

Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А., Пашкевич М.Ф., Тризна В.В.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ С НАПЛАВЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Стержни прямоугольного сечения обычно наплавляют с двух или с одной стороны. При двухсторонней наплавке симметрично расположенные грани параллелепипеда можно представить с покрытиями в два слоя (рис.1). Наружный слой 3 состоит из наплавленного материала с модулем упругости E_3 . При этом процессе наплавляемый материал диффундирует в основу, за счет чего формируется еще один слой 2 с модулем упругости, величину которого можно представить в виде

$$E_2(y) = E_1 + (2|y| - h_1) \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1}. \quad (1)$$

В пределах размера h_1 сохраняется материал основы детали с модулем упругости E_1 .

Рассмотрим расчет напряжений при растяжении прямоугольного стержня с двухсторонней наплавкой. После наплавки в стержне имеют место остаточные напряжения [1].

Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А., Пашкевич М.Ф., Тризна В.В.

УО “Белорусский национальный технический университет”, пр.-т. Независимости, 65, 220050, г. Минск, Беларусь.

УО “Белорусский государственный аграрный технический университет”, пр.-т. Независимости, 99, 220013, г. Минск, Беларусь.

Однако эти напряжения здесь не учитываются, и принимается положение, что остаточные напряжения не оказывают своего влияния ни на величину, ни на характер распределения напряжений, вызываемых действием внешних сил.

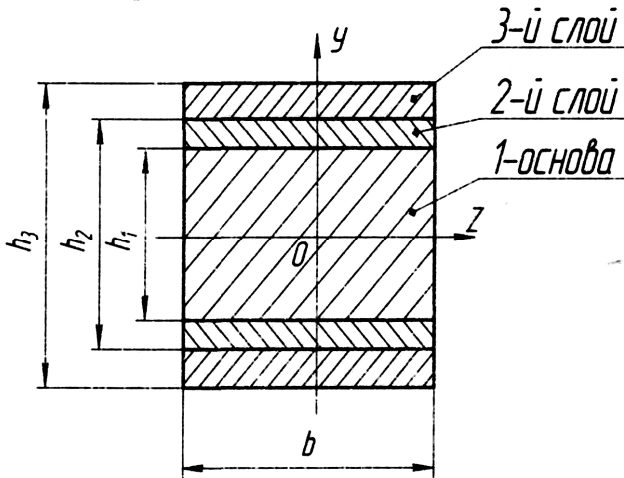


Рис. 1. Схема поперечного сечения прямоугольного стержня с двухсторонней наплавкой.

Пусть стержень, растягивается силами F , направленными по его оси (рис. 2). Так как слои в наплавленном стержне симметричны относительно центра тяжести его поперечного сечения, то упругий центр будет совпадать с геометрическим центром тяжести.

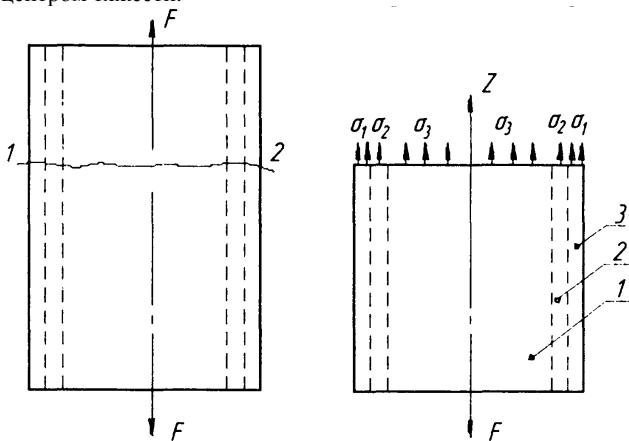


Рис. 2. Схема для определения напряжений при растяжении стержня с симметрично наплавленными поверхностями.

Проведем сечение 1-2 и рассмотрим равновесие нижней части стержня. В сечении возникают внутренние силы, которые будут измеряться напряжениями: в пределах основы напряжением σ_1 , в пределах второго слоя напряжением σ_2 , и в пределах третьего – напряжением σ_3 . Из условия равновесия отсеченной части стержня получим

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA + \int_{A_3} \sigma_3 dA = F, \quad (2)$$

где A_1, A_2, A_3 – площади основы 1 и поперечного сечения слоев 2, 3.

В соответствии с гипотезой плоских поперечных сечений, деформации всех волокон стержня будут одинаковыми, т.е. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, и тогда (закон Гука) получим [2]:

$$\sigma_1 = \epsilon_1 E_1; \quad \sigma_2 = \epsilon_2 E_2(y); \quad \sigma_3 = \epsilon_3 E_3.$$

Подставив последние соотношения в (2), найдем

$$\epsilon E_1 A_2 + \epsilon \int_{A_2} E_2(y) dA + \epsilon E_3 A_3 = F,$$

откуда

$$\epsilon = \frac{F}{E_1 A_1 + \int_{A_2} E_2(y) dA + E_3 A_3}. \quad (3)$$

Соотношение, стоящее в знаменателе (3), обозначим A_e и назовем упругой площадью:

$$A_e = E_1 A_1 + \int_{A_2} E_2(y) dA + E_3 A_3.$$

Рассмотрим интеграл $\int_{A_2} E_2(y) dA$. Подставив под интеграл $E_2(y)$ в соответствии с (1)

$$\int_{A_2} E_2(y) dA = \int_{A_2} \left[E_1 + 2|y| \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} \right] dA = E_1 A_2 - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} A_2 + \frac{2(E_3 - E_1)}{h_2 - h_1} \int_{A_2} |y| dA.$$

Определим значение $\int_{A_2} |y| dA$, учитывая, что $dA = b dy$:

$$\int_{A_2} |y| dA = 2b \int_{h_1/2}^{h_2/2} y dy = \frac{b}{4} (h_2^2 - h_1^2).$$

Тогда, после преобразований, получим для A_e :

$$A_e = E_1 A_1 + \frac{E_1 + E_2}{2} A_2 + E_3 A_3,$$

где $A_1 = bh_1$; $A_2 = b(h_2 - h_1)$; $A_3 = b(h_3 - h_2)$.

Таким образом, напряжения с двух сторон наплавленного прямоугольного стержня при его растяжении будут равны

$$\sigma_1 = \frac{F \cdot E_1}{A_e}; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_e} \left[E_1 + (2|y| - h_1) \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} \right]; \quad \sigma_3 = \frac{F \cdot E_3}{A_e}.$$

В случае, если известны допускаемые нормальные напряжения для материала основы $[\sigma_1]$, слоев $[\sigma_2]$ и $[\sigma_3]$, то можно записать условия прочности для прямоугольного стержня при его растяжении:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_1]; \quad \sigma_{2 \max} \leq [\sigma_2]; \quad \sigma_3 \leq [\sigma_3].$$

Если считать справедливой гипотезу плоских сечений, то напряжения в рассматриваемых трех слоях стержня будут

$$\text{равны: } \sigma_{(1)} = E_1 \frac{y}{\rho}; \quad \sigma_{(2)} = E(y) \frac{y}{\rho}; \quad \sigma_{(3)} = E_3 \frac{y}{\rho},$$

а сумма моментов элементарных сил σdA относительно оси X , перпендикулярной плоскости чертежа, будет равна изгибающему моменту

$$\int_{A_1} \sigma_{(1)} dA y + \int_{A_2} \sigma_{(2)} dA y + \int_{A_3} \sigma_{(3)} dA y = M.$$

Подставив в это уравнение соотношения для напряжений и $E(y)$, получим

$$\frac{1}{\rho} \left(E_1 J_{1x} + E_1 J_{2x} - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} J_{2x} + 2 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} H_{2x} + E_3 J_{3x} \right) = M,$$

$$\text{где } J_{1x} = \int_{A_1} y^2 dA_1 = \frac{bh_1^3}{12}; \quad J_{2x} = \int_{A_2} y^2 dA_2 = \frac{b}{12} (h_2^3 - h_1^3);$$

$$J_{3x} = \int_{A_3} y^2 dA_3 = \frac{b}{12} (h_3^2 - h_2^2);$$

$$H_{2x} = \int_{A_2} |y| y^2 dA_2 = 2b \int_{h_1/2}^{h_2/2} y^3 dy = \frac{b}{32} (h_2^4 - h_1^4).$$

Рассмотрим чистый изгиб двухсторонне наплавленного стержня (рис. 3).

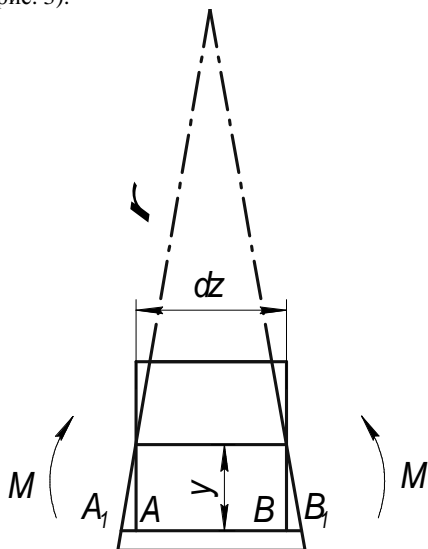


Рис. 3. Схема деформации элементарного участка стержня при изгибе

Определим кривизну стержня: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B_x}$,

где

$$B_x = E_1 J_{1x} + E_1 J_{2x} - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} J_{2x} + 2 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} H_{2x} + E_3 J_{3x}.$$

В этом случае напряжения при изгибе двухсторонне наплавленного стержня будут равны:

- в основе

$$\sigma_{(1)} = \frac{M \cdot E_1 \cdot y}{B_x},$$

- во втором слое

$$\sigma_{(2)} = \frac{M \cdot y}{B_x} \left(E_1 + (2|y| - h_1) \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} \right),$$

- в третьем слое

$$\sigma_{(3)} = \frac{M \cdot E_3 \cdot y}{B_x}.$$

Для любого из рассматриваемых вариантов наибольшие напряжения будут при $y = y_{i(max)}$:

- при $y = \frac{h_1}{2}$ $\sigma_{1(max)} = \frac{M \cdot E_1 \cdot h_1}{2B_x}$;
- при $y = \frac{h_2}{2}$ $\sigma_{2(max)} = \frac{M \cdot E_2 \cdot h_2}{2B_x}$;
- при $y = \frac{h_3}{2}$ $\sigma_{3(max)} = \frac{M \cdot E_3 \cdot h_3}{2B_x}$.

Несколько иначе определяются напряжения в стержнях прямоугольного сечения, наплавленных с одной стороны. В этом случае упругое поперечное сечение стержня будет несим-

метричным относительно горизонтальной оси (рис. 4). Поэтому упругий центр сечения не совпадает с геометрическим центром тяжести. Упругие статические моменты поперечного сечения стержня относительно главных осей, проходящих через упругий центр, должны быть равны нулю. Исходя из этого, определяют положение упругого центра сечения (рис.4).

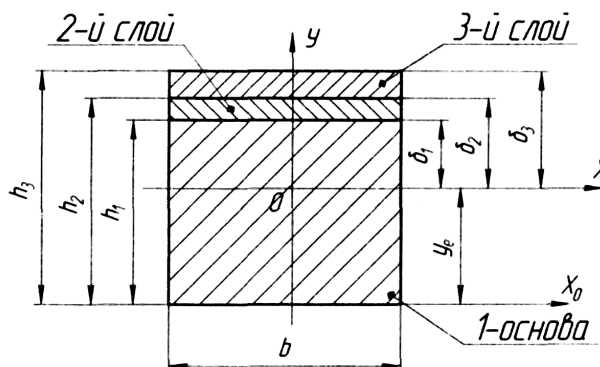


Рис. 4. Поперечное сечение прямоугольного стержня с одно-сторонней наплавкой

Выбирают ось X_0 , относительно которой определяют ординату y_e упругого центра. Слой 3 – это наплавленный слой. Слой 2 получился в результате диффузии наплавливаемого материала в материал основы, а 1 – это материал основы. Для основы и третьего слоя модули упругости E_1 и E_3 будут постоянными, а для второго слоя будет меняться вдоль оси y по линейной зависимости. Если ордината y отсчитывается от оси X_0 , то эту зависимость можно представить:

$$E(y) = E_1 + (y - h_1) \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1}.$$

Запишем упругие статические моменты C_x и C_y относительно главных упругих осей x и y . Так как ось y является осью симметрии сечения, то статический момент C_y равен нулю. Упругий статический момент относительно оси X будет равен нулю только при конкретном значении y_e . Если отсчитывать ординату y от оси X_0 , то

$$C_x = \int_{A_1} E_1 (y - y_e) dA + \int_{A_2} E(y) (y - y_e) dA + \int_{A_3} E_3 (y - y_e) dA = 0.$$

С учетом соотношения для $E(y)$ можно записать

$$C_x = \int_{A_1} E_1 (y - y_e) dA + \int_{A_2} \left[E_1 + ((y - h_1) \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1}) \right] (y - y_e) dA + \int_{A_3} E_3 (y - y_e) dA = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$E_1 S_{1(x_0)} - E_1 y_e A_1 + E_1 S_{2(x_0)} - E_1 y_e A_2 - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} S_{2(x_0)} + h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} y_e A_2 + \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} J_{2(x_0)} - \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} y_e S_{2(x_0)} + E_3 S_{3(x_0)} - E_3 y_e A_3 = 0,$$

где $A_1 = bh_1$; $A_2 = b(h_2 - h_1)$; $A_3 = b(h_3 - h_2)$;

$$S_{1(x_0)} = (bh_1^2)/2; S_{2(x_0)} = \frac{b(h_2^2 - h_1^2)}{2}; S_{3(x_0)} = \frac{b(h_3^2 - h_2^2)}{2};$$

$$J_{2(x_0)} = \frac{b(h_2^3 - h_1^3)}{3}.$$

Из полученного уравнения определяют ординату y_e упругого центра O :

$$y_e = \frac{E_1 S_1(x_0) + E_1 S_2(x_0) - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} S_2(x_0) + \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} J_{2(x_0)} + E_3 S_3(x_0)}{E_1 A_1 + E_1 A_2 - h_1 \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} A_2 + \frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1} S_{2(x_0)} + E_3 A_3}$$

Дальнейший расчет проводят относительно главных упругих осей X, Y . В этом случае зависимость модуля упругости второго слоя от y можно представить в виде

$$E_y = E_1 + (y - \delta_1) \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1}, \quad (4)$$

где δ_1 – расстояние от оси X до верхней границы основы; δ_2 – расстояние от оси X до верхней границы второго слоя (рис.4); y – переменная величина, которая может изменяться от δ_1 до δ_2 ($\delta_1 \leq y \leq \delta_2$).

Определяем напряжения при осевом растяжении однослойно наплавленных прямоугольных стержней. Осевое растяжение будет иметь место, если равнодействующая F всех внешних сил приложена в упругом центре и направлена вдоль оси стержня. В этом случае в слоях стержня будут возникать только продольные силы и соответствующие им нормальные напряжения. Являются очевидными следующие соотношения:

$$\sigma_1 = \frac{F \cdot E_1}{A_e}; \quad \sigma_2 = \frac{F \cdot E(y)}{A_e}; \quad \sigma_3 = \frac{F \cdot E_3}{A_e},$$

$$\text{где } A_e = \int_{A_1} E_1 dA + \int_{A_2} E(y) dA + \int_{A_3} E_3 dA,$$

или с учетом соотношения (3)

$$A_e = \int_{A_1} E_1 dA + \int_{A_2} \left[E_1 + (y - \delta_1) \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} \right] dA + \int_{A_3} E_3 dA.$$

Так как E_1, E_2 и $E_3 = const$, то площадь A_e можно представить в следующем виде

$$A_e = E_1 A_1 + E_1 A_2 + \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} \int y dA_2 - \delta_1 \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} A_2 + E_3 A_3,$$

Рассмотрим интеграл, входящий в последнее соотношение:

$$\int_{A_2} y dA_2 = b \int_{\delta_1}^{\delta_2} y dy = b \frac{y^2}{2} \Big|_{\delta_1}^{\delta_2} = \frac{b}{2} (\delta_2^2 - \delta_1^2).$$

Тогда получим:

$$A_e = E_1 (A_1 + A_2) + b \frac{E_3 - E_1}{2} (\delta_2 + \delta_1) - \delta_1 \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} A_2 + E_3 A_3,$$

или

$$A_e = E_1 A_1 + \frac{E_1 + E_3}{2} A_2 + E_3 A_3.$$

После определения A_e можно рассчитать напряжения в основе и слоях. Напряжения σ_1 и σ_3 будут распределены рав-

номерно по основе 1 и слою 3. Напряжение σ_2 будет изменяться линейно в зависимости от величины y (рис.4):

$$\text{при } y = \delta_1 \quad \sigma_2 = \frac{F \cdot E_1}{A_e};$$

$$\text{при } y = \delta_2 \quad \sigma_2 = \frac{F \cdot E_3}{A_e}.$$

Теперь рассмотрим изгиб однослойно наплавленных прямоугольных стержней. По аналогии с изгибом двухслойно наплавленного стержня, напряжения в поперечном сечении будут определяться:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M \cdot E_1 \cdot y}{B_x}; \quad \sigma_2 = \frac{M \cdot E(y) \cdot y}{B_x}; \quad \sigma_3 = \frac{M \cdot E_3 \cdot y}{B_x}, \quad (5)$$

где

$$B_x = \int_{A_1} E_1 y^2 dA + \int_{A_2} E(y) y^2 dA + \int_{A_3} E_3 y^2 dA.$$

Подставим в это уравнение соотношение для $E(y)$ (4) и учтем, что E_1 и E_3 являются постоянными величинами. Тогда

$$B_x = E_1 J_{1(x)} + E_1 J_{2(x)} + \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} \int y^3 dA_2 - \delta_1 \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} J_{2(x)} + E_3 J_{3(x)}.$$

Вычислим значение интеграла в последнем равенстве.

$$\int_{A_2} y^3 dA_2 = b \int_{\delta_1}^{\delta_2} y^3 dy = \frac{b}{4} (\delta_2^4 - \delta_1^4) = H_{2(x)}.$$

Следовательно, жесткость B_x можно представить формулой

$$B_x = E_1 (J_{1(x)} + J_{2(x)}) + \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} H_{2(x)} - \delta_1 \frac{E_3 - E_1}{\delta_2 - \delta_1} J_{2(x)} + E_3 J_{3(x)},$$

$$\text{где } J_{1(x)} = \int_{A_1} y^2 dA_1 = b \int_{-y_e}^{\delta_2} y^2 dy = \frac{b}{3} (\delta_1^3 - y_e^3);$$

$$J_{2(x)} = \int_{A_2} y^2 dA_2 = b \int_{\delta_1}^{\delta_2} y^2 dy = \frac{b}{3} (\delta_2^3 - \delta_1^3);$$

$$J_{3(x)} = \int_{A_3} y^2 dA_3 = b \int_{\delta_2}^{\delta_3} y^2 dy = \frac{b}{3} (\delta_3^3 - \delta_1^3).$$

Согласно (5), напряжения в основе и слое 3 будут изменяться по линейной зависимости, возрастая с увеличением ординаты y . Напряжение во втором слое не является линейной функцией. На рис. 5 показана эпюра нормальных напря-

жений при изгибе односторонне наплавленного прямоугольного стержня в предположении, что $E_1 < E_2 < E_3$.

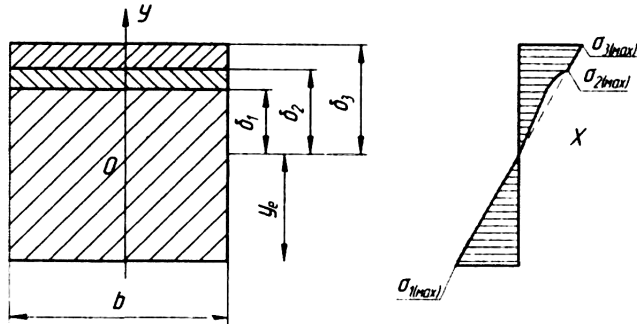


Рис. 5. Поперечное сечение и эпюра нормальных напряжений при изгибе односторонне наплавленного прямоугольного стержня.

Абсолютные значения наибольших напряжений будут:

в основе при $y = y_e$
$$\sigma_{1(\max)} = \frac{M \cdot E_1 \cdot y_e}{B_x};$$

во втором слое при $y = \delta_2$
$$\sigma_{2(\max)} = \frac{M \cdot E_2 \cdot \delta_2}{B_x};$$

в третьем слое при $y = \delta_3$
$$\sigma_{3(\max)} = \frac{M \cdot E_3 \cdot \delta_3}{B_x}.$$

Полученные зависимости для определения наибольших напряжений в основе и поверхностных слоях наплавленных призматических стержней при простейших видах нагружения (осевом растяжении и чистом изгибе) дают возможность оценить их прочность, если известны допускаемые напряжения. Несколько иначе решается задача при сложных видах нагружения, например, косом изгибе и внецентренном растяжении-сжатии. В этом случае расчет следует вести с использованием предложенной методики, дополнительно руководствуясь принципом независимости действия сил.

Результаты, представленные в настоящей статье, используются для численных решений задач при оценке прочности наплавленных призматических стержней. Ведется анализ напряженного состояния стержней при различных сочетаниях свойств наплавленного материала и материала основы, а также при различных отношениях толщин слоев.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Остаточные напряжения / Ж. А. Мрочек, С. С. Макаревич, Л. М. Кожуро и др.; под ред. С. С. Макаревича. – Мн.: Технопринт, 2003. – 317 с.
2. Биргер И. А. Сопrotивление материалов: Учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. – 560 с.