УДК 624.729.14:620.179.15

АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ КАК СПОСОБ ДОСТИЖЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗ ОГРАНИЧЕННЫХ ДАННЫХ

В. Л. ВЕНГРИНОВИЧ, С. А. ЗОЛОТАРЕВ
ГНУ «ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ НАН Беларуси»
Минск, Беларусь

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИЙ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим задачу восстановления как обратную некорректную задачу, имеющую целью решение следующего операторного уравнения:

$$p(y) = O\mu(x) + \eta\,, \tag{1}$$

где p – измеренные данные во временной или пространственной области y, o – оператор, переводящий входные данные в выходные, или один из видов аппаратной функции, заданной в линейном случае с помощью матрицы порядка $m \times n$ с вещественными элементами O_{ij}; $\mu(x)$ – вектор искомого распределения неизвестных значений и η- шум, наложенный на входные данные. Обобщенное решение (1) или, так называемое, псевдорешение, может быть получено путем решения задачи регуляризации, приводящей в простейшем случае к минимизации квадратичного функционала. Определим псевдорешение из условия:

$$J(\mu) = \inf\left\{\left\|\tilde{O}\mu(x) - p(y\right\|^2 : \mu(x) \in R^n\right\}\,, \tag{2}$$

где R^n является n-мерным нормированным пространством с элементами ($\mu_1,...,\mu_n$), а $O\tilde{\mu}(x)$ являются модельными данными, полученными на основании решения прямой задачи [1–5].

БАЙЕСОВСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Вероятностное правило для оптимальной обработки информации основано на Байесовской теореме для вычисления условной вероятности, которая записывается в виде:

$$P(\mu \mid p) = \frac{P(p \mid \mu)P(\mu)}{P(p)}\,, \tag{3}$$

где $P\left(\mu\middle|p\right)$ является апостериорным вероятностным распределением, $P\left(p\middle|\mu\right)$ – это вероятностная функция, которая формально описывает отклик измерительной системы с учетом шума, $P\left(p\right)$ представляет собой безусловную вероятность экспериментальных данных, которая рассматривается здесь как глобальная нормировочная константа, заданная с помощью правила $P\left(p\right) = \sum P\left(p \mid \mu\right)P\left(\mu\right)$, и $P\left(\mu\right)$ является априорным вероятностным распределением. Таким образом, чтобы рассчитать наиболее вероятное неизвестное решение $\mu(x)$, необходимо максимизировать выражение $P\left(\mu|p\right)$, Эта операция максимизации является эквивалентной минимизации следующего функционала:

$$\text{Min: } -\log P(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{p}) = -\log P(\mathbf{p}|\boldsymbol{\mu}) - \alpha \log P(\boldsymbol{\mu}) \,, \tag{4}$$

где шум, может быть представлен следующим образом:

$$\inf\{-\log \mathrm{P}(\mathbf{p}|\boldsymbol{\mu})\} = \inf\{\| O_j \mu_{jk} - p_k^m \|^2 : \mu_{jk} \in R^n\} \,. \tag{5}$$

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Статистический метод реконструкции изображений основан на введении априорной информации в процедуру минимизации (4). Этот метод основан на двух общих понятиях, которые исходят из статистик Больцмана и Гиббса. Первая концепция приводит в итоге к методу максимальной энтропии (МЭМ), а вторая концепция ведет к методу максимальной меры Гиббса (МГМ). В методе МЭМ энтропия может быть записана в следующей форме:

$$S(\mu) = -\sum \mu_j \log(\mu_j / M) \,. \tag{6}$$

Тогда вариационная процедура поиска решения приводит к минимизации функционала:

$$J(\boldsymbol{\mu}) = \inf\{\| O_j \mu_{jk} - p_k^m \|^2 + \alpha \sum \mu_j \log \mu_j : \mu_j \in R^n\} \,. \tag{7}$$

В отличие от предыдущего подхода, в методе МГМ мы приходим к следующей формуле, которая описывает вариационную процедуру

$$J(\boldsymbol{\mu}) = \inf\{\| O_j \mu_{jk} - p_k^m \|^2 + \alpha U(\boldsymbol{\mu}) : \mu_j \in R^n\} \,. \tag{8}$$

Недостаточная энергия рентгеновского источника вызывает размытие на рентгеновских проекциях вследствие эффектов рассеяния и ужесточения рентгеновских лучей. Рис. 1 показывает поперечное сечение трубы в области сварного шва и изображение трубы.

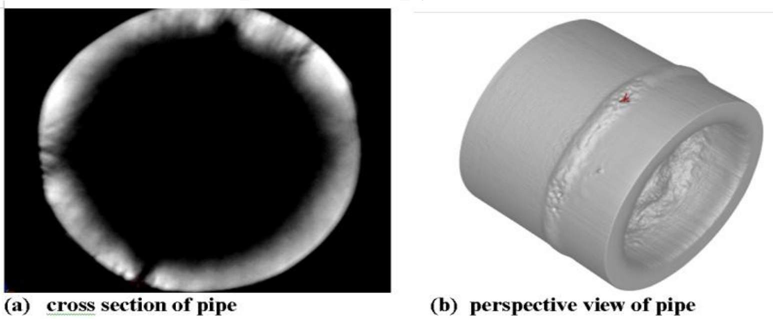

Рис 1. Поперечное сечение и перспективный вид изображения трубы

Применение Байесовского подхода и метода тотальной вариации (ТВ) [6] обеспечило оптимальное качество реконструкции (см. рис. 2).

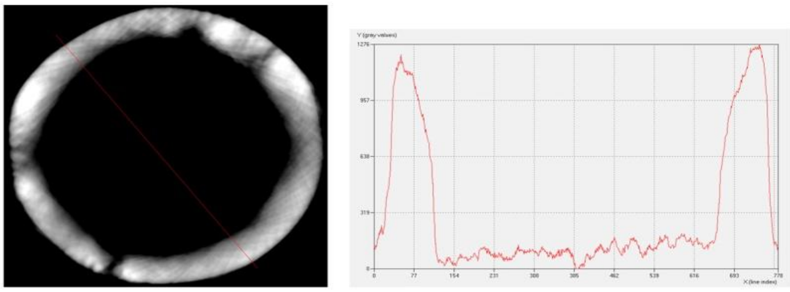

Рис. 2. Поперечное сечение изображения трубы и его профиль вдоль линии, проходящей через центр трубы. Реконструкция методом TB

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zellner, A.** Optimal Information Processing and Bayes Theorem. – Am. Stat. 42 (4) (1998). – P. 278–284.

2. **Vengrinovich, V. L**. Iteration Methods in Tomography / V. L. Vengrinovich, S. A. Zolotarev. – Belaruskaya Navuka, Minsk, 2009.

3. Multistep 3D X-ray Tomography from a Limited Number of Projections and Views, in Review of Progress in QNDE, Ed. by D.O. Tompsonand D.E. Chimenti / V. L. Vengrinovich, J. B. Denkevich, G-R. Tillack, C. Nockeman. – Plenum Press, New York, 1997,Vol. 16, P. 317–323.

4. **Vengrinovich, V. L**. Limited Projections and Views Bayesian 3D Reconstruction Using Gibbs Priors," in Proc. 7th ECNDT98 / V. L. Vengrinovich, J. B. Denkevich, G-R. Tillack. – Copenhagen, 1998, p. 2371–2378.

5. W. Von der Linden. Maximum Entropy Data Analysis," J. Appl. Phys. A 60, 155–165 (1995).

6. **Jia, R. Q**. A fast algorithm for the total variation model of image denoising / H. Q. Zhao // Adv. Comput. Math. – 33 (2010). – P. 231–241.

E-mail: venq@iaph.bas-net.by
zolotarev@iaph.bas-net.by