

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С B -СИММЕТРИЧНЫМИ B -ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.Г. Замураев

Белорусско-Российский университет
Мира 43, 212000 Могилев, Беларусь
vhz@tut.by

Рассмотрим метрическое пространство C_{ad} — множество допустимых управлений и семейство гильбертовых пространств $\{H_c\}$, $c \in C_{ad}$; скалярное произведение в H_c обозначим через $(\cdot, \cdot)_c$.

В каждом из пространств H_c рассмотрим дистрибутивный оператор A_c с областью $D(A_c)$, $\overline{D(A_c)} = H_c$, и замыкаемый дистрибутивный оператор B_c , $D(A_c) \subset D(B_c)$,

$$\overline{R_{A_c}(B_c)} = \overline{\{B_c v \mid v \in D(A_c)\}} = H_c,$$

такие, что оператор A_c является B_c -симметричным и B_c -положительно определенным на $D(A_c)$ [1]. Пусть F_c — обобщенное пространство Фридрихса оператора A_c , скалярное произведение и норму в F_c обозначим через $[\cdot, \cdot]_c$ и $|\cdot|_c$, B_{0c} — расширение оператора B_c по непрерывности на все F_c .

Пусть $f_c \in H_c$, обозначим $l_c(v) \equiv (f_c, B_{0c}v)_c$. Для каждого допустимого управления c рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$u_c \in F_c, \quad [u_c, v]_c = l_c(v) \quad \forall v \in F_c. \quad (1)$$

Пусть u_c^0 — решение уравнения (1). Зададим функционал $J_c(v)$, $J : C_{ad} \times F_c \rightarrow R$, обозначим $j(c) \equiv J_c(u_c^0)$, $c \in C_{ad}$, и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на C_{ad} (задача (C)). Рассматриваемая задача является абстрактной формулировкой ряда задач построения оптимальной области [2], близкая задача была рассмотрена в [3].

Рассмотрим гильбертово пространство F , скалярное произведение и норму в F обозначим через $[\cdot, \cdot]$ и $|\cdot|$, и предположим что для каждого допустимого управления c задано вложение пространства F_c в пространство F .

Примем следующие предположения:

- 1) C_{ad} — компакт;
- 2) существует постоянная $K_I > 0$ такая, что $|v| \leq K_I |v|_c \quad \forall v \in F_c, \quad \forall c \in C_{ad}$;
- 3) из условий

$$c_n \in C_{ad}, \quad c_n \rightarrow c \in C_{ad}, \quad (2)$$

$v_n \in F_{c_n}, v_n \rightharpoonup \bar{v}$ (слабо в F) следует $\bar{v} \in F_c$; из условия (2) следует, что $\forall v \in F_c \quad \exists v_n \in F_{c_n}$ такой, что $v_n \rightarrow v$ (в F);

- 4) из условий (2), $u_n \in F_{c_n}, u_n \rightharpoonup u \in F_c$,

$$v_n \in F_{c_n}, \quad v_n \rightarrow v \in F_c \quad (3)$$

следует $\lim_{n \rightarrow \infty} [u_n, v_n]_{c_n} = [u, v]_c$;

5) существует постоянная $K_I > 0$ такая, что $|l_c(v)| \leq K_I |v|_c \quad \forall v \in F_c, \quad \forall c \in C_{ad}$; из условий (2), $v_n \in F_{c_n}, v_n \rightharpoonup v \in F_c$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{c_n}(v_n) = l_c(v)$;

6) существует постоянная k_J такая, что $J_c(v) \geq k_J \quad \forall v \in F_c, \quad \forall c \in C_{ad}$; из условий (2), (3) следует $\liminf_{n \rightarrow \infty} J_{c_n}(v_n) \geq J_c(v)$.

Теорема. При сделанных предположениях 1)–6) задача (C) имеет по крайней мере одно решение.

Литература

1. Филиппов В. М. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов*. М.: Изд-во УДН, 1985.
2. Neittaanmaki P., Sprekels J., and Tiba D. *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications*. New York, Springer Science, 2006.
3. Замураев В. Г. *Существование оптимальных пространств для уравнений с B-симметричными B-положительно определенными операторами* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тез. докладов Второй междунар. науч. конф. Минск, 2009. С. 140–141.