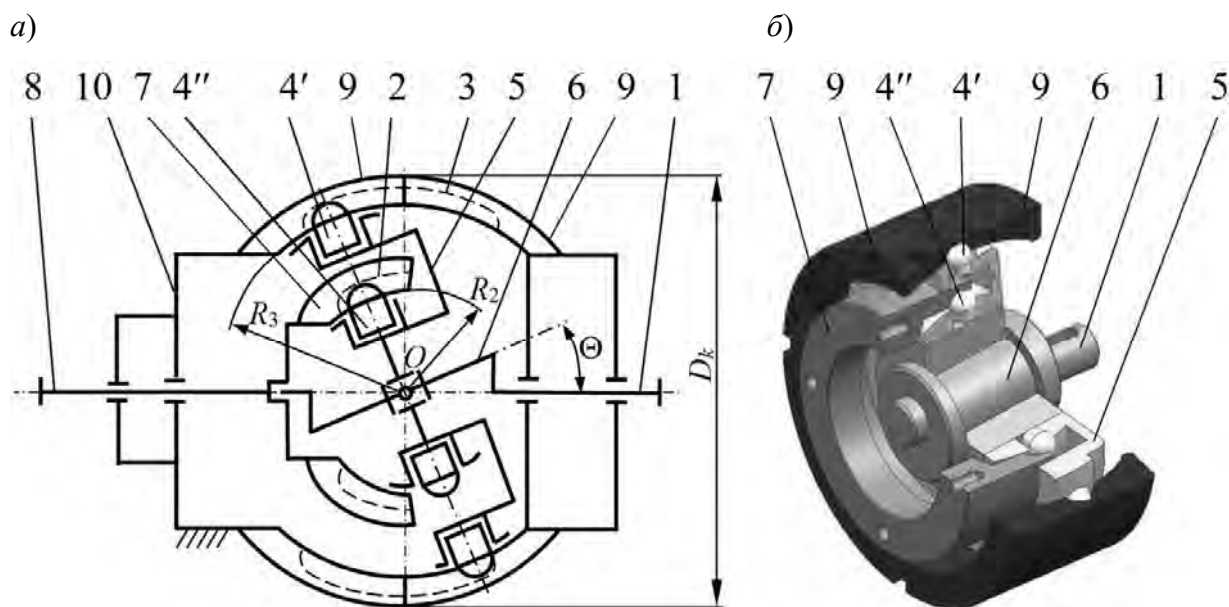


Рис. 1. СРП с двухрядным сателлитом: а – кинематическая схема; б – общий вид; 1 – ведущий вал; 2 – беговая дорожка ведомого кулачка; 3 – беговая дорожка, образованная остановленными кулачками; 4' и 4'' – наружный и внутренний ряды роликов; 5 – сателлит; 6 – кривошип; 7 – ведомый (внутренний) кулачок; 8 – ведомый вал; 9 – остановленные (наружные) кулачки; 10 – корпус

При передаче нагрузки ролики могут вращаться в отверстиях сателлита, перекачиваясь своими сферическими торцами по беговым дорожкам. Этим обеспечивается снижение потерь мощности, потому что скольжение частично заменяется качением.

Доля тел качения, одновременно передающих нагрузку, в наружном ряду составляет 100 % от их общего числа и во внутреннем ряду – 50 %, что снижает удельные нагрузки в зацеплении на 50 %...150 % и повышает средний КПД в 2,5–3 раза.

### Определение углов подъема беговых дорожек

В модели СРП беговые дорожки

$$x(\varphi) = R \cdot (\cos(Z \cdot \varphi) \cdot \cos((Z+1) \cdot \varphi) + \sin(Z \cdot \varphi) \cdot \sin((Z+1) \cdot \varphi) \cdot \cos(\Theta)); \quad (1)$$

$$y(\varphi) = R \cdot (\cos(Z \cdot \varphi) \cdot \sin((Z+1) \cdot \varphi) - \sin(Z \cdot \varphi) \cdot \cos((Z+1) \cdot \varphi) \cdot \cos(\Theta)); \quad (2)$$

$$z(\varphi) = -R \cdot \sin(Z \cdot \varphi) \cdot \sin(\Theta), \quad (3)$$

где  $R$  – радиус основной сферы, где располагаются траектории центров масс тел качения;  $Z$  – число периодов кривой;  $\Theta$  – угол наклона кривошипа ведущего вала, который можно выразить через условную амплитуду  $A$  кривой,  $\Theta = A/R$ . Знак «минус» в уравнении (3) введен для удобства сравнения беговой дорожки с окружностью, на которой располагаются центры масс роликов, которая также размещена на сферической поверхности с радиусом  $R$ .

Замкнутые пространственные кривые, расположенные на сферической поверхности, можно назвать периодическими, поэтому число периодов  $Z$  – это число волн (число повторяющихся участков траектории центра масс тела качения, которые можно рассматривать как число полных колебаний этого центра относительно экваториальной плоскости спутника). Число периодов беговых дорожек, образованных кулачками, выполняет функцию чисел зубьев зубчатых колес в планетарной передаче с двухвенцовым спутником, если рассматривать эту передачу как аналог предлагаемой.

Для СРП с двухрядным спутником с коаксиальным расположением рядов роликов центровая кривая с параметрами  $R = 30$  мм,  $A = 5$  мм,  $Z = 15$  показана на рис. 2. Рассмотрим некоторую точку  $M$ , расположенную на центровой кривой, и предположим, что эта точка перемещается по ней.

заменяются замкнутыми центровыми кривыми, расположенными на сферических поверхностях. Параметрические уравнения этих кривых [11]

Радиус-вектор, соединяющий ось  $Oz$  и точку  $M$ ,

$$R_{OM}(\varphi) = \sqrt{(x_M(\varphi))^2 + (y_M(\varphi))^2}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  – центральный угол, отсчитываемый в экваториальной плоскости основной сферы (плоскости  $xOy$ ).

Координаты точек окружностей, на которых лежат точки центровой кривой, образованных сечениями основной сферы плоскостями, перпендикулярных оси  $Oz$ ,

$$x_M(\varphi) = R_{OM}(\varphi) \cdot \cos(\varphi); \quad (5)$$

$$y_M(\varphi) = R_{OM}(\varphi) \cdot \sin(\varphi); \quad (6)$$

$$z_M(\varphi) = 0. \quad (7)$$

Вектор касательной к многопериодному центральному профилю в точке  $M$  определится как

$$\alpha_\tau(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\varphi} x_M(\varphi) \\ \frac{d}{d\varphi} y_M(\varphi) \\ \frac{d}{d\varphi} z_M(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

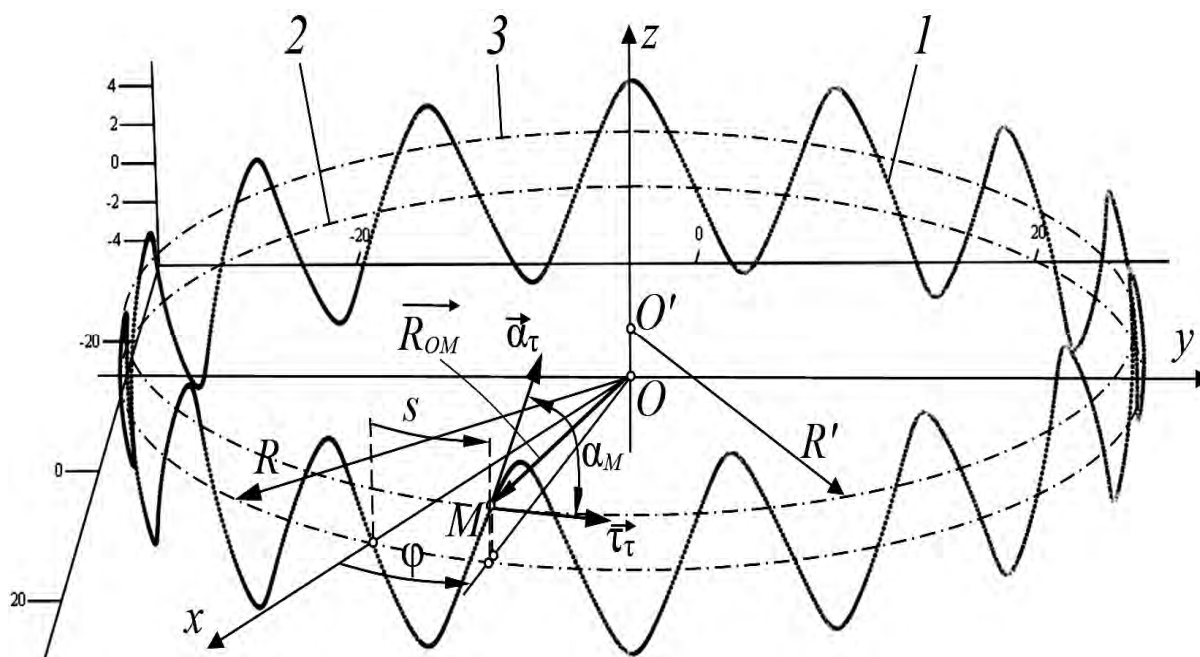


Рис. 2. К определению углов подъема беговых дорожек (центральных кривых) СРП: 1 – центровая кривая; 2 – средняя окружность; 3 – след сечения сферы плоскостью, перпендикулярной оси z в точке M

Вектор касательной к окружности с радиусом  $R'$

$$\tau_{\tau M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\varphi} x_M(\varphi) \\ \frac{d}{d\varphi} y_M(\varphi) \\ \frac{d}{d\varphi} z_M(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Абсолютное значение угла подъема многопериодной центральной кривой как функция центрального угла

$$|\alpha_M(\varphi)| = \arccos \left( \frac{\alpha_{\tau M}(\varphi) \cdot \tau_{\tau M}(\varphi)}{|\alpha_{\tau M}(\varphi)| \cdot |\tau_{\tau M}(\varphi)|} \right). \quad (10)$$

Алгоритм определения угла подъема по формулам (4)–(10) предполагает применение программного обеспечения для вычислений и не всегда удобен для автоматизации расчетов согласно комплексным методикам. Для инженерных расчетов необходимо оценить среднее

значение углов подъема.

### Алгоритмы определения средних значений углов подъема

Угол подъема кривой также может быть определен для развертки пространственной кривой на плоскость. Уравнение развертки кривой на плоскость находится по формуле  $z(s) = R \cdot \arcsin(z(s)/R)$ , где  $s$  – дуговая координата, которая изменяется от нуля до  $2 \cdot \pi \cdot R$  и отсчитывается вдоль окружности 2 (см. рис. 2) в экваториальном сечении, которую назовем средней линией. Для определения угла подъема кривой на развертке необходимо взять производную  $dz(s)/ds$  и арктангенс от полученного выражения. После замены в выражении (3) центрального угла  $\varphi$  на дуговую координату, отнесенную к радиусу основной сферы  $s/R$ , и проведения преобразований имеем

$$\alpha_M = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z \cdot \cos\left(\frac{Z \cdot s}{R}\right) \cdot \sin(\Theta)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{Z \cdot s}{R}\right) \cdot \sin^2(\Theta)}} \right). \quad (11)$$

Аналогом СРП являются ППТК цилиндрического типа, у которых центровые кривые в модели передачи расположены на цилиндре с радиусом  $R$ . Угол подъема цилиндрической синусоиды с уравнением координаты траектории  $z = -A \cdot \sin(Z \cdot s/R)$  будет определяться по формуле

$$\alpha_M = \operatorname{arctg} \left( -\frac{A \cdot Z}{R} \cdot \cos\left(\frac{Z \cdot s}{R}\right) \right). \quad (12)$$

Угол  $\alpha_M$  периодически изменяется при его измерении вдоль средней линии как для цилиндрических (по уравнению (12)), так и для сферических (по уравнению (11)) передач. В модели СРП центры масс соседних роликов с равным угловым шагом отстоят друг от друга на центральной кривой и согласованно перемещаются по ней, поэтому угол подъема для каждого из центров масс, как и для точки  $M$ , периодически изменяется, соответственно, изменяется и направление нормальной реакции в контакте ролика и беговой дорожки. Как отмечено ранее, для проведения силового анализа цилиндрической передачи и определения рациональных параметров ее элементов также необходимо было установить среднее значение угла подъема. Для этого на плоской развертке синусоидальная кривая заменялась совокупностью отрезков прямых, соединенных у вершин, т. е. кусочно-винтовой кривой с постоянным по модулю углом подъема. Средний угол подъема для цилиндрической синусоиды в этом случае определялся как

$$\alpha_m = \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \cdot Z \cdot A}{\pi \cdot R} \right). \quad (13)$$

Сделаем сравнительный анализ изменения абсолютных значений углов подъема, измеряемых вдоль средней линии, рассчитанных различными способами для сферической и цилиндрической кривых с сопоставимыми параметрами  $R = 30$  мм,  $Z = 15$ ,  $A = 5$  мм,  $\Theta = A/R = 0,167$  рад. Для получения графической зависимости  $I$  на рис. 3 в формулах (4)–(10) также использовалась замена центрального угла  $\varphi$  на дуговую координату, отнесенную к радиусу основной сферы:  $s/R$ .

Практическое совпадение графиков 2 и 3 свидетельствует о том, что выражение (11) для углов подъема на плоской развертке описывает зависимость, близкую к зависимости (12) для угла подъема на развертке цилиндрической синусоиды. Однако для цилиндрической синусоиды результаты, полученные по формулам (4)–(10) и формуле (11), идентичны. Для сферических передач зависимости угла подъема, определенного для пространственной кривой по формулам (4)–(10) и на развертке по формуле (11), различаются (графические зависимости 1 и 2). Еще больше эти различия проявляются при изменении параметров кривой до недопустимых значений. Если увеличить амплитуду в 2 раза ( $A = 10$  мм) при сохранении других параметров, получим кривую с заострениями вершин (рис. 4). Если продолжать увеличивать амплитуду, возникнет явление самопересечения профиля. На рис. 4 показана трансформация одной из вершин кривой при увеличении амплитуды до 15 мм.

Изменение мгновенных и средних углов подъема, рассчитанных различными способами, при измерении их вдоль средней линии в случае  $A = 10$  мм, показано на рис. 5.

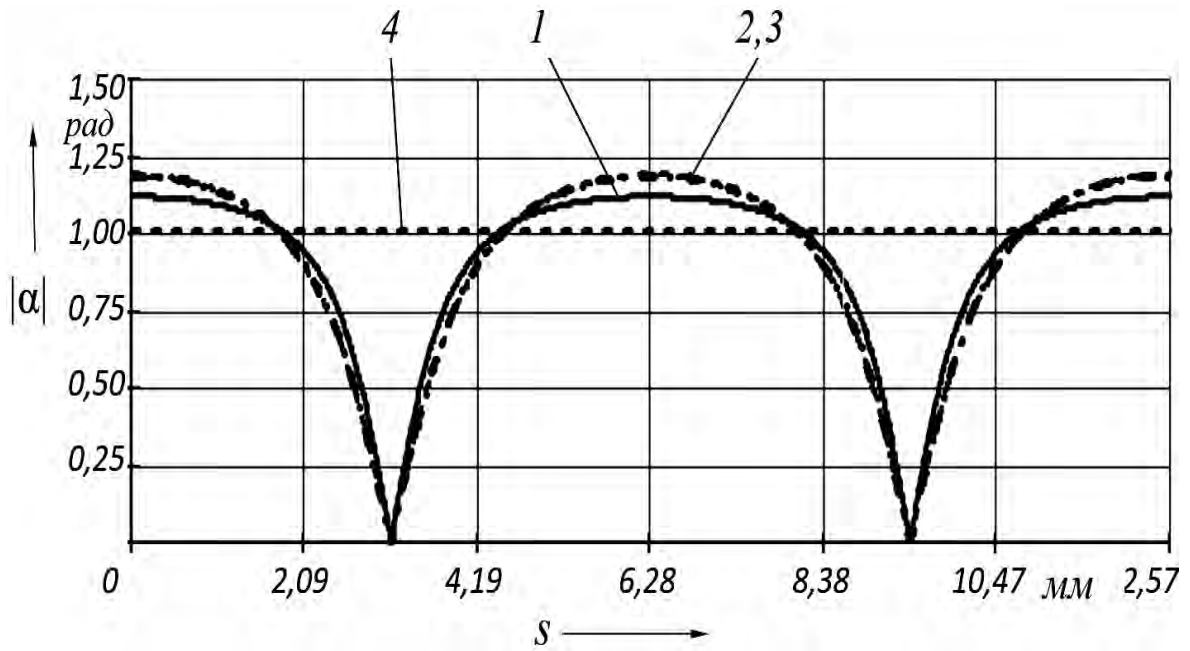


Рис. 3. Углы подъема: 1 – мгновенные значения для сферической кривой по формуле (10); 2 – мгновенные значения для сферической кривой по формуле (11); 3 – мгновенные значения для цилиндрической кривой по формуле (12); 4 – средние значения для цилиндрической кривой по формуле (13)

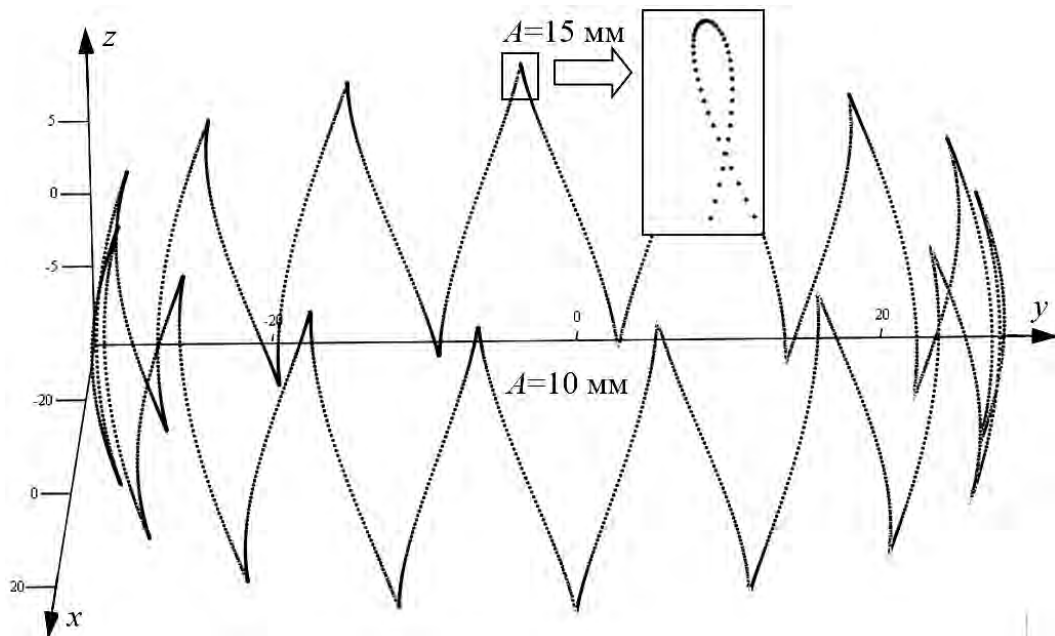


Рис. 4. Сферическая центровая кривая с параметрами  $R = 30$  мм,  $Z = 15$ ,  $A = 10$  мм. Построение в программе Mathcad по 1800 точкам

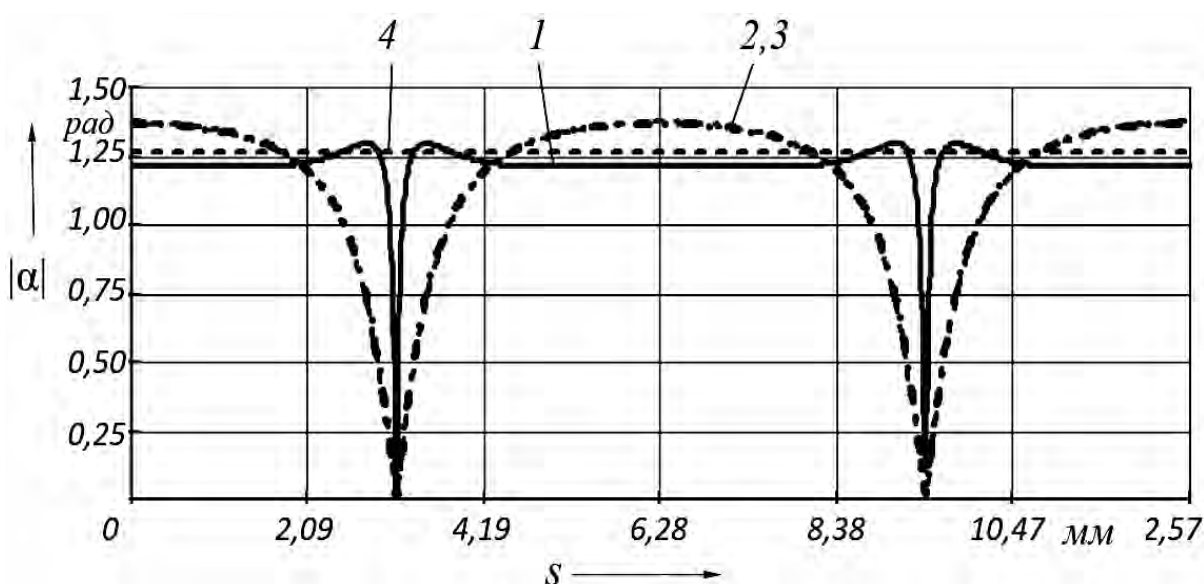


Рис. 5. Углы подъема: 1 – мгновенные значения для сферической кривой по формуле (10); 2 – мгновенные значения для сферической кривой по формуле (11); 3 – мгновенные значения для цилиндрической кривой по формуле (12); 4 – средние значения для цилиндрической кривой по формуле (13)

Как видно из рис. 5, только зависимость 1 показывает действительные значения угла подъема. Выражение (12) для плоской развертки может применяться для цилиндрических передач, но для сферических (формула (11)) сложные зависимости для координат  $x$  и  $y$  данное выражение не учитывает.

Оценим применимость выражения (13) для определения среднего угла подъема как цилиндрических, так и сферических передач.

Среднее значение функции  $f(s)$  на

отрезке  $[0; 2 \cdot \pi \cdot R]$  определяется согласно выражению

$$\alpha_{m0} = \frac{\int_0^{2 \cdot \pi \cdot R} f(s) ds}{2 \cdot \pi \cdot R}. \quad (14)$$

Рассмотрим варианты беговых дорожек передач с ранее принятыми параметрами и новыми. Результаты анализа приведены в табл. 1.

Табл. 1. Сравнение вариантов вычислений угла подъема

Тип передачи	Параметр			$\alpha_{m0}$ , рад	$\alpha_m$ , рад	Погрешность, %
	R, мм	Z	A, мм			
Цилиндрическая	30	15	5	0,916	1,010	10,262
Цилиндрическая	20	11	5	0,790	0,862	9,114
Цилиндрическая	30	15	10	1,152	1,266	9,896
Сферическая	30	15	5	0,916	1,010	10,262
Сферическая	20	11	5	0,786	0,862	9,669
Сферическая	30	15	10	1,214	1,266	4,283

Для указанных геометрических параметров погрешность составляет 4,3 %...10,3 %. Видно, что для сферических передач увеличение амплитуды приводит к снижению погрешности. При этом средние значения углов подъема возрастают. К увеличению углов подъема также приводит уменьшение радиуса  $R$  и чисел периодов  $Z$  при прочих равных параметрах.

### Заключение

Проведена оценка возможности применения различных алгоритмов при вычислении средних значений углов подъема беговых дорожек сферических роликовых передач, расположенных симметрично экваториальной плоскости сателлита. При диаметрах основной сферы 20...30 мм и таких же значениях радиуса основания цилиндрических по-

верхностей использование формулы для определения среднего угла подъема беговых дорожек как кусочно-винтовых кривых для сферических и цилиндрических передач с промежуточными телами качения приводит к завышению реальных значений углов примерно на 10 %. При этом для сферических передач эта погрешность с увеличением углов подъема снижается. В целом, исследования подтвердили возможность использования формулы для определения углов подъема сферических кривых, как для цилиндрических кусочно-винтовых на плоской развертке, однако для компенсации погрешности в методиках расчета и проектирования сферических роликовых передач с двухрядным сателлитом с коаксиальным расположением рядов роликов необходимо умножать полученные значения на поправочный коэффициент.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубчатые передачи и трансмиссии в Беларуси: проектирование, технология, оценка свойств: монография / В. Б. Альгин [и др.]; под общ. ред. В. Б. Альгина, В. Е. Старжинского. – Минск: Беларуская навука. 2017. – 407 с.
2. **Лустенков, М. Е.** Шариковые планетарные передачи для средств малой механизации / М. Е. Лустенков // Вестн. машиностроения. – 2004. – № 6. – С. 15–17.
3. Kinematic Modeling for the Nutation Drive Based on Screw Theory / J. Hong [et al.] // Procedia CIRP. – 2015. – № 36. – P. 123–128.
4. **Лустенков, М. Е.** Механизм с изменяющимся углом между осями валов / М. Е. Лустенков, Е. С. Фитцова // Вестн. Брянского гос. техн. ун-та. – 2014. – № 1. – С. 46–50.
5. **Лустенков, М. Е.** Теоретические и экспериментальные исследования сферических роликовых передач / М. Е. Лустенков, Е. С. Лустенкова // Вестн. Ижевского гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 20, № 1. – С. 23–27.
6. **Лустенков, М. Е.** Определение основных геометрических параметров планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2008. – № 1. – С. 12–17.
7. **Лустенков, М. Е.** Определение КПД передач с составными промежуточными телами качения / М. Е. Лустенков // Изв. вузов. Машиностроение. – 2014. – № 6. – С. 13–19.
8. **Лустенков, М. Е.** Расчет геометрии адаптированного профиля эллипсной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Технология машиностроения. – 2005. – № 5. – С. 36–38.
9. **Lustenkova, M. E.** Strength calculations for cylindrical transmissions with compound intermediate rolling elements / M. E. Lustenkova // Int. J. of Mechanisms and Robotic Systems. – 2015. – Vol. 2, № 2. – P. 111–121.
10. **Lustenkova, M. E.** Load Capacity of Spherical Roller Transmission with Double-Row Pinion / M. E. Lustenkova, E. S. Lustenkova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – 795 (2020) 012020. – 6 p.
11. **Лустенков, М. Е.** Расчет и проектирование сферических роликовых передач: монография / М. Е. Лустенков, Е. С. Лустенкова. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – 177 с. : ил.



Статья сдана в редакцию 15 июня 2023 года

Контакты:

fittsova@gmail.com (Лустенкова Екатерина Сергеевна).

***E. S. LUSTENKOVA***

## **DETERMINATION OF ASCENT ANGLES OF RACE TRACKS IN SPHERICAL ROLLER TRANSMISSIONS**

### **Abstract**

The article determines ascent angles of race tracks in a spherical roller transmission as one of its main geometric parameters, on which the operational characteristics depend. The transmission under study contains a satellite that performs a spherical motion. Two rows of rollers are coaxially mounted on the satellite, and they interact with spatial periodic race tracks, which are located on spherical surfaces formed by the cams connected to the housing and the driven shaft. The ascent angles of the race tracks change cyclically as the roller moves along these race tracks. Various algorithms for determining the ascent angles and their comparative analysis are given. The applicability of various dependencies was assessed for determining average values of the ascent angles of the race tracks.

### **Keywords:**

precession transmission, nutation drive, spherical mechanism, roller transmission, ascent angle of the curve, reducer.

### **For citation:**

Lustenkova, E. S. Determination of ascent angles of race tracks in spherical roller transmissions / E. S. Lustenkova // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2023. – № 3 (80). – P. 57–65.