РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.Г. Замураев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

vhz@mail.by

Рассматривается задача оптимизации общего вида с нелинейным операторным уравнением состояния с непотенциальным оператором. Частный случай рассматриваемой задачи был изучен автором в работе [1], аналогичная задача с линейным операторным уравнением с B-симметричным B-положительно определенным оператором изучалась в [2].

Рассмотрим метрическое пространство C_{ad} — множество допустимых управлений и семейство гильбертовых пространств $\{H_c\}$, $c \in C_{ad}$; скалярное произведение и норму в H_c обозначим соответственно через $(\cdot,\cdot)_c$ и $||\cdot||_c$.

В каждом из пространств H_c рассмотрим нелинейный оператор N_c с плотной в H_c линейной областью $D(N_c)$, $N_c(0)=0$, имеющий на $D(N_c)$ производную Гато $N_c'(x)$, непрерывную по x, так что $(N_c'(x+ty)u,v)_c \in C_t[0,1]$ $\forall x,y,u,v \in D(N_c)$, и замыкаемый дистрибутивный оператор B_c, $D(N_c)\subset D(B_c)$, $\overline{R_{N_c}(B_c)} = \overline{\{B_c v \mid v \in D(N_c)\}} = H_c$, такие, что для любого $x \in D(N_c)$ на области $D(N_c)$ оператор $N_c'(x)$ является B_c-симметричным: $(N_c'(x)u, B_c v)_c = (N_c'(x)v, B_c u)_c$, оператор $N_c'(0)$ является B_c-положительно определенным: $(N_c'(0)v, B_c v)_c \geqslant K_{1c}||v||_c{}^2$, $(N_c'(0)v, B_c v)_c \geqslant K_{2c}||B_c v||_c{}^2$, и выполнено условие

$$(N_c'(x)v, B_c v)_c \geqslant K_{3c}(N_c'(0)v, B_c v)_c,$$

где K_{1c}, K_{2c}, K_{3c} — положительные постоянные, не зависящие от x, v.

Пусть $R(N_c)$ — множество значений оператора N_c, $f_c \in R(N_c)$. Для каждого допустимого управления c рассмотрим операторное уравнение

$$u_c \in D(N_c), \quad N_c(u_c) = f_c. \tag{1}$$

Пусть F_c — обобщенное пространство Фридрихса оператора N_c, скалярное произведение и норму в F_c обозначим через $[\cdot,\cdot]_c$ и $|\cdot|_c$, B_{0c} — расширение оператора B_c по непрерывности на всё F_c.

Потребуем, чтобы для любой слабо сходящейся в F_c последовательности элементов $u_n \in D(N_c)$ выполнялось условие $\lim_{m,n\to\infty}(N_c(u_n) - N_c(u_m), B_{0c}v)_c = 0$ для любого $v \in F_c$.

При выполнении всех приведенных выше требований оператор $N_c'(0)$ может быть расширен до замкнутого B_{0c}-симметричного B_{0c}-положительно определенного обратимого на всем пространстве H_c оператора $N_{0c}'(0)$; оператор $(N_{0c}'(0))^{-1}N_c$ может быть расширен до слабо непрерывного оператора W_c, отображающего пространство F_c на все F_c, удовлетворяющего на F_c условию $[W_c(u) - W_c(v), u-v]_c \geqslant K_{3c}{|u-v|_c}^2$ и имеющего на F_c непрерывный обратный оператор W_c^{-1}. При этом уравнение (1) равносильно вариационному уравнению

$$u_c \in F_c, \quad [W_c(u_c), v]_c = (f_c, B_{0c}v)_c \quad \forall v \in F_c, \tag{2}$$

которое имеет единственное решение $\forall f_c \in H_c$. Это решение непрерывно зависит от f_c и называется обобщённым (слабым) решением уравнения (1). (Детальное изложение вариационных принципов для нелинейных уравнений с непотенциальными операторами можно найти в монографии [3]).

Пусть u_c^0 — решение уравнения (2). Зададим функционал $J_c(v)$, $J : C_{ad} \times F_c \to R$, обозначим $j(c) \equiv J_c(u_c^0)$, $c \in C_{ad}$, и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на C_{ad} (задача (C)).

Рассмотрим гильбертово пространство F, скалярное произведение и норму в F обозначим через $[\cdot,\cdot]$ и $|\cdot|$, и предположим что для каждого допустимого управления c задано вложение пространства F_c в пространство F.

Примем следующие предположения:

1) C_{ad} — компакт;

2) существует постоянная $K_I > 0$ такая, что $|v| \leqslant K_I|v|_c$ $\forall v \in F_c$, $\forall c \in C_{ad}$;

3) из условий

$$c_n \in C_{ad}, \quad c_n \to c \in C_{ad}, \tag{3}$$

$v_n \in F_{c_n}$, $v_n \rightharpoonup \bar{v}$ (слабо в F) следует $\bar{v} \in F_c$; из условия (3) следует, что $\forall v \in F_c$ $\exists v_n \in F_{c_n}$ такой, что $v_n \to v$ (в F);

4) существует постоянная $K_W > 0$ такая, что

$$[W_c(u) - W_c(v), u - v]_c \geqslant K_W{|u-v|_c}^2$$

$\forall u, v \in F_c$, $\forall c \in C_{ad}$; из условий (3), $u_n \in F_{c_n}$, $u_n \rightharpoonup u \in F_c$,

$$v_n \in F_{c_n}, \quad v_n \to v \in F_c \tag{4}$$

следует $\lim\limits_{n\to\infty}[W_{c_n}(u_n), v_n]_{c_n} = [W_c(u), v]_c$;

5) существует постоянная $K_f > 0$ такая, что $|(f_c, B_{0c}v)_c| \leqslant K_f|v|_c$ $\forall v \in F_c$, $\forall c \in C_{ad}$; из условий (3), (4) следует $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{c_n}, B_{0c_n}v_n)_{c_n} = (f_c, B_{0c}v)_c$;

6) существует постоянная k_J такая, что $J_c(v) \geqslant k_J$ $\forall v \in F_c$, $\forall c \in C_{ad}$; из условий (3), $v_n \in F_{c_n}, v_n \rightharpoonup v \in F_c$ следует $\lim\limits_{n\to\infty}\inf J_{c_n}(v_n) \geqslant J_c(v)$.

Теорема. *При сделанных предположениях* 1)–6) *задача* (C) *имеет по крайней мере одно решение.*

Литература

1. Замураев В. Г. *О существовании оптимальных пространств для нелинейных функциональных уравнений* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 849–851.

2. Замураев В. Г. *Разрешимость задач оптимизации с B-симметричными B-положительно определенными операторами* // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 42–43.

3. Филиппов В. М. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов.* М.: Изд-во УДН, 1985.