

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая  
эксплуатация автомобилей (по направлениям)»  
и 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2023

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
М55

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «3» апреля 2023 г.,  
протокол № 11

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;  
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. В. Благодарная

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)» и 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения. Содержат материалы к практическим занятиям.

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2023

## Содержание

Введение.....	4
1 Сложное сопротивление бруса.....	5
1.1 Косой изгиб.....	5
1.2 Совместное действие изгиба и кручения.....	7
1.3 Внецентренное растяжение (сжатие).....	12
2 Энергетические методы определения перемещений.....	16
2.1 Метод Мора (интеграл Мора) .....	16
2.2 Способ Верещагина.....	20
3 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности.....	24
4 Расчеты на прочность и жесткость при динамическом действии нагрузок.....	33
Список литературы .....	36
Приложение А.....	37
Приложение Б.....	38
Приложение В.....	40
Приложение Г.....	41
Приложение Д.....	42

## **Введение**

Цель преподавания курса «Механика материалов» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Представлены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и зачету. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.

# 1 Сложное сопротивление бруса

## 1.1 Косой изгиб

**Пример 1** – Проверить прочность стальной балки двутаврового поперечного сечения, изображенной на рисунке 1.1, а, если  $[\sigma] = 170$  МПа.

Исходные данные: двутавр № 27 ( $W_x = 371$  см<sup>3</sup>;  $W_y = 41,5$  см<sup>3</sup>).

### Решение

На основании принципа независимости действия сил рассмотрим отдельно каждую плоскость нагружения [1, 2].

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, б). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, в).

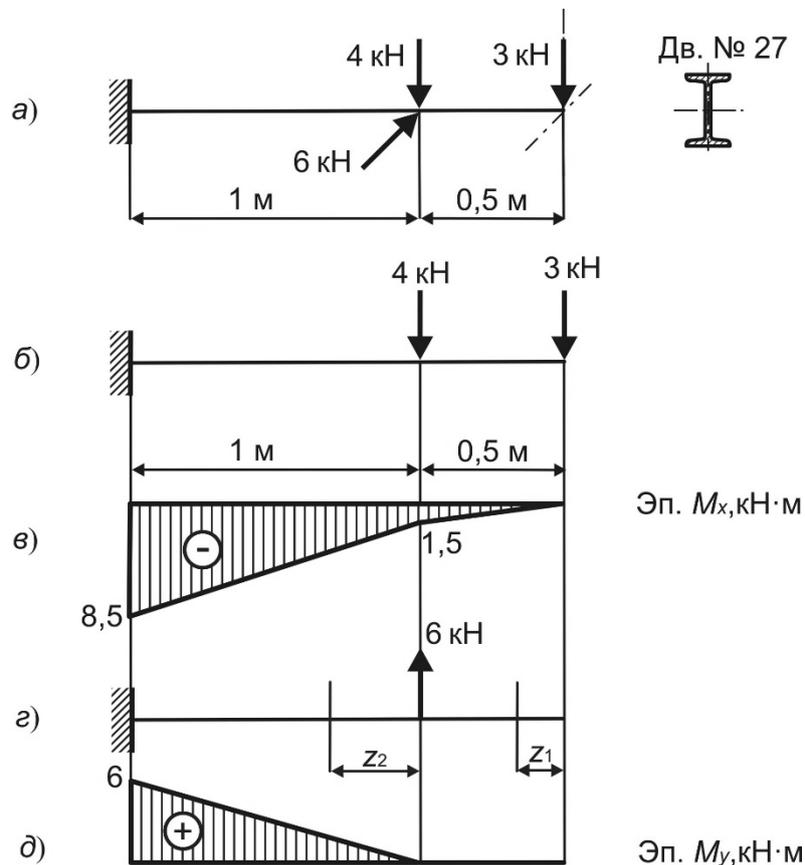


Рисунок 1.1

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, б).

Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, в).

Условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{6 \cdot 10^3}{41,5 \cdot 10^{-6}} = 167,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 170 \text{ МПа.}$$

Прочность балки обеспечена.

**Пример 2** (для самостоятельного решения) – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 1.2.

Исходные данные:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

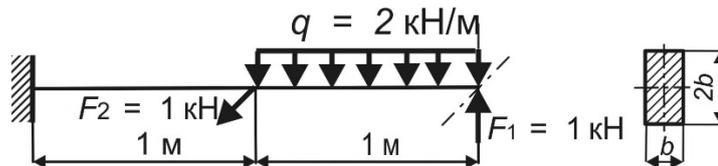


Рисунок 1.2

**Пример 3** (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на балку, изображенную на рисунке 1.3.

Исходные данные:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

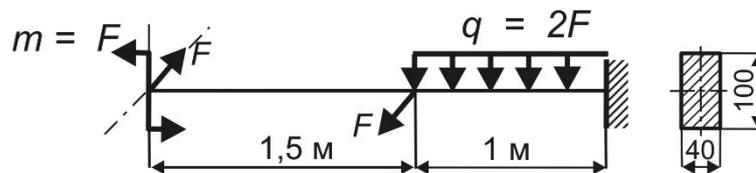


Рисунок 1.3

### Контрольные вопросы

- 1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?
- 2 Запишите формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе.
- 3 Сформулируйте условие прочности при косом изгибе.
- 4 Запишите выражение для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.
- 5 Нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения?
- 6 Как определить опасные точки опасного сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 7 Возможен ли косой изгиб балки, если осевые моменты ее поперечного сечения равны?
- 8 Как определить прогиб балки при косом изгибе?

## 1.2 Совместное действие изгиба и кручения

**Пример 4** – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 1.4, а) передает мощность  $N = 40$  кВт, вращаясь с угловой скоростью  $\omega = 100$  рад/с. На валу установлены шестерни средним диаметром  $D_1 = 0,15$  м и  $D_2 = 0,35$  м. Определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если  $[\sigma] = 70$  МПа.

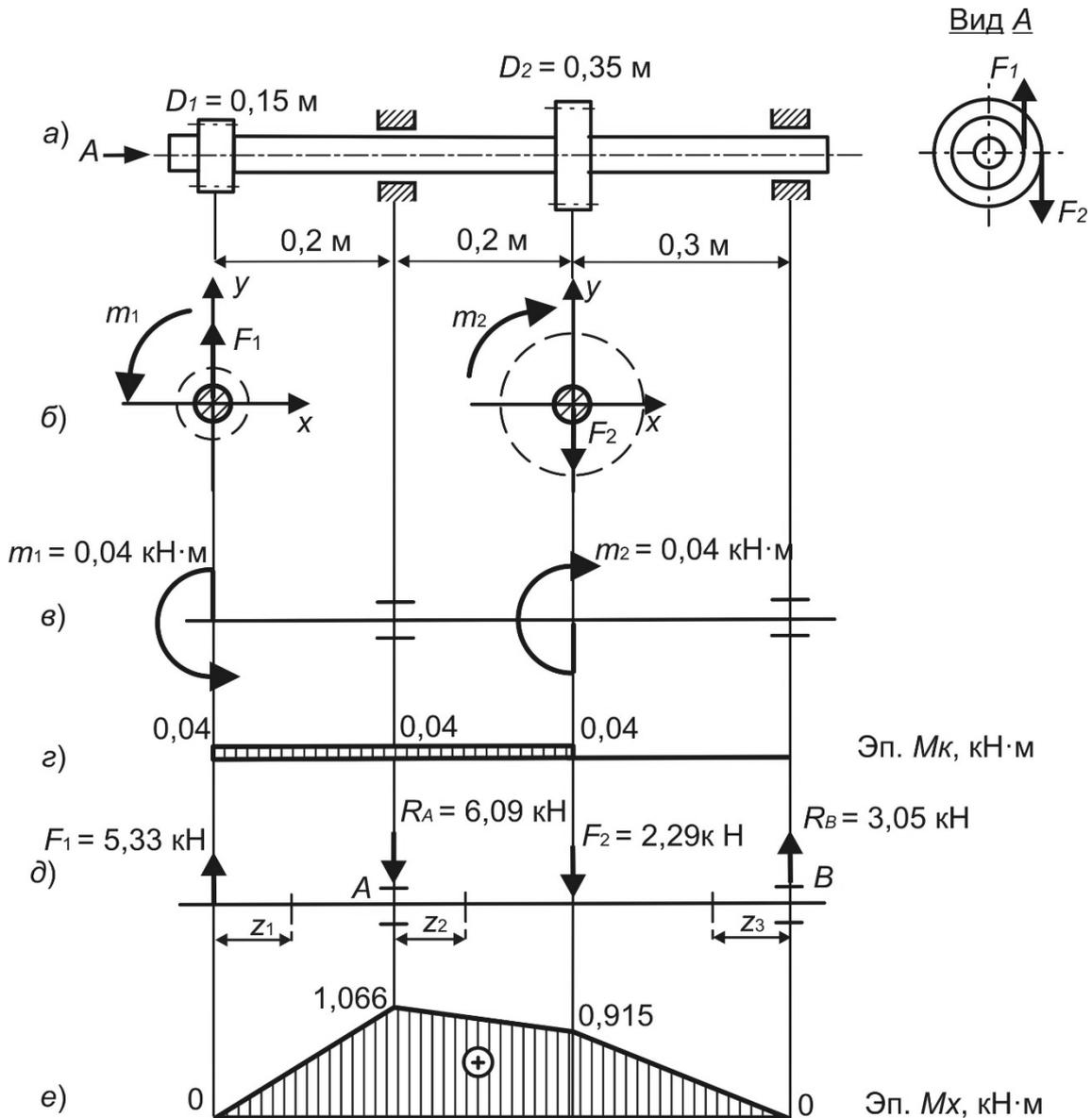


Рисунок 1.4

### Решение

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 1.4, б). Определим внешние моменты на шкиве и шестерне:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{40}{100} = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 1.4, в).

Построение эпюры крутящих моментов (рисунок 1.4, з) [1–4].

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,2$  м.  $M_K = 0,4$  кН·м.

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 0,2$  м.  $M_K = 0,4$  кН·м.

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м.  $M_K = 0,4 - 0,4 = 0$ .

Определим внешние силы, изгибающие вал со стороны шестерен:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,15} = 5,33 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,35} = 2,29 \text{ кН}.$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.4, д). Определим реакции опор:

$$\Sigma M_A = R_B \cdot 0,5 - 2,29 \cdot 0,2 - 5,33 \cdot 0,2 = 0; \quad R_B = 3,05 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = R_A \cdot 0,5 + 2,29 \cdot 0,3 - 5,33 \cdot 0,7 = 0; \quad R_A = 6,09 \text{ кН}.$$

Проверим расчет реакций:

$$\Sigma Y = F_1 - R_A - F_2 + R_B = 5,33 - 6,09 - 2,29 + 3,05 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.4, е).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,2$  м.

$$M_X = 5,33 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_X = 0;$$

$$z_1 = 0,2 \text{ м}; \quad M_X = 1,066 \text{ кН·м}.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 0,2$  м.

$$M_X = 5,33 \cdot (0,2 + z_2) - 6,09 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_X = 1,07 \text{ кН·м};$$

$$z_2 = 0,2 \text{ м}; \quad M_X = 0,915 \text{ кН·м}.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 0,1$  м.

$$M_X = 3,05 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_X = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; M_Y = 0,915 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По эпюре суммарных изгибающих моментов  $M$  и эпюре крутящих моментов  $M_K$  определим опасное сечение. В этом сечении действуют наибольший изгибающий момент  $M_X = 1,066$  кН·м и наибольший крутящий момент  $M_K = 0,4$  кН·м.

Эквивалентный момент по четвертой теории прочности в опасном сечении

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{1,066^2 + 0,75 \cdot 0,4^2} = 1,121 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,121 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,055 \text{ м} = 55 \text{ мм}.$$

**Пример 5** – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 1.5, а) передает мощность 6 кВт, вращаясь с угловой скоростью 100 рад/с. На валу установлены шкив диаметром  $D_1 = 0,15$  м и шестерня, средний диаметр которой  $D_2 = 0,1$  м. Определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если  $[\sigma] = 80$  МПа.

*Решение*

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 1.5, б). Определим внешние моменты на шкиве и шестерне [1–4]:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{6}{100} = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 1.5, в), в соответствии с которой построим эпюру крутящих моментов (рисунок 1.5, г).

Определим внешние силы, изгибающие вал со стороны шкива и шестерни:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,06}{0,15} = 2,4 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,06}{0,1} = 1,2 \text{ кН.}$$

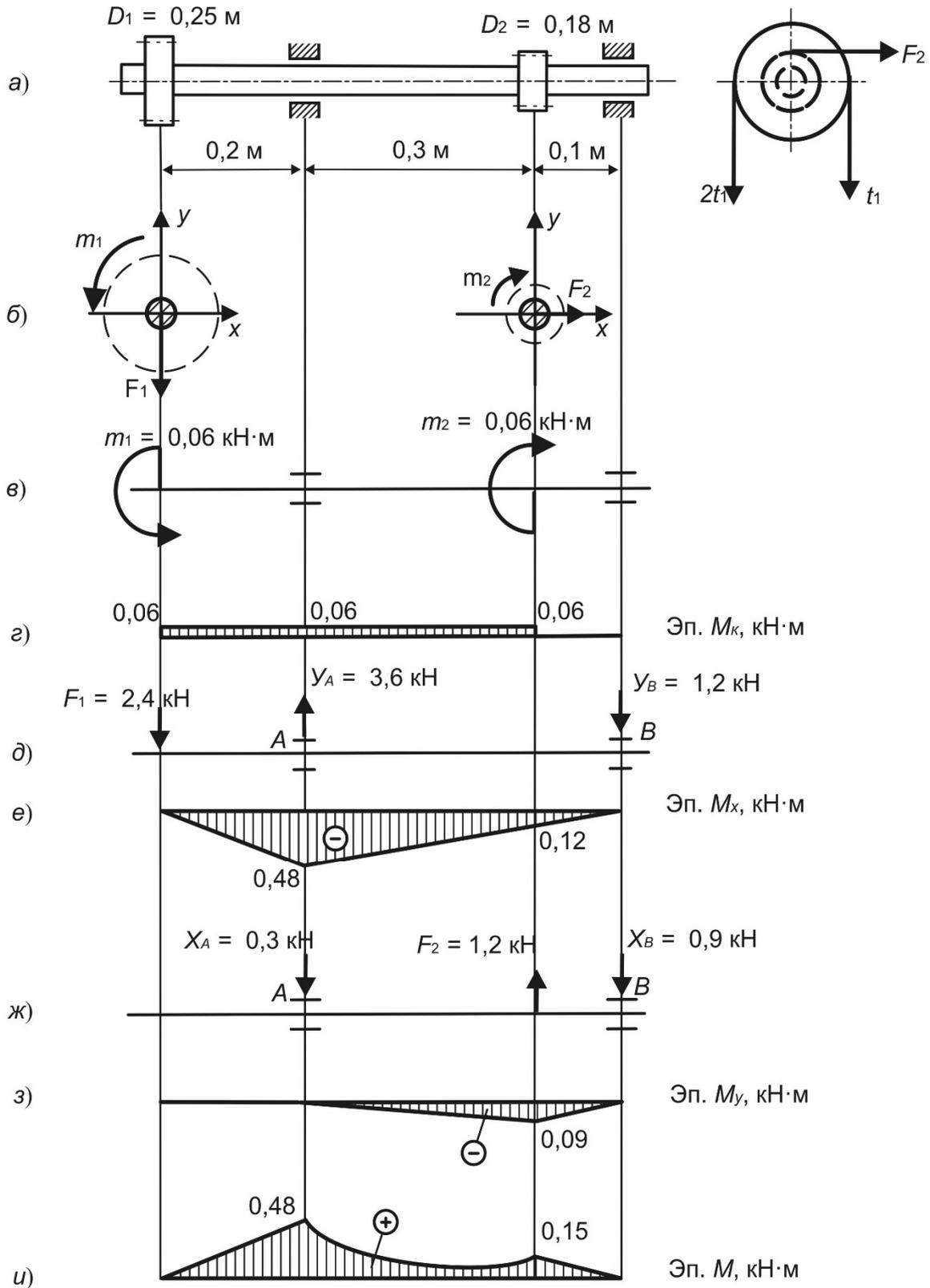


Рисунок 1.5

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.5, д). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.5, е).

Составим схему действия на вал сил в горизонтальной плоскости (рисунок 1.5, ж). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 1.5, з).

Построение эпюры суммарных изгибающих моментов (рисунок 1.5, и) в характерных сечениях вала:

$$M = 0; M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M = \sqrt{0,09^2 + 0,12^2} = 0,15 \text{ кН}\cdot\text{м}; M = 0.$$

По эпюре суммарных изгибающих моментов  $M$  и эпюре крутящих моментов  $M_K$  определим опасное сечение. В этом сечении действуют наибольший изгибающий момент  $M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и наибольший крутящий момент  $M_K = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Эквивалентный (расчетный) момент по четвертой теории прочности в опасном сечении

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{0,48^2 + 0,75 \cdot 0,06^2} = 0,483 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,483 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0395 \text{ м} = 39,5 \text{ мм}.$$

**Пример 6** (для самостоятельного решения) – Проверить прочность вала, изображенного на рисунке 1.6, по четвертой теории прочности.

Исходные данные:  $N = 40 \text{ кВт}$ ,  $\omega = 100 \text{ об/мин}$ , диаметр вала  $d = 60 \text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ .

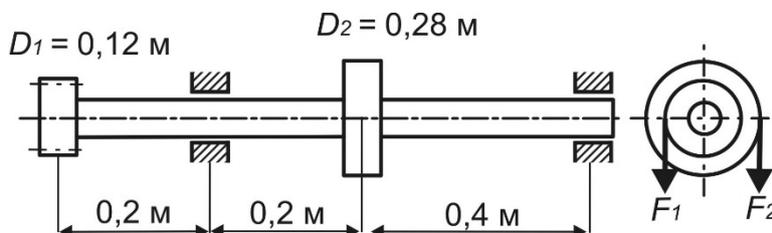


Рисунок 1.6

**Пример 7** (для самостоятельного решения) – Определить диаметр вала, изображенного на рисунке 1.7, по третьей теории прочности.

Исходные данные:  $N = 20$  кВт,  $n = 200$  об/мин,  $[\sigma] = 80$  МПа.

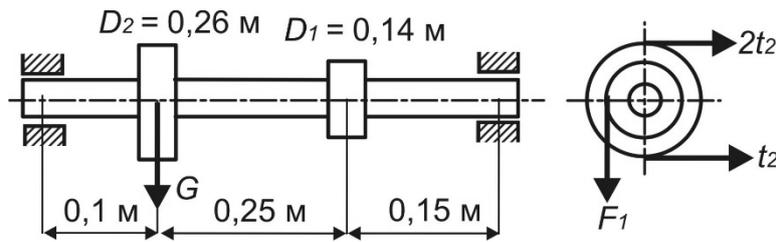


Рисунок 1.7

### Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?
- 2 Как определяется внешний момент, если известна передаваемая мощность?
- 3 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?
- 4 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны шкива?
- 5 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.
- 6 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 7 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?
- 8 Какие точки поперечного сечения вала являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?
- 9 Запишите выражения для определения эквивалентных (расчетных) напряжений по третьей и четвертой теориям прочности.
- 10 Запишите выражения для определения эквивалентного (расчетного) момента по третьей и четвертой теориям прочности.
- 11 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

### 1.3 Внецентренное растяжение (сжатие)

**Пример 8** – Проверить прочность бруса, сжатого сосредоточенной силой  $F = 120$  кН, приложенной в точке  $F$  (рисунок 1.8). Брус изготовлен из материала, для которого  $[\sigma]_{сж} = 100$  МПа,  $[\sigma]_p = 20$  МПа.

#### Решение

Составляем расчетную схему поперечного сечения (рисунок 1.9). На схеме размеры указываем в сантиметрах. Сечение имеет оси симметрии. Оси симметрии являются главными центральными осями ( $x$  и  $y$  соответственно). На пересечении их находится центр тяжести – точка  $C$  (см. рисунок 1.9). Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения.

Площадь

$$A = 15 \cdot 10 - 8 \cdot 6 = 102 \text{ см}^2.$$

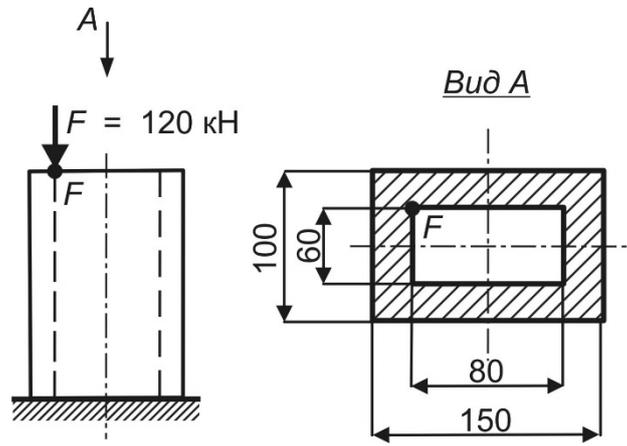


Рисунок 1.8

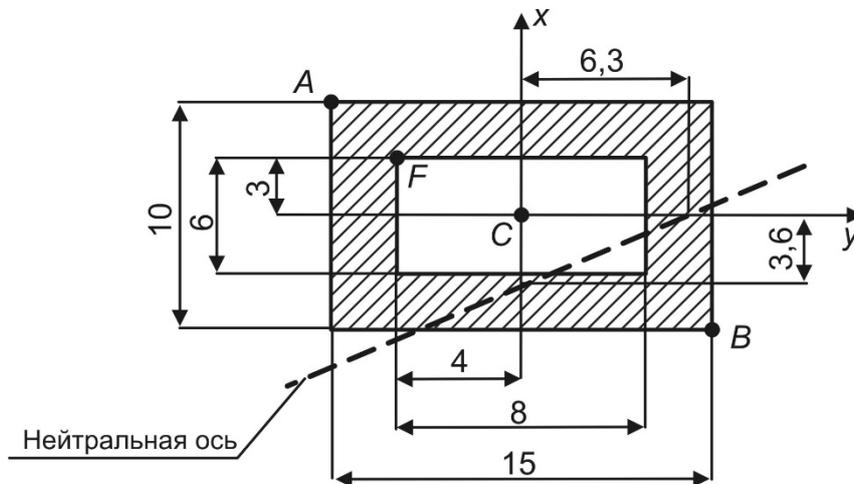


Рисунок 1.9

Главные центральные моменты инерции (таблица А.1)

$$I_x = \frac{15 \cdot 10^3}{12} - \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 1106 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{15^3 \cdot 10}{12} - \frac{8^3 \cdot 6}{12} = 2556,5 \text{ см}^4.$$

Осевые моменты сопротивления (см. таблицу А.1)

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 - 8 \cdot 6^3}{6 \cdot 10} = 221,2 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{15^3 \cdot 10 - 8^3 \cdot 6}{6 \cdot 10} = 340,9 \text{ см}^3.$$

Квадраты радиусов инерции сечения [2]

$$i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{1106}{102} = 10,84 \text{ см}^2;$$

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{2556,5}{102} = 25,06 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы относительно центра тяжести:

$$x_F = -4 \text{ см}; \quad y_F = 3 \text{ см}.$$

Внутренние силовые факторы

$$N = -120 \text{ кН}; \quad M_X = \pm F \cdot y_F = \pm 120 \cdot 0,03 = \pm 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_Y = \pm F \cdot x_F = \pm 120 \cdot 0,04 = \pm 4,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Длины отрезков, которые нейтральная ось (линия) отсекает на главных центральных осях (см. рисунок 1.9):

$$x_0 = a_x = -\frac{i_Y^2}{x_F} = -\frac{25,06}{(-4)} = 6,3 \text{ см};$$

$$y_0 = a_y = -\frac{i_X^2}{y_F} = -\frac{10,84}{3} = -3,6 \text{ см}.$$

Нейтральная ось делит сечение на растянутую и сжатую области.

Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области точка  $A$ , в растянутой области – точка  $B$  (см. рисунок 1.9).

Напряжения в опасных точках [1–4]

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = -42,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = 18,6 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на растяжение:

$$\sigma_{\max}^P \leq [\sigma]_P; \quad \sigma_{\max}^P = 18,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]_P = 20 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на сжатие:

$$\sigma_{\max}^{CЖ} \leq [\sigma]_{CЖ}; \sigma_{\max}^{CЖ} = 42,12 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{CЖ} = 100 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

**Пример 9** (для самостоятельного решения) – Бетонная колонна нагружена сжимающей силой, приложенной в точке  $F$  (рисунок 1.10). Определить допускаемую нагрузку.

Исходные данные:  $b = 60$  мм,  $h = 200$  мм,  $r = 40$  мм, материал – бетон,  $[\sigma]_p = 4$  МПа,  $[\sigma]_{CЖ} = 25$  МПа.

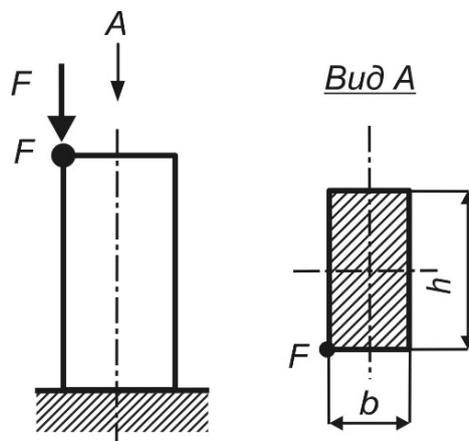


Рисунок 1.10

**Пример 10** (для самостоятельного решения) – Колонна, представленная на рисунке 1.11, нагружена и сжимается силой, приложенной в точке  $F = 150$  кН. Определить напряжения в угловых точках сечения и построить эпюру нормальных напряжений.

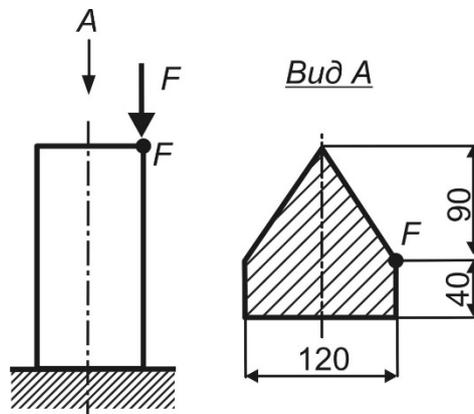


Рисунок 1.11

### Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?
- 2 Запишите выражение для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии).
- 3 Влияет ли на положение нейтральной оси величина и направление внецентренно приложенной нагрузки?
- 4 Как определить положение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)? Запишите соответствующие формулы.
- 5 Как определить опасные точки сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 6 Запишите условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии).
- 7 Что такое ядро сечения?
- 8 Запишите формулы для определения координат узловых точек ядра сечения.
- 9 Как пройдет нейтральная ось, если точка приложения силы будет находиться на границе ядра сечения?

## 2 Энергетические методы определения перемещений

### 2.1 Метод Мора (интеграл Мора)

**Пример 1** – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 2.1) определить прогиб в сечении  $C$  при помощи интеграла Мора.

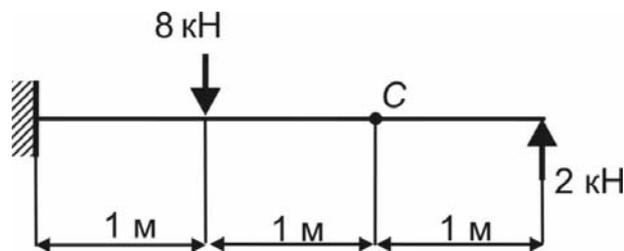


Рисунок 2.1

#### Решение

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 2.2, *а*).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–4], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 2.2, *б*). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок, но в сечении  $C$  нагружена единичной силой  $\bar{F} = 1$ . Разбиваем балку на три участка.

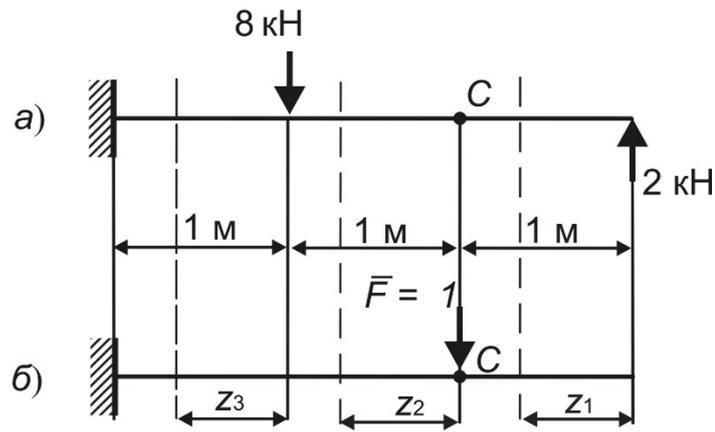


Рисунок 2.2

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от заданных нагрузок.

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot z_1.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot (1 + z_2) = 2 + 2 \cdot z_2.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot (2 + z_3) - 8 \cdot z_3 = 4 - 6 \cdot z_3.$$

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = 0.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = -1 \cdot z_2.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = -1 \cdot (1 + z_3) = -1 - z_3.$$

Запишем интеграл Мора для определения прогиба в сечении C [1–4]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI_X} dz = \frac{1}{EI_X} \left( \int_0^1 (2 + 2 \cdot z_2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4 - 6 \cdot z_3) \cdot (-1 - z_3) dz \right) = -\frac{8}{3EI}.$$

**Пример 2** – Для стальной балки (рисунок 2.3) определить угол поворота сечения  $C$  при помощи интеграла Мора.

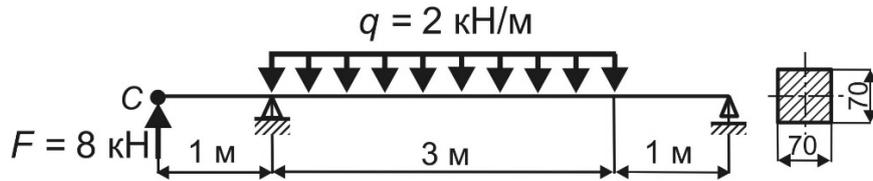


Рисунок 2.3

**Решение**

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 2.4, а).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–4], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 2.4, б). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок. В сечении  $C$  приложим единичный момент  $\bar{m} = 1$ . Разбиваем балки на три участка.

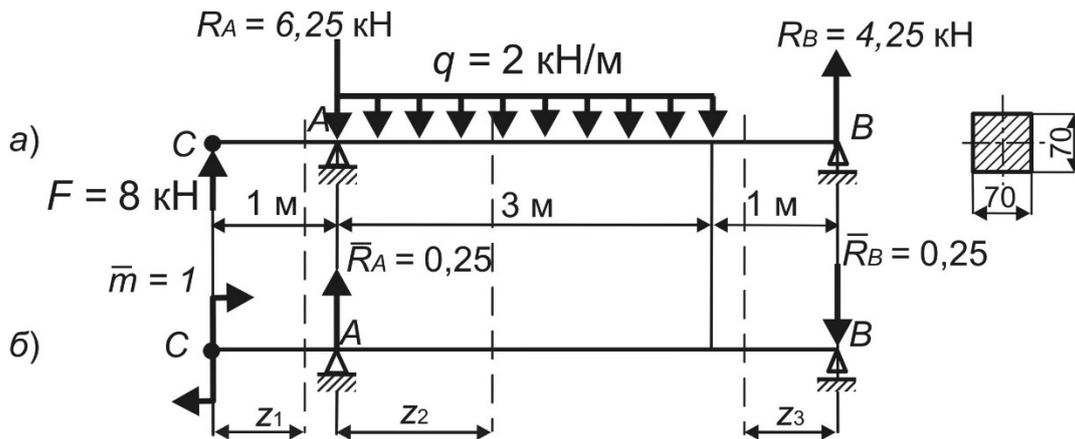


Рисунок 2.4

Запишем интеграл Мора для определения угла поворота в сечении  $C$  [1–4]:

$$\Theta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI_X} dz = \frac{1}{EI_X} \left( \int_0^1 (8 \cdot z_1) \cdot 1 dz + \int_0^3 \left( 8 \cdot (1 + z_2) - 6,25 \cdot z_2 - 2 \cdot \frac{z_2^2}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - 0,25 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4,25 \cdot z_2) \cdot (0,25 \cdot z_2) dz \right) = \frac{19,354}{EI_X}.$$

Осейвой момент инерции заданного квадратного сечения (см. таблицу А.1)

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости (таблица Б.1):  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа или  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па (приложение Д).

Окончательно

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

**Пример 3** (для самостоятельного решения) – Определить прогиб в сечении С стальной балки при помощи интеграла Мора (рисунок 2.5).

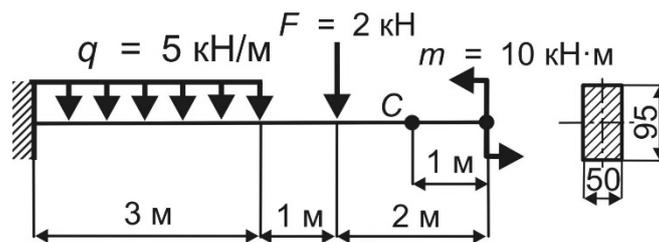


Рисунок 2.5

**Пример 4** (для самостоятельного решения) – Определить угол поворота сечения А стальной балки при помощи интеграла Мора (рисунок 2.6).

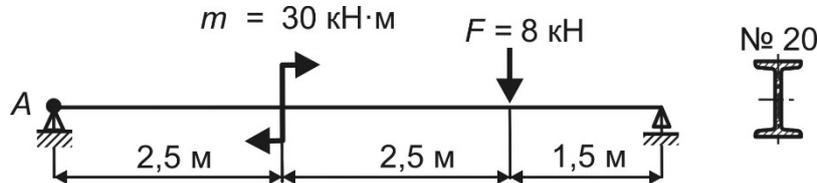


Рисунок 2.6

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения потенциальной энергии деформаций при изгибе.
- 2 Сформулируйте теоремы о взаимности работ и перемещений.
- 3 Что обозначают коэффициенты в обозначении линейных и угловых перемещений?
- 4 Запишите интеграл Мора для определения перемещений при изгибе.
- 5 Что такое грузовое (действительное) состояние системы?
- 6 Что такое единичное (фиктивное) состояние системы?
- 7 Опишите порядок определения перемещений по методу Мора.

## 2.2 Способ Верещагина

**Пример 5** – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 2.7, а) определить прогиб в сечении  $C$  способом Верещагина.

*Решение*

Рассмотрим грузовое состояние системы (см. рисунок 2.7, а). От заданных нагрузок построим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 2.7, б).

Рассмотрим единичное состояние системы (рисунок 2.7, в). От единичной силы, приложенной в сечении  $C$ , построим эпюру  $\bar{M}$  (см. рисунок 2.7, г).

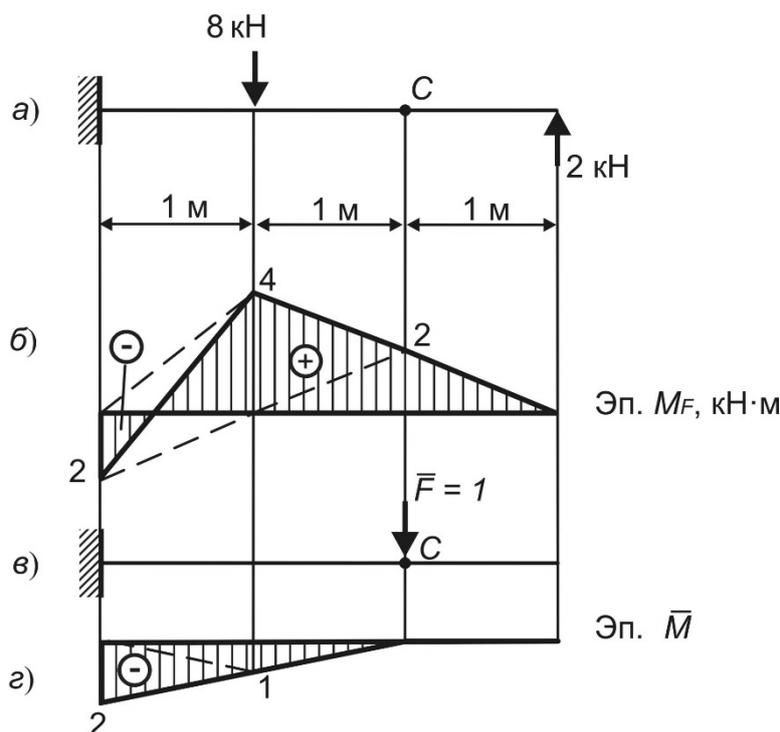


Рисунок 2.7

Определим прогиб в сечении  $C$ , перемножая единичную и грузовую эпюры [1–4]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot y_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[ \left( -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) \right] = -\frac{8}{3EI}.$$

**Пример 6** – Для заданной стальной балки (рисунок 2.8, а) определить прогиб в сечении  $C$  способом Верещагина. Сечение балки состоит из двух двутавров № 18.

Исходные данные: двутавр № 18 ( $I_{X_{об}} = 1290 \text{ см}^4$ ); модуль продольной упругости стали  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  (см. таблицу Б.1).

### Решение

Рассмотрим грузовое состояние балки (рисунок 2.8, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 2.8, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 2.8, в). От силы  $\bar{F} = 1$ , приложенной в сечении  $C$ , найдем опорные реакции и построим единичную эпюру  $\bar{M}$  (рисунок 2.8, г).

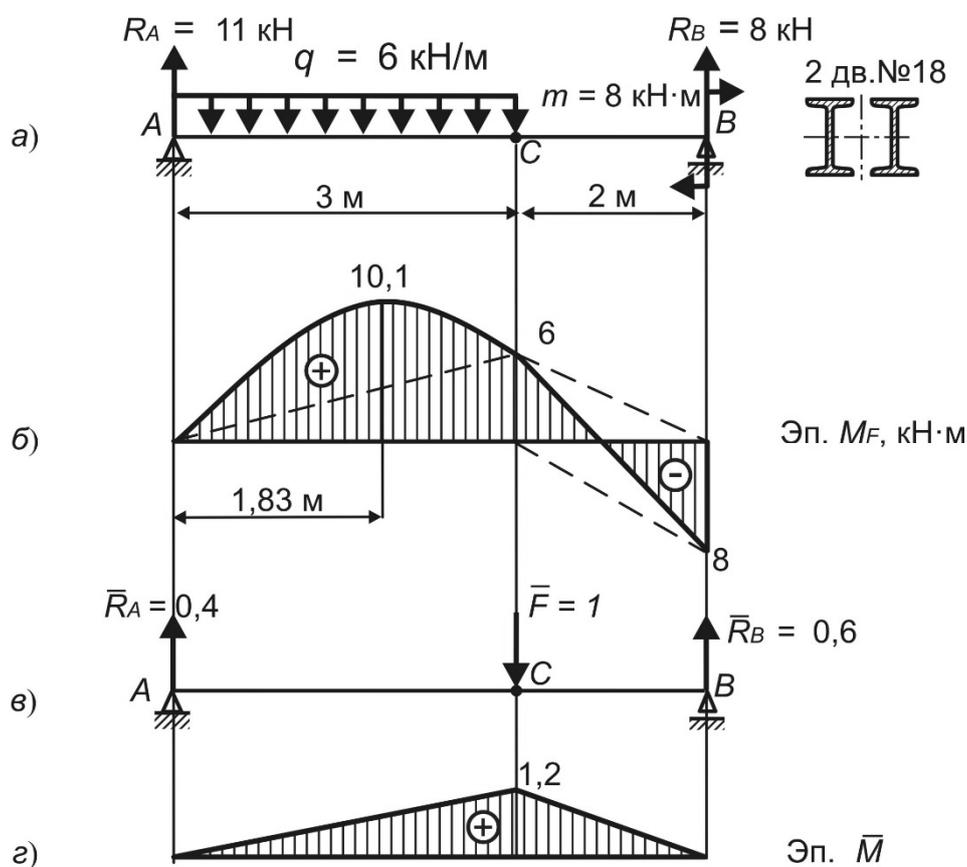


Рисунок 2.8

Определим прогиб сечения  $C$  перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{84,5}{3EI_X}.$$

Осейвой момент инерции заданного сечения

$$I_X = 2 \cdot I_{X_{ос}} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4.$$

Окончательно

$$\Delta_C = \frac{84,5}{3EI_X} = \frac{84,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2580 \cdot 10^{-8}} = 5,46 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**Пример 7** – Для заданной стальной балки (рисунок 2.9, а) определить угол поворота сечения *C* способом Верещагина.

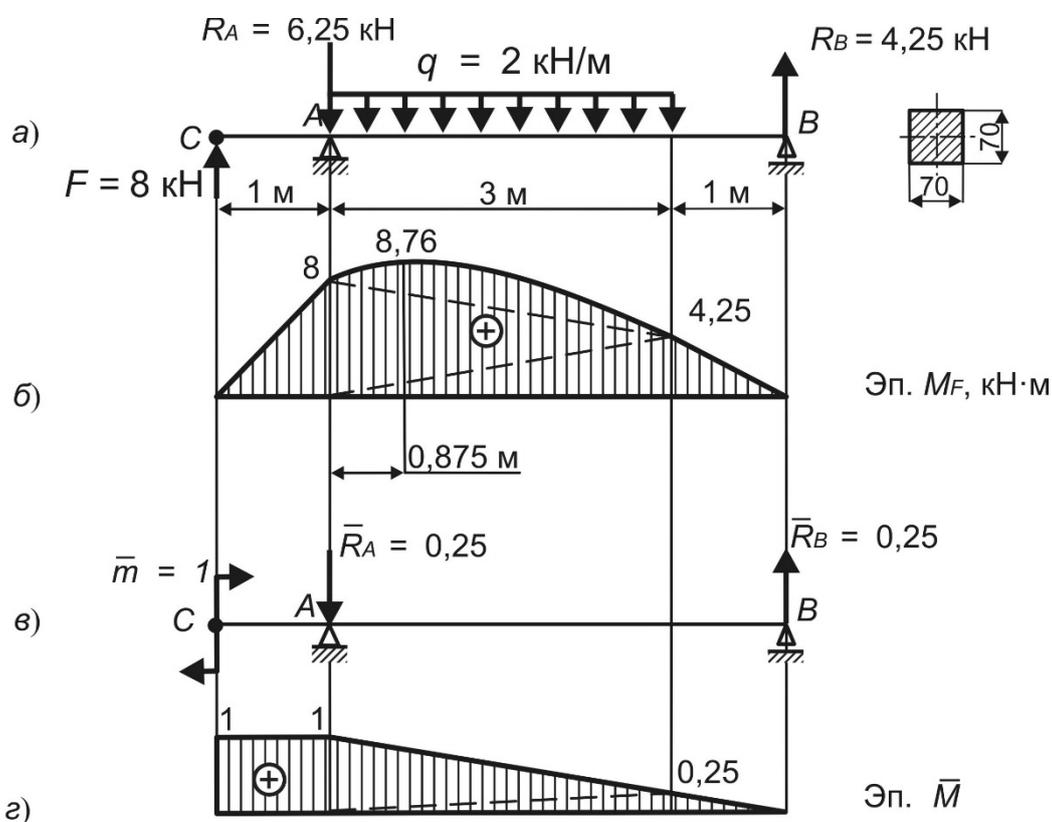


Рисунок 2.9

*Решение*

Рассмотрим грузовое состояние балки (см. рисунок 2.9, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 2.9, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 2.9, в). От момента  $\bar{m} = 1$ , приложенного в сечении *C*, найдем опорные реакции и построим единичную эпюру  $\bar{M}$  (рисунок 2.9, г).

Определим прогиб сечения *C* перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Theta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( 8 \cdot 1 \cdot 1 + \left( \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,25) \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) \right] = \frac{19,354}{E \cdot I_X}.$$

Осевой момент инерции заданного квадратного сечения (см. таблицу А.1):

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа или  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па (см. таблицу Б.1).

Окончательно

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

**Пример 8** (для самостоятельного решения) – Определить прогиб в сечении С стальной балки (рисунок 2.10).

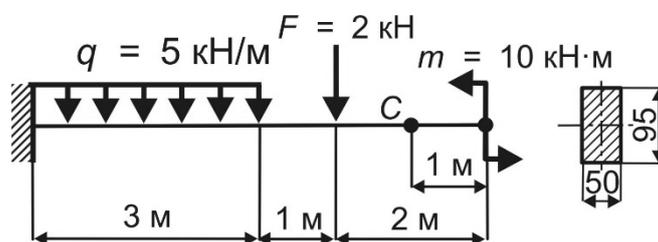


Рисунок 2.10

**Пример 9** (для самостоятельного решения) – Определить угол поворота сечения А стальной балки способом Верещагина (рисунок 2.11).

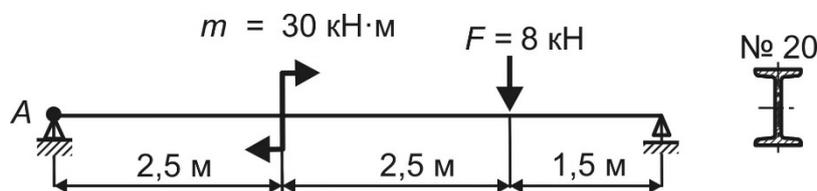


Рисунок 2.11

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения перемещений способом Верещагина.
- 2 Какие нагрузки рассматриваются при построении грузовой эпюры?

- 3 Какие нагрузки рассматриваются при построении единичной эпюры?
- 4 Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
- 5 Какие ограничения накладываются на применение способа Верещагина?
- 6 Опишите порядок определения перемещений способом Верещагина, если грузовая эпюра на участке очерчена параболой.

### 3 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности.

**Пример 1** – Для стального стержня (рисунок 3.1) определить допустимое значение сжимающей нагрузки  $[F]$ , критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

Исходные данные: материал стержня – сталь Ст3, модуль продольной упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа,  $\mu = 1$ ;  $[\sigma] = 160$  МПа (см. таблицу Б.1).

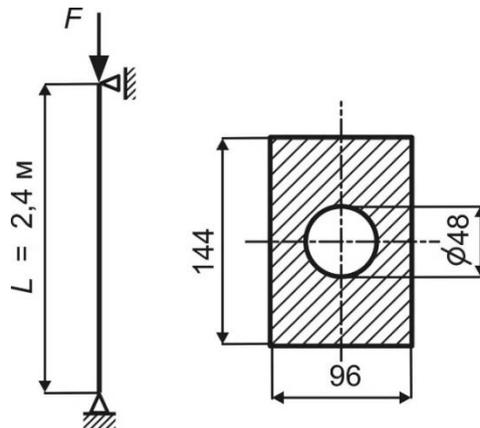


Рисунок 3.1

#### Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круг (рисунок 3.2).

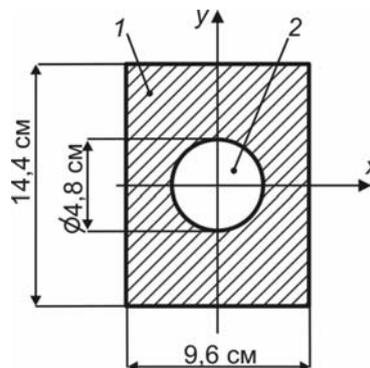


Рисунок 3.2

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [1–4]:

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_{Y_1} - I_{Y_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции  $I_{\min} = I_X = 1035,63 \text{ см}^4$ .

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см}.$$

Коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления  $\mu = 1$  (см. таблицу Г.1).

Определяем максимальную гибкость стержня относительно материальной оси  $x$

$$\lambda_x = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Коэффициент продольного изгиба (таблица В.1):

$$\begin{aligned} \lambda = 80; & \quad \varphi = 0,75; \\ \lambda = 90; & \quad \varphi = 0,69. \end{aligned}$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ( $\lambda_{пред} = 100$ ), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–4]. Параметры формулы Ясинского берем из таблицы Г.2 для заданного материала.

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 81,9) \cdot 10^2 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} = 26026,4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{26026,4 \cdot 10^2}{14224,6 \cdot 10^2} = 1,83.$$

**Пример 2** – Определить размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 3.3). Для расчетов принять допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Материал стержня – сталь Ст3.

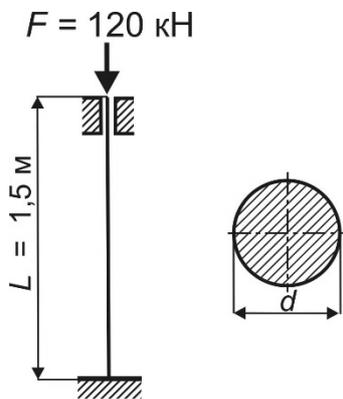


Рисунок 3.3

*Решение*

Для определения диаметра поперечного сечения стержня используем условие устойчивости [1–4]. Для данного случая оно имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq \varphi \cdot [\sigma].$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \varphi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot \varphi \cdot 160 \cdot 10^6}} = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi}}.$$

Минимальный момент инерции круглого сечения, если  $I_x = I_y$ :

$$I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Минимальный радиус инерции круглого сечения можно рассчитать по формуле

$$i_{\min} = 0,25 \cdot d.$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{0,25 \cdot d} = \frac{3}{d}.$$

Определение размеров поперечного сечения производим методом последовательных приближений [1–4].

Примем в первом приближении коэффициент продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$ . Тогда диаметр стержня

$$d_1 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_1}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,5}} = 0,043 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_1 = \frac{3}{d_1} = \frac{3}{0,043} = 69,77.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1

$$\lambda = 60; \varphi = 0,86;$$

$$\lambda = 70; \varphi = 0,81.$$

Отсюда

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (69,77 - 60) = 0,811.$$

$$\varphi_1 \neq \varphi_1'.$$

Во втором приближении коэффициент продольного изгиба определяем по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,811 + 0,5}{2} = 0,656.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_2 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_2}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,656}} = 0,038 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_2 = \frac{3}{d_2} = \frac{3}{0,038} = 78,95.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1

$$\lambda = 70; \quad \varphi = 0,81;$$

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75.$$

Отсюда

$$\varphi_2' = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{80 - 70} \cdot (78,95 - 70) = 0,756.$$

$$\varphi_2 \neq \varphi_2'.$$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,756 + 0,656}{2} = 0,706.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_3 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_3}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,706}} = 0,037 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,037} = 81.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1

$$\lambda = 80; \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \varphi = 0,69.$$

Отсюда

$$\varphi'_3 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81 - 80) = 0,744.$$

$$\varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

В четвертом приближении

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,706 + 0,744}{2} = 0,725.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_4 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_4}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,725}} = 0,036 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,036} = 83,3.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

Отсюда

$$\varphi'_4 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (83,3 - 80) = 0,73.$$

$$\varphi_4 \approx \varphi'_4.$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$\sigma_y = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,036^2} = 117,95 \text{ МПа} > 0,73 \cdot 160 = 116,8 \text{ МПа.}$$

Стержень работает с перенапряжением, которое составляет:\

$$\frac{117,95 - 116,8}{116,8} \cdot 100 \% = 1 \% < 5 \%.$$

Перенапряжение является допустимым. Диаметр стержня окончательно принимаем  $d = 0,036 \text{ м} = 36 \text{ мм}$ .

**Пример 3** – Для стального стержня (рисунок 3.4) определить допускаемое значение сжимающей нагрузки  $[F]$ , критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Исходные данные: длина стержня  $L = 2,8 \text{ м}$ ,  $c = 20 \text{ мм}$ , швеллер № 18 ( $A^{шв} = 20,7 \text{ см}^2$ ,  $I_X^{шв} = 1090 \text{ см}^4$ ,  $I_Y^{шв} = 86 \text{ см}^4$ ),  $z_0 = 1,94 \text{ см}$ , материал стержня – сталь Ст3, модуль продольной упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

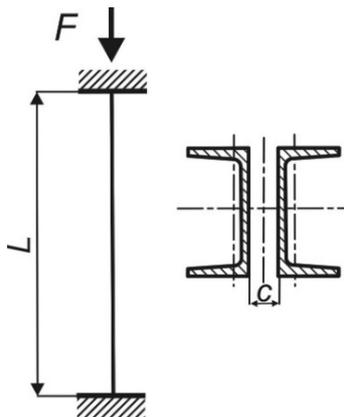


Рисунок 3.4

*Решение*

Определим геометрические характеристики заданного составного поперечного сечения, которое состоит из двух швеллеров (рисунок 3.5).

Площадь сечения

$$A = 2 \cdot A^{шв} = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции рассчитываем по формулам при параллельном переносе осей [1–4]:

$$I_x = 2 \cdot (I_X^{шв} + c^2 \cdot A^{шв}) = 2 \cdot I_X^{шв} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = 2 \cdot (I_{y^{us}} + d^2 \cdot A^{us}) = 2 \cdot (86 + 2,94^2 \cdot 20,7) = 529 \text{ см}^4.$$

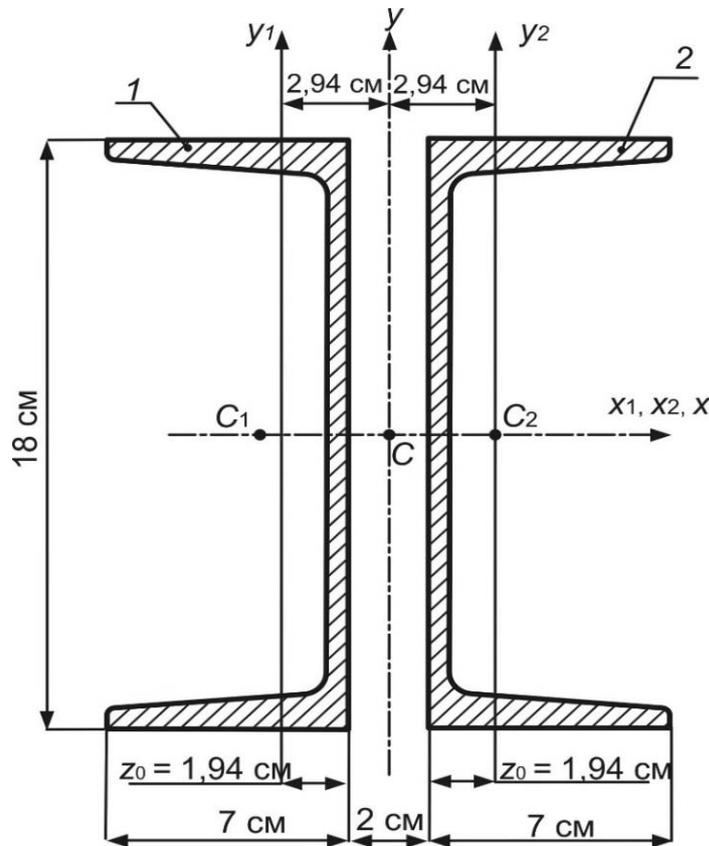


Рисунок 3.5

Радиусы инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2180}{41,4}} = 7,26 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{529}{41,4}} = 3,57 \text{ см}.$$

Рассчитываем гибкость стержня относительно материальной оси x:

$$\lambda_x = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 280}{7,26} = 19,3.$$

Определяем гибкость стержня относительно свободной оси y:

$$\lambda_y = \sqrt{\left(\frac{\mu \cdot L}{i_{\min}}\right)^2 + 40^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5 \cdot 280}{3,57}\right)^2 + 40^2} = 56,02.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1

$$\lambda = 50; \quad \varphi = 0,89;$$

$$\lambda = 60; \quad \varphi = 0,86.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{60 - 50} \cdot (56,02 - 50) = 0,87.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,87 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 576,3 \text{ кН.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ( $\lambda_{пред} = 100$ ), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–4]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 56,02) \cdot 10^6 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4} = 1019 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{1019}{576,3} = 1,77.$$

**Пример 4** (для самостоятельного решения) – Определить критическую силу для двух случаев закрепления стержня (рисунок 3.6).

Исходные данные: материал – сталь Ст3,  $b = 60$  мм,  $h = 40$  мм,  $L = 2$  м.

**Пример 5** (для самостоятельного решения) – Определить коэффициент запаса устойчивости стержня, изображенного на рисунке 3.7.

Исходные данные: материал – сталь Ст5,  $d = 60$  мм,  $L = 3$  м,  $[\sigma] = 180$  МПа.

**Пример 6** – Для стального стержня (рисунок 3.8) определить допускаемое значение сжимающей нагрузки  $[F]$ , критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

Исходные данные: длина стержня  $L = 4$  м,  $c = 100$  мм, швеллер № 10, материал стержня – сталь Ст3, модуль продольной упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

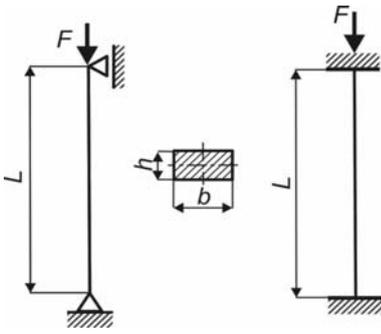


Рисунок 3.6

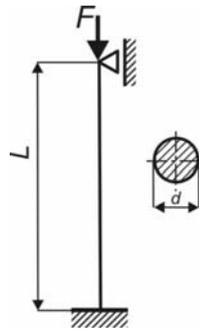


Рисунок 3.7

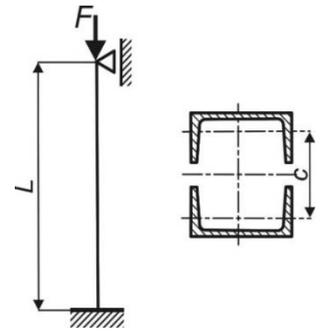


Рисунок 3.8

### Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение устойчивости.
- 2 Назовите формы равновесия.
- 3 Что является признаком потери устойчивости?
- 4 Дайте определение критической силы.
- 5 Запишите выражение для определения гибкости стержня.
- 6 Как определить коэффициент приведения длины стержня?
- 7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы.
- 8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы.
- 9 Запишите условие устойчивости.
- 10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?
- 11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.
- 12 Какая из главных центральных осей является материальной осью?
- 13 Какая из главных центральных осей является свободной осью?
- 14 Запишите формулы для определения гибкости стержня относительно свободной оси и материальной оси.

## 4 Расчеты на прочность и жесткость при динамическом действии нагрузок

**Пример 1** – На двутавровую стальную балку с высоты  $h$  падает груз  $G$  (рисунок 4.1,  $a$ ). Проверить прочность, если  $[\sigma] = 160$  МПа и определить возникающие перемещения.

Исходные данные: двутавр № 20 ( $W_x = 184$  см<sup>3</sup>,  $I_x = 1840$  см<sup>4</sup>), модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа.

### Решение

Ударная нагрузка вызывает изгиб заданной балки (см. рисунок 4.1,  $a$ ).

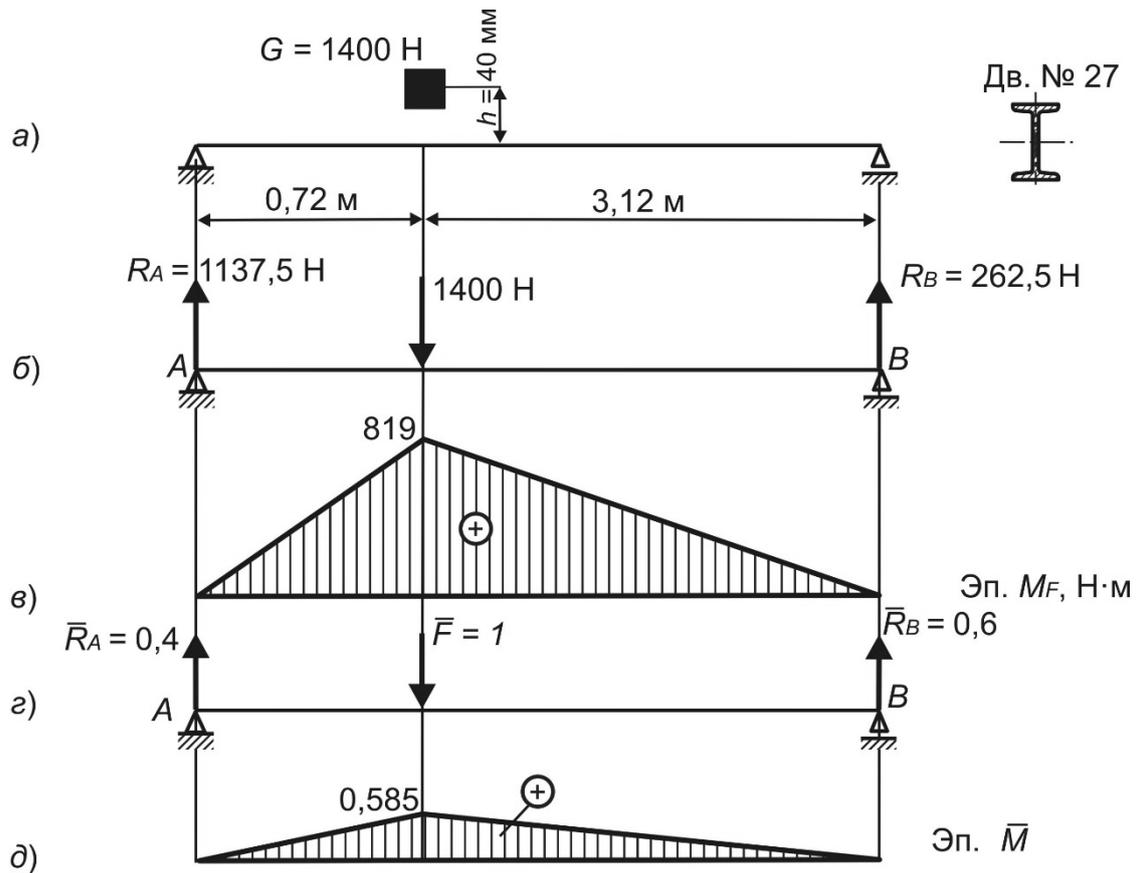


Рисунок 4.1

Прикладываем к балке груз  $G$  статически (рисунок 4.1, б). Определяем реакции опор от статической нагрузки. Строим эпюру изгибающих моментов  $M_F$  от статической нагрузки (рисунок 4.1, в). По этой эпюре определяем величину максимального изгибающего момента  $M_{\max} = 819 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Максимальные статические напряжения

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,45 \text{ МПа.}$$

Прикладываем к балке единичную силу  $\bar{F} = 1$ . Определяем реакции опор от единичной силы (рисунок 4.1, г). Строим единичную эпюру  $\bar{M}$  (см. рисунок 4.1, д).

По способу Верещагина определяем перемещение в точке удара:

$$\Delta_{cm} = \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EI_x} = \left( \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) =$$

$$= \frac{613,27}{EI_x} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м.}$$

Динамический коэффициент [1–4]

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 24.$$

Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{\max}^D = k_D \cdot \sigma_{\max}^{cm} = 24 \cdot 4,45 = 106,8 \text{ МПа.}$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max}^D = 106,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполнено. Прочность обеспечена.

Перемещение при динамическом действии нагрузок

$$\Delta_D = k_D \cdot \Delta_{cm} = 24 \cdot 0,000166 = 0,004 \text{ м.}$$

**Пример 2** (для самостоятельного решения) – Проверить прочность и определить возникающие перемещения для заданной балки (рисунок 4.2).

Исходные данные:  $v = 1,2 \text{ м/с}$ ,  $b = 85 \text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

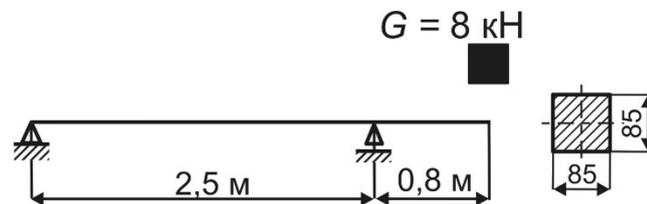


Рисунок 4.2

**Пример 3** (для самостоятельного решения) – Определить максимальные напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях бруса, изображенного на рисунке 4.3.

Исходные данные:  $G = 9 \text{ кН}$ ,  $l_1 = 1 \text{ м}$ ,  $l_2 = 2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 1,5 \text{ м}$ ,  $h = 14 \text{ мм}$ ,  $A_1 = 1 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 2 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 1,5 \text{ см}^2$ , материал – сталь Ст3.

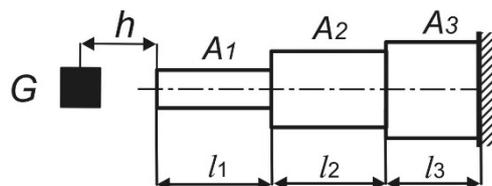


Рисунок 4.3

### ***Контрольные вопросы***

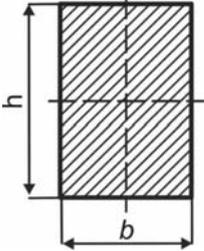
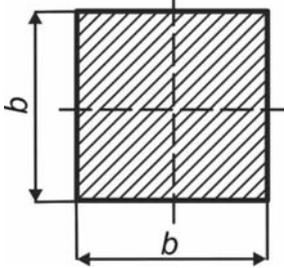
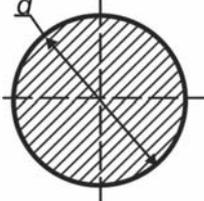
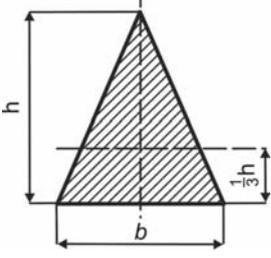
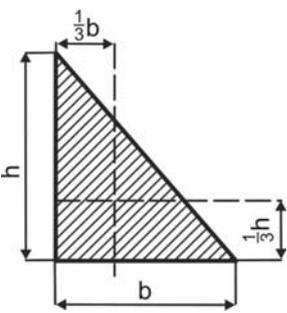
- 1 Какая нагрузка называется динамической?
- 2 Что такое динамический коэффициент?
- 3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.
- 4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.
- 5 Что такое удар?
- 6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?
- 7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.
- 8 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает изгиб бруса.
- 9 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает растяжение (сжатие) бруса.

### **Список литературы**

- 1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.
- 2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.
- 3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.
- 4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

## Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции $I_x, I_y$	Момент сопротивления $W_x, W_y$
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	$b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{x_B} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{x_H} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{x_B} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{x_H} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{y_{II}} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{y_{VI}} = \frac{b \cdot h^2}{12}$

## Приложение Б (справочное)

Таблица Б.1 – Физико-механические свойства материалов

Материал	Модуль упругости, $10^5$ МПа		Коэффициент Пуассона $\mu$	Удельный вес $\gamma$ , кН / м <sup>3</sup>
	$E$	$G$		
1	2	3	4	5
Сталь углеродистая	1,96...2,06	0,785...0,794	0,24...0,28	78,6
Сталь легированная	2,06...2,16	0,785...0,794	0,25...0,30	78,5
Стальное литье	1,75	–	0,25...0,33	78,5
Чугун серый, белый	1,13...1,57	0,44	0,23...0,27	72
Чугун ковкий	1,52	–	–	72
Латунь холоднотянутая	0,9...1,0	0,35...0,37	0,32...0,42	85
Алюминий	0,59...0,69	0,26...0,37	0,32...0,36	27
Сплавы алюминиевые	0,70...0,72	0,27	0,32	–
Дюралюминий	0,71	0,27...0,37	–	28
Медь:				
прокатанная	1,1	0,4	0,31...0,34	
холоднотянутая	1,3	0,49		
литая	0,84	–		
Бронза:				
катаная	1,15	0,42	0,32...0,35	
литая	1,05	0,42		
Гранит	0,49	–		25...28
Мрамор	0,56	–		25...28
Кирпичная кладка	0,027...0,03	–		
Бетон:				
тяжёлый	0,17...0,40		0,16...0,18	
на пористых заполнителях	0,03...0,23		0,16...0,18	20
ячеистый	0,01...0,10		0,16...0,18	
Бетон при пределе прочности, МПа				
10	0,146...0,196		0,16...0,18	20
15	0,164...0,214		0,16...0,18	
20	0,182...0,232		0,16...0,18	
Древесина (сосна, ель):				
вдоль волокон	0,01...0,12	0,055		5,5
поперёк волокон	0,005...0,01			5,5

Окончание таблицы Б.1

1	2	3	4	5
Стекло	0,56	0,22	0,25	—
Каучук	0,00008	—	0,47	9,1
Текстолит	0,06...0,1	—	—	13,5
Оргстекло	0,03...0,04	—	0,35...0,38	11,8
Капрон	0,014...0,02	—	—	11,4
Фторопласт-4	0,0047...0,0085	—	—	21...23
Стеклопласты	0,18...0,35	—	—	14...19

## Приложение В (справочное)

Таблица В.1 – Значения коэффициента продольного изгиба  $\varphi$

Гибкость $\lambda$	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	14Г2 15ГС 10Г2С 10Г2СД 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39	–	–	0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33	–	–	0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29	–	–	0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25	–	–	0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23	–	–	0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	0,19	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	0,17	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	0,15	–	–	–	0,09
200	0,19	0,15	0,13	–	–	–	0,08
210	0,17	0,14	0,12	–	–	–	–
220	0,16	0,13	0,11	–	–	–	–

## Приложение Г (справочное)

Таблица Г.1 – Значения коэффициента продольного изгиба

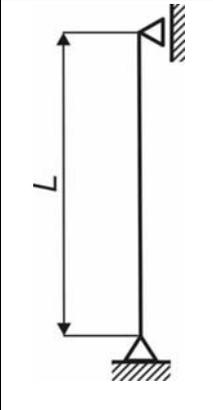
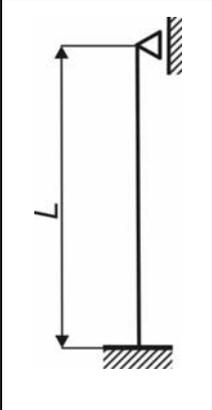
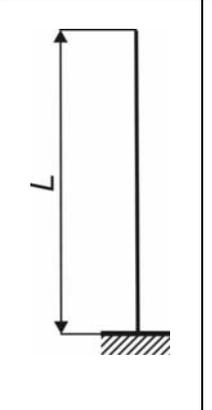
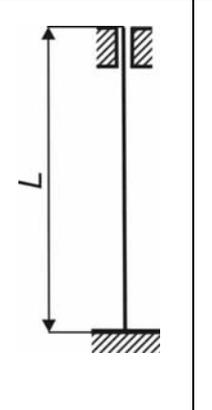
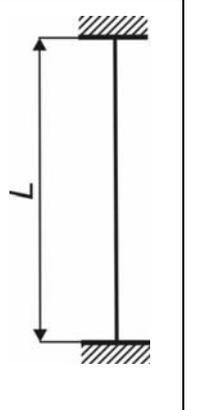
Схема закрепления					
Коэффициент приведения длины	1	0,7	2	0,5	

Таблица Г.2 – Значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{пред}$

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$c$ , МПа	$\lambda_0$	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	264	0,7	0	62	105
Сталь Ст3	310	1,14	0	40-60	100
Сталь Ст4, сталь 20	328	1,11	0	60	96
Ст5, сталь 25	350	1,15	0	57	92
Сталь 45	449	1,67	0	52	85
Сталь 14Г2	469	2,62	0	52	85
Сталь 30ХМА	1000	5,40	0	50	83
Дюралюминий Д16Т	406	2,83	0	30	53
Чугун	761	11,77	0,052	–	80
Дерево	29	0,19	0	–	70

*Примечание* –  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – параметры формулы Ясинского;  $\lambda_0$  – гибкость, при которой потеря устойчивости равноопасна потере прочности;  $\lambda_{пред}$  – предельная гибкость

## Приложение Д (рекомендуемое)

Таблица Д.1 – Обозначения и числовые значения кратных и дольных величин

Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение	Пример кратных и дольных единиц	
			Наименование	Сокращенное обозначение
Мега	$10^6$	М	Меганьютон	МН
Кило	$10^3$	к	Киловатт	кВт
Санتي	$10^{-2}$	с	Сантиметр	см
Милли	$10^{-3}$	м	Миллиметр	мм
Микро	$10^{-6}$	мк	Микрометр	мкм