

О МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА В СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет
пр. Мира 43, 212000 Могилев, Беларусь
alex-bondarev@tut.by

Рассмотрим многоточечную краевую задачу для уравнения Ляпунова вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1)$$

с условием

$$\sum_{s=1}^k M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{m \times m})$, $F \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times m})$, $I = [0, \omega]$, M_i — постоянные $(n \times n)$ -матрицы, такие, что

$$\sum_{s=1}^k M_s = 0. \quad (3)$$

Случай $k = 2$ характерен тем, что условие (2) переходит в периодическое краевое условие, если $\det K \neq 0$, где $K \equiv M_1 = -M_2$.

Примем следующие обозначения: $\Phi = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int_{t_j}^{t_k} A(\tau) d\tau$, $\gamma = \|\Phi^{-1}\|$, $\alpha = \max_t \|A(t)\|$, $\beta = \max_t \|B(t)\|$, $h = \max_t \|F(t)\|$, $m_s = \|M_s\|$ ($s = 1, 2, \dots, k-1$), $\tilde{m} = \sum_{j=1}^{k-1} m_j$,

$$q = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left\{ \frac{1}{2} \alpha (\alpha + \beta) [(t_k - t_1)^2 + (t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2] + \beta (t_k - t_j) \right\},$$

$$N = \gamma h \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left\{ \frac{1}{2} \alpha [(t_k - t_1)^2 + (t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2] + (t_k - t_j) \right\}.$$

В данной работе, являющейся продолжением [1], с помощью метода [2, гл. 3] получена и доказана следующая

Теорема. Пусть выполнено условие (3), а также условия $\det \Phi \neq 0$, $q < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначна разрешима, при этом справедлива оценка $\|X(t)\| \leq N/(1-q)$.

Разработан алгоритм построения приближенных решений $X_p(t)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). При этом получена оценка $\|\Delta_p\| \leq Tq^p \|X_1 - X_0\|_C$, $p = 1, 2, \dots$, где

$$\Delta_p = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int_{t_j}^{t_k} A(\tau) (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) d\tau, \quad T = \alpha \sum_{j=1}^{k-1} m_j (t_k - t_j).$$

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.
2. Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.