МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технология машиностроения»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» очной и заочной форм обучения

Могилев 2023

УДК 621.01
ББК 34.5
О 75

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» «22» ноября 2022 г., протокол № 6

Составитель канд. техн. наук, доц. Д. Г. Шатуров

Рецензент А. Е. Науменко

Методические рекомендации к практическим занятиям предназначены для студентов направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» очной и заочной форм обучения. Изложены методики выполнения практических работ.

Учебно-методическое издание

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ответственный за выпуск	В. М. Шеменков
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение………………………………………………………….……………… 4
1 Практическая работа № 1. Определение периодов износа, скоростей изнашивания и стойкости лезвийного инструмента………… 5
2 Практическая работа № 2. Изучение методов оценки грубых погрешностей эксперимента……………………………………………….. 10
3 Практическая работа № 3. Определение объема выборки с заданной степенью надежности……..…………………………………….. 14
4 Практическая работа № 4. Изучение методики планирования и проведения экспериментов при получении полинома первой степени………………………………………………………………………. 20
5 Практическая работа № 5. Оценка достоверности результата эксперимента по методу наименьших квадратов……………………… 31
Список литературы…………………………………………….......... 35
Приложение А…………………………………………………………… 36

Введение

Современный инженер-технолог машиностроительного предприятия в своей практической деятельности для принятия правильного решения по оценке технологического процесса вынужден проводить различные эксперименты. Эти эксперименты позволяют выбрать для каждых конкретных условий оптимальное решение по выбору режимов обработки.

При изучении данной дисциплины студенты освоят теоретические основы, приобретут знания и практические навыки по измерению различных физических величин, а также освоят методы математической обработки и статистического анализа экспериментальных данных для формирования заключения по результатам исследований.

В методических рекомендациях излагаются методики оценки и проведения статистического и регрессионного анализа экспериментальных данных технологического процесса.

1 Практическая работа № 1. Определение периодов износа, скоростей изнашивания и стойкости лезвийного инструмента

При обработке поверхностей валов на токарных станках величина их диаметральных размеров по мере перемещения резца вдоль оси обрабатываемой заготовки переменна и зависит от износа инструмента. Больше всего из поверхностей, образующих лезвия резца, изнашивается его задняя поверхность, имеющая, по сравнению с передней, в 2–4 раза большую скорость взаимного перемещения инструмента и заготовки.

Размерный износ лезвия призматического резца можно определить [7] по зависимости

$$\delta_p = h_з \cdot K_p, \tag{1.1}$$

где δ_p – величина размерного износа резца, мкм;

$h_з$ – текущая величина износа задней поверхности резца, мкм;

K_p – коэффициент перевода линейного износа задней поверхности резца в радиальный (размерный) износ лезвия.

$$K_p = \frac{\sin\varphi + \sin\varphi_1}{\sin(\varphi + \varphi_1)} \operatorname{tg}\alpha_з, \tag{1.2}$$

где φ, φ_1 – главный и вспомогательный углы в плане резца соответственно;

$\alpha_з$ – задний угол заточки резца.

Величина износа задней поверхности резца находится из следующей зависимости [7]:

$$h_з = a_c \cdot \tau^{n_0} = \frac{\delta_0}{T_0^{n_0}} \cdot \tau^{n_0}, \tag{1.3}$$

где δ_0 – оптимальная величина износа задней поверхности резца, мкм;

τ, T_0 – время резания и период стойкости резца, мкм;

n_0 – показатель степени;

a_c – коэффициент, учитывающий величину износа задней поверхности за время τ = 1 мин.

Исходя из степенной зависимости (1.3), кривые износа задней поверхности твердосплавного инструмента от времени обработки могут иметь выпуклую при n < 1,0 или вогнутую при n > 1,0 относительно оси абсцисс форму, а при n_0 = 1,0 изменение износа лезвия прямо пропорционально времени резания (рисунок 1.1) [7].

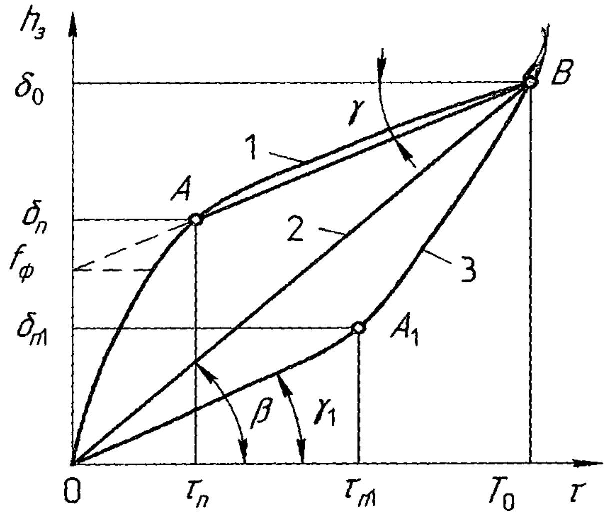

Рисунок 1.1 – Зависимости износа резца от времени резания

Текущая скорость изнашивания задней поверхности резца $V_{из}$, мкм/мин, определяется из (1.3) через производную $dh_з / d\tau$ [7]:

$$V_{из} = \frac{\delta_0}{T_0^{n_0}} \cdot n_0 \cdot \tau^{n_{0-1}}. \tag{1.4}$$

Используя зависимость (1.4), легко определяется средняя скорость изнашивания за период стойкости резца, а также величины периода приработки и установившегося (нормального) износа лезвия, величина износа лезвия и средняя скорость изнашивания за эти периоды [7].

$$V_0 = \frac{\delta_0}{T_0}; \tag{1.5}$$

$$V_1 = \frac{\delta_0}{T_0} \cdot \frac{1}{n_0} = V_0 \cdot \frac{1}{n_0}; \tag{1.6}$$

$$V_2 = \frac{\delta_0}{T_0} \cdot n^{0,6} = V_0 \cdot n^{0,6}; \tag{1.7}$$

$$\tau_п = T_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}}; \tag{1.8}$$

$$\tau_н = T_0 \cdot (1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}}) = T_0 - \tau_п; \tag{1.9}$$

$$\delta_п = \delta_0 \cdot n_0^{\frac{n_0}{1-n_0}}; \tag{1.10}$$

$$\delta_н = \delta_0 \cdot (1 - n_0^{\frac{n_0}{1-n_0}}) = \delta_0 - \delta_п, \qquad (1.11)$$

где V_1, V_2, V_3 – средние скорости изнашивания задней поверхности резца за период приработки, установившегося (нормального) износа при n_0 < 1,0 и период стойкости инструмента, мкм/мин;

$\tau_п$ – продолжительность периода приработки при n_0 < 1,0 и периода установившегося износа при n_0 > 1,0;

$\tau_н$ – продолжительность периода установившегося износа при n_0 < 1,0 и ускоренного износа лезвия при n_0 > 1,0;

$\delta_п$ – величина износа задней поверхности резца за период приработки при n_0 < 1,0 и за период установившегося износа при n_0 > 1,0;

$\delta_н$ – величина износа задней поверхности резца за период установившегося износа при n_0 < 1,0 и ускоренного износа при n_0 > 1,0.

При n_0 = 1,0 имеем равенство скоростей изнашивания за период приработки и установившегося износа, т. е. величина износа от времени резания – это прямая линия под углом 45° относительно оси абсцисс.

При n_0< 1,0 вначале имеем так называемый период приработки, а затем следует период установившегося износа лезвия. При n_0 > 1,0, наоборот, вначале имеем период установившегося износа, а затем период ускоренного износа лезвия.

Пример – В результате токарной обработки поверхности вала из стали 45 резцом Т15К6, имеющим следующие геометрические параметры: φ = 45°, φ_1 = 10°, $\alpha_з$ = 10° на режимах: глубина резания t = 1,0 мм, подача S = 0,5 мм/об, V = 115 м/мин, были получены данные по износу задней поверхности резца, которые представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Экспериментальные данные по износу задней поверхности резца (величина оптимального износа задней поверхности резца δ_0 = 500 мкм)

τ, мм	2	4	6	S = 0,5 мм/об t = 1,0 мм V = 115 м/мин K_p = 0,19
$h_з$, мкм	22	36	50	

Необходимо дать полную характеристику процесса изнашивания резца.

Расчет параметров износа будем осуществлять по алгоритму

$$n_0 \rightarrow T_0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \tau_п \rightarrow \tau_н \rightarrow \delta_п \rightarrow \delta_н.$$

1 Определяем интенсивность изнашивания лезвия, т. е. показатель степени n_0. Если построить в логарифмических координатах график зависимости

износа от времени $\lg h_з = f(\lg \tau)$, то это будет прямая, угол α наклона которой относительно оси абсцисс будет характеризовать интенсивность изнашивания лезвия n_0.

$$\operatorname{tg}\alpha = n_0 = \frac{\lg h_{зi} - \lg h_{i-1}}{\lg \tau_i - \lg \tau_{i-1}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = n_0 = \frac{\lg 50 - \lg 22}{\lg 6 - \lg 2} = 0{,}747 \approx 0{,}75.$$

2 Определяем период стойкости резца T_0. Величина оптимального (допустимого) износа $\delta_0 = 500$ мкм.

$$\lg T_0 = \frac{\lg \delta_0 - (\lg h_{зi} - n_0 \lg \tau_i)}{n_0} = \frac{\lg \delta_0 - \lg h_{зi}}{n_0} + \lg \tau_i;$$

$$\lg T_0 = \frac{\lg 500 - \lg 22}{0{,}75} + \lg 2 = 2{,}1097.$$

Откуда $T_0 = 10^{2{,}1097} = 128{,}7 \approx 128$ мин.

3 Определяем средние скорости изнашивания задней поверхности резца за периоды изнашивания, используя зависимости (1.5)–(1.7):

$$V_0 = \frac{\delta_0}{T_0} = \frac{500}{128} = 3{,}9 \text{ мкм/мин};$$

$$V_1 = V_0 \cdot \frac{1}{n_0} = \frac{3{,}9}{0{,}75} = 5{,}2 \text{ мкм/мин};$$

$$V_2 = V_0 \cdot n_0^{0{,}6} = 3{,}9 \cdot 0{,}75^{0{,}6} = 3{,}28 \text{ мкм/мин}.$$

4 Определяем время приработки и установившегося износа задней поверхности резца, используя зависимости (1.8) и (1.9):

$$\tau_п = T_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}} = 128 \cdot 0{,}75^{\frac{1}{0{,}25}} = 40{,}5 \text{ мин};$$

$$\tau_н = T_0 \cdot (1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}}) = 128(1 - 0{,}75^{\frac{1}{0{,}25}}) = \tau_0 - \tau_п = 87{,}5 \text{ мин}.$$

5 Определяем величину износа задней поверхности резца и величину размерного износа лезвия за время приработки и установившегося износа,

используя зависимости в следующем порядке: (1.10), (1.11) и (1.1).

$$\delta_n = \delta_0 \cdot n_0^{\frac{n_0}{1-n_0}} = 500 \cdot 0,75^{\frac{0,75}{0,25}} = 211 \text{ мкм};$$

$$\delta_н = \delta_0 \cdot (1 - n_0^{\frac{n_0}{1-n_0}}) = 500(1 - 0,75^{\frac{0,75}{0,25}}) = \delta_0 - \delta_n = 289 \text{ мкм};$$

$$\delta_{pn} = \delta_n \cdot K_p = 211 \cdot 0,19 = 41 \text{ мкм};$$

$$\delta_{pн} = \delta_н \cdot K_p = 289 \cdot 0,19 = 55 \text{ мкм};$$

$$\delta_p = \delta_0 \cdot K_p = 500 \cdot 0,19 = 95 \text{ мкм}.$$

Таким образом, за период приработки, это примерно 32 % от периода стойкости, размерный износ лезвия составляет 43 % от допустимого. Для повышения точности обработки за время приработки лезвия необходима дополнительная поднастройка резца на размер. Например, поднастройка резца на размер при τ = 20 мин от начала обработки обеспечит повышение точности на 21 %.

Задание

Осуществить анализ работы призматического резца Т15К6 на режимах: глубина резания t = 1,0 мм, подача S = 0,5 мм/об при различных скоростях резания (таблица 1.2) резцом с геометрическими параметрами: $\varphi = 45°$, $\varphi_1 = 10°$, $\alpha_з = 10°$. Оптимальный износ δ_0 = 500 мкм. По результатам расчета построить график $T_0 = f(V)$.

Таблица 1.2 – Значения экспериментальных данных по изнашиванию задней поверхности резца (t = 1,0 мм; подача S = 0,5 мм/об)

Номер опыта	Параметр	τ, мин					V, м/мин	T_0	n_0
		1	2	4	6	10			
1	$h_з$, мкм	69	92	124	147	–	105		
2		–	6,5	13	19	–	122		
3		–	0,44	1,3	2,5	5,5	140		
4		–	0,32	1,0	2,0	4,5	148		
5		–	9,0	18,5	28	–	175		
6		88	119	160	190	–	200		
7		229	266	310	340	–	220		

Контрольные вопросы

1 Каковы причины износа рабочих поверхностей резца? Какая поверхность больше изнашивается и почему?

2 Что характеризуют собой коэффициенты n_0 и K_p?

3 Как меняются периоды работы резца от коэффициента n_0?

2 Практическая работа № 2. Изучение методов оценки грубых погрешностей эксперимента

Различают несколько видов ошибок измерения или погрешностей: грубые, систематические и случайные.

Оценка грубых погрешностей эксперимента.

При проведении анализа технологических процессов (ТП) встречаются случаи, когда в результате эксперимента вкрадывается грубая погрешность измерения.

Грубая погрешность измерения может возникать в результате ошибки при измерении деталей, неправильного базирования заготовки, резких толчков или ударов при измерении и, особенно, в тех случаях, когда предмет исследования имеет разброс механических характеристик (например, твердости).

Если же такой уверенности нет, то для определения того, являются ли резко выделяющиеся измерения результатом грубой ошибки или случайного отклонения, используются следующие методы обнаружения грубых погрешностей эксперимента.

Метод Грэббса. Предварительно по опытным данным эксперимента вычисляют характеристики: среднее арифметическое значение $\overline{X}$ и среднее квадратическое отклонение S.

Величину $\overline{X}$, которая считается наиболее вероятным значением измеряемой величины, находят по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (2.1)$$

где x_i – измеряемые значения;

n – число повторных измерений (опытов).

Среднеквадратичное отклонение σ определяется из формулы

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 , \qquad (2.2)$$

где σ^2 – дисперсия измерений;

S – среднее квадратическое отклонение (рассеяние погрешностей).

В качестве оценки среднеквадратичного отклонения σ используется рассеяние S.

Затем определяют величину квантиля по формуле

$$t_k = \frac{\left|\left(x_i' - \bar{x}\right)\right|}{S}, \qquad (2.3)$$

где x_i' – резко выделяющееся (наибольшее или наименьшее) значение.

Задавшись процентом риска P, при котором грубая ошибка может быть принята за случайную (при технологических исследованиях чаще всего P = 5 %), по таблице 2.1 в зависимости от объема выборки n находят критическое значение t_k', которое сравнивают с ранее вычисленным значением t_k по формуле (2.3).

Таблица 2.1 – Критическое значение t_k' при P = 5 %

n	5	10	15	20	25	30	35	40	50	75	100
t_k'	2,353	2,445	2,528	2,62	2,717	2,792	2,839	2,904	2,956	3,102	3,187

Если $t_k' \le t_k$, то резко выделяющееся значение нужно отбросить из опытных данных. После исключения грубой ошибки из опытных данных следует снова рассчитать уточненные характеристики распределения $\bar{x}$ и S.

Метод Ирвина. Как и в предыдущем методе, по данным выборки определяют характеристики $\bar{x}$ и S. Все опытные данные выборки располагают в возрастающем или убывающем порядке. Из полученного ряда выбирают два наибольших значения случайной величины x_n и x_{n+1} и вычисляют величину

$$\lambda_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{S}. \qquad (2.4)$$

По таблице 2.2 в зависимости от объема выборки n при уровне зависимости $\alpha = 0{,}95$ находят критическое значение $\lambda_{0,95}$.

Таблица 2.2 – Критерий Ирвина $\lambda_{0,95}$

n	5	10	15	20	30	50	100	400	1000
$\lambda_{0,95}$	1,45	1,4	1,35	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Если $\lambda_n \le \lambda_{0,95}$, то оцениваемый результат является случайным отклонением и отбрасывать его нельзя. Если же $\lambda_n > \lambda_{0,95}$, то наибольшее или наименьшее значение x_{n+1} может быть отброшено. В этом случае после исключения грубой ошибки необходимо снова вычислить характеристику распределения $\bar{x}$ и S.

Метод Романовского. При этом методе на основе полученных опытных данных измерений вычисляют характеристики $\bar{x}$ и S, предварительно исключив из них резко выделяющееся значение x_i'.

Затем определяют величину t_β по формуле

$$t_\beta = \frac{\left|x_i' - \bar{x}\right|}{S}. \tag{2.5}$$

Допустимые значения t_β приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Допустимые значения t_β' при уровне значимости $P = 0{,}05$

n	5	10	15	20	25	30	40	50	120
t_β'	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10	2,08	2,05	2,02	1,99

Если $t_\beta \le t_\beta'$, то x_i' является случайным отклонением и его отбрасывать нельзя. Если же $t_\beta > t_\beta'$, то резко выделяющееся значение t_t' является грубой ошибкой и должно быть исключено из выборки.

При использовании данного метода после исключения из выборки резко выделяющихся значений отсутствует необходимость повторного пересчета характеристик $\bar{x}$ и S.

Пример – При шлифовании поршневых колец по торцу при объеме экспериментов (выборки), равном 50 колец, получены следующие характеристики: $\bar{x} = 3{,}23$ мм; $S = 0{,}0285$ мм. При расположении данных измерения колец в возрастающем порядке первые два числа полученного ряда соответственно $x_1 = 3{,}11$ мм, $x_2 = 3{,}17$ мм. Возникло подозрение, что размер $x_1 = 3{,}11$ мм является грубой ошибкой. Можно ли исключить этот результат из дальнейшей обработки?

Оценку резко выделяющегося значения проведем вышеперечисленными методами.

Метод Грэббса. Определяем квантиль t_k по формуле (2.3):

$$t_k = \frac{\left|3{,}11 - 3{,}23\right|}{0{,}0285} \cong 4{,}2.$$

По таблице 2.1 в зависимости от $n = 50$ находим, что значение $t_k' = 2{,}956$. Так как $t_k' < t_k$, то значение $x_1 = 3{,}11$ мм можно считать грубым выбросом и его можно исключить из выборки. Уточнение характеристики выборки (без учета значения $x_1 = 3{,}11$ мм) составляет $\overline{x}_1 = 3{,}234$ мм, $S_1 = 0{,}0241$ мм. Оценим этим же методом значение случайной величины $x_2 = 3{,}17$ мм.

$$t_k = \frac{|3{,}17 - 3{,}234|}{0{,}0241} \cong 2{,}66;$$

$$t'_k = 2{,}956;$$

$$2{,}66 < 2{,}956.$$

Так как $t'_k > t_k$, то значение $x_2 = 3{,}17$ мм является случайным и его исключать из выборки нельзя.

Метод Ирвина. Величину λ_n определяем по формуле (2.4):

$$\lambda_n = \frac{3{,}17 - 3{,}11}{0{,}0285} \cong 2{,}1 \; .$$

По таблице 2.2 в зависимости от $n = 50$ находим, что критерий Ирвина $\lambda_{0,95} = 1{,}1$. Так как $\lambda_n > \lambda_{0,95}$, то значение $x_1 = 3{,}11$ мм может быть исключено.

Метод Романовского. Величину t_β определяем по формуле (2.5):

$$t_\beta = \frac{|3{,}11 - 3{,}232|}{0{,}0241} \cong 5{,}06 \; .$$

По таблице 2.3 в зависимости от $n = 50$ находим, что значение $t'_\beta = 2{,}02$. Так как $t_\beta > t'_\beta$, то резко выделяющееся значение $x_1 = 3{,}11$ мм является грубой ошибкой и может быть исключено из выборки.

Задание

Осуществляется заточка переднего угла γ призматического резца на универсально заточном станке мод. 3Д642Е алмазным кругом формы А2ПП диаметром 80 мм зернистостью 125/100.

Резцы устанавливаются в приспособлении, смонтированном на столе заточного станка. При обработке опытных данных выборки заточенных резцов объемом $n = 20$ шт. получили следующие характеристики выборки по углам заточки: $\overline{\gamma} = \overline{x} = 8^\circ$, $S = 2{,}1^\circ$. При расположении данных измерения передних углов в возрастающем порядке первые два числа полученного ряда передних углов $\gamma_1 = 2^\circ$ и $\gamma_2 = 4^\circ$.

Определить, являются ли значения углов $\gamma_1 = 2°$ и $\gamma_2 = 4°$ грубой ошибкой, возникшей в результате неправильной установки резцов в приспособлении, или это случайная погрешность рассеяния, обусловленная технологическим процессом заточки. После исключения минимального значения угла $\gamma = 2°$ среднее квадратическое отклонение составило $S = 1{,}99°$. Оценку двух крайних значений углов провести вышеописанными тремя методами.

Контрольные вопросы

1 Какие методы оценки грубых погрешностей Вы знаете?

2 Чем отличаются методы оценки грубых погрешностей между собой?

3 Есть ли необходимость использовать все методы оценки грубых погрешностей или достаточно только одного метода?

3 Практическая работа № 3. Определение объема выборки с заданной степенью надежности

Статистический анализ выборочных параметров технологического процесса производится с помощью больших и малых выборочных совокупностей. С помощью малых выборочных совокупностей в основном осуществляется анализ надежности технологических процессов (ТП). Выборочная совокупность (выборка) – совокупность части элементов, которые отбираются из генеральной совокупности для получения достоверных сведений о всей генеральной совокупности. Это позволит распространить выводы, полученные путем анализа выборки, на всю генеральную совокупность.

Число членов n, образующих выборку, составляет ее объем. Большой выборочной совокупностью считается выборка объемом $n > 20$, а малой – $n < 20$. Для построения гистограммного (нормального) распределения случайной величины рекомендуется, чтобы объем выборки составлял не менее 50 шт.

К основным статистическим характеристикам генеральной совокупности относится среднее арифметическое значение изучаемого признака $\bar{X}_0$, среднее квадратическое отклонение σ_0 и коэффициент вариации $V_0 = \sigma_0 / \bar{X}_0$. Выборочные характеристики процесса $\bar{X}$, S и V, определяемые на основе ограниченного числа наблюдений, могут приближаться к истинным значениям характеристик процесса $\left(\bar{X}_0, \sigma_0, V_0\right)$ с определенной точностью ε и надежностью α.

Вероятность P_0 осуществления следующих неравенств есть надежность α:

$$\left.\begin{aligned} P_0\left(\bar{X} - \varepsilon < X_0 < \bar{X} + \varepsilon\right) = \alpha; \\ P_0\left(S - \varepsilon < \sigma_0 < S + \varepsilon\right) = \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

В технологии машиностроения обычно принимают надежность α = 0,95 (95-процентный уровень надежности). Точность ε может быть задана в единицах измерения исследуемого признака и в процентах от величины характеристики изучаемого признака.

В общем случае объем выборки n в зависимости от точности ε и надежности α выборочной и генеральной совокупности может быть определен по следующим формулам:

– при $n > 20$

$$n = \frac{t^2 \cdot S^2}{\varepsilon^2}; \tag{3.2}$$

– при $n \le 20$

$$n = \frac{{t_c}^2 \cdot S^2}{\varepsilon^2}, \tag{3.3}$$

где t – аргумент функции Лапласа (таблица А.1);

t_c – аргумент функции Стьюдента (таблица А.3).

Аргумент t определяется по таблице А.1 в зависимости от надежности $\alpha = 2\varphi(t)$.

Алгоритм определения выборки по формулам (3.2) и (3.3) заключается в следующем:

1) выбирают предварительную выборку малого объема $n_1 \le 10$;

2) по данным этой выборки объемом n_1 определяют среднее квадратическое отклонение S;

3) вычисляют функцию $S_n(t_s)$ в зависимости от заданной надежности по формуле

$$S_n(t_s) = \frac{\alpha + 1}{2}. \tag{3.4}$$

При $\alpha = 0{,}95$ функция $S_n(t_s) = 0{,}975$;

4) по таблицам А.1 и А.3 в зависимости от значения $\alpha = 2\varphi(t)$, $S_n(t_s)$ и n_1 находят величину аргумента функции Лапласа и Стьюдента;

5) по формулам (3.2) и (3.3) определяют объем малой выборки.

Пример 1 – Определить, какой должен быть объем выборки n, если оценить внутренний диаметр обрабатываемой втулки с надежностью $\alpha = 0{,}95$ и точностью $\varepsilon = 10$ мкм. Из предварительных опытов известно, что $S = 0{,}05$ мм.

По таблице А.1 $\alpha = 2\varphi(t) = 0{,}95$ находим, что значение $t = 1{,}95$. Объем выборки n вычисляем по формуле (3.2):

$$n = \frac{1{,}95^2 \cdot 0{,}05^2}{0{,}01^2} = 96 \text{ шт.}$$

Пример 2 – Определить объем малой выборки, чтобы оценить средний диаметр втулки с точностью $\varepsilon = 0{,}05$ мм и надежностью $\alpha = 0{,}95$.

Для вычисления среднего квадратического отклонения S берем предварительную выборку объемом $n_1 = 5$ шт.

Предположим, что в результате обработки опытных данных этой выборки $S = 0{,}06$ мм.

Определяем по формуле (3.4) функцию $S_n(t_s) = 0{,}975$.

По таблице А.3 в зависимости от значения $S_n(t_s) = 0{,}975$ и $n_1 = 5$ находим значение $t_s = 2{,}8$.

Тогда, используя формулу (3.3), получим объем малой выборки

$$n = \frac{2{,}8^2 \cdot 0{,}06^2 + 0{,}05^2}{0{,}05^2} = 12{,}3.$$

Следовательно, объем малой выборки составит $n = 13$ шт.

Задание 1

Определить объем малой выборки с надежностью $\alpha = 0{,}95$ и точностью ε_i , если при предварительной выборке объемом n_1 получены следующие средние квадратические отклонения S_i (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Результаты предварительной выборки

ε_i , мм	0,025	0,03	0,04	0,048	0,07
n_1, шт.	10	8	7	6	5
S_i, мм	0,05	0,055	0,06	0,08	0,10

До сих пор шла речь о соответствии надежности и точности исследуемых характеристик измеряемых величин при малой выборке генеральной совокупности.

На практике важно знать о допустимых отклонениях среднего арифметического отклонения $\overline{X}$ от истинных значений X измеряемой величины.

Величину $\bar{x}$, которая считается наиболее вероятным значением измеряемой величины, находят по формуле (2.1).

Величину дисперсии, которую в данном случае называют дисперсией измерений, находят из уравнения (2.2) (при $n < 30$).

Средней квадратичной ошибкой (просто стандартом) называют величину, которая равна $\sigma \approx S = +\sqrt{S^2}$.

При оценке результатов важно знать не только точность, но и надежность измерений. Степень надежности полученного результата можно оценить, если известна его доверительная вероятность (коэффициент надежности).

Обозначим истинное значение измеряемой величины через x, а погрешность измерения ее среднего арифметического значения $\bar{x}$ через Δx. Тогда

$$P\left(\bar{x}-\Delta x \le x \le \bar{x}+\Delta x\right)=\alpha \ , \tag{3.5}$$

где α – доверительная вероятность, или вероятность того, что результат измерений попадает в доверительный интервал (отличается от среднего на величину, которая не больше Δx).

Доверительным интервалом называется интервал значений от $\bar{x}-\Delta x$ до $\bar{x}+\Delta x$.

В случае 5-процентного уровня значимости доверительные границы для среднего значения результата измерений можно найти, если известны значения дисперсии для данного числа измерений.

$$x=\bar{x}\pm 1{,}96\frac{S}{\sqrt{n}} . \tag{3.6}$$

Надежность результата можно рассматривать как наименьшую вероятность того, что результат является правильным.

Уровень значимости характеризует риск ошибки при оценке надежности результата. Например, если *доверительная вероятность* α равна 0,95 (или 95 %). Тогда *уровень значимости* $(1-\alpha)$ равен 0,05 (или 5 %).

При увеличении доверительного интервала повышается надежность того, что результаты измерений попадут в него.

Значение величины S дает возможность определить величину доверительного интервала для любой величины доверительной вероятности. Вычисления облегчаются при использовании таблицы 3.2, в которой приводятся доверительные вероятности α для величин Δx, выраженных в долях средней квадратичной ошибки $\Theta=\Delta x/\sigma$ или $\Theta=\Delta x/S$ (см. таблицу 3.2).

Таблица 3.2 – Доверительная вероятность α в зависимости от отношения $\Delta x/\sigma$

$\Theta=\Delta x/S$	3,9	2,6	2,4	2,0	1,65	0,7	0,3	0,15	0,05
α	0,9999	0,99	0,984	0,95	0,9	0,51	0,24	0,12	0,04

Пример 3 – При измерении некоторой неизвестной величины было сделано 100 измерений $(n=100)$. Определено $\bar{x}=1{,}27$. Тогда, допустим, получено среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{100}\left(x_i - 1{,}27\right)^2}{99}} = 0{,}03.$$

Доверительному интервалу, в который попадает примерно 95 % результатов, соответствует доверительная вероятность $\alpha = 0{,}95$. Из таблицы 3.2 устанавливаем, что принятому значению $\alpha = 0{,}95$ соответствует $\Theta = 2{,}0$.

Отсюда $\Delta x = \Theta \cdot S = 2{,}0 \cdot 0{,}03 = 0{,}06$.

Таким образом, указанной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ соответствует интервал

$$\bar{x} - 0{,}06 \le x \le \bar{x} + 0{,}06$$

или

$$1{,}21 \le x \le 1{,}33.$$

Можно записать $x = 1{,}27 \pm 0{,}06$ при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

В том случае, когда число измерений, учитываемых при определении средней квадратичной ошибки, не очень велико, то соответствующие задачи могут быть решены, если Δx определяется из следующего соотношения:

$$\Delta x = \pm \frac{t \cdot S}{\sqrt{n}}, \tag{3.7}$$

где t – критерий Стьюдента;

S – приближенное значение квадратичной ошибки σ;

n – число измерений.

Значения критерия Стьюдента для $\alpha = 0{,}95$ для разных n приведены в таблице 3.3.

При $n = 30...120...\infty$ критерий $t = 2{,}0$.

Тогда зависимость (3.5) имеет вид:

$$P\left(\bar{x} - \frac{tS}{\sqrt{n}} \le x \le \bar{x} + \frac{tS}{\sqrt{n}}\right) = \alpha. \tag{3.8}$$

Соотношение (3.8) используют для определения доверительных интервалов и доверительных вероятностей при любом небольшом числе измерений, в том числе при оценке допустимых отклонений $\bar{x}$ от истинного значения.

Таблица 3.3 – Значения критерия Стьюдента (t-критерия) для $\alpha = 0,95$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	–	12,71	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
Число степеней свободы $f = n_0 - 1$	–	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Продолжение таблицы 3.3

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09
Число степеней свободы $f = n_0 - 1$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Пример 4 – Определить доверительные границы, между которыми лежит среднее значение результата измерений при 5-процентном уровне значимости $(1 - \alpha = 0,05)$.

После пяти измерений было установлено, что $\bar{x} = 31,2$ и $S = 0,24$.

При доверительной вероятности $\alpha = 0,95$, соответствующей 5-процентному уровню значимости, при $n = 5$ $(f = 4)$ из таблицы 3.3 находим $t_{0,05} = 2,78$. Отсюда имеем

$$\Delta x = \pm \frac{2,78 \cdot 0,24}{\sqrt{5}} = \pm 0,30 \ ;$$

$$31,20 - 0,30 \le x \le 31,20 + 0,30 \, .$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что значение $\bar{x}$ лежит в общей совокупности между границами 30,9 и 31,5.

Задание 2

Определить погрешность измерения ΔX случайной величины $X = 20$ при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ для данных, приведенных в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Величина средней квадратической ошибки S при числе измерений n

n	12	14	16	18	20
S	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1

Контрольные вопросы

1 Какие выборки считаются большими и малыми? К какой выборке относится выборка для получения нормального закона распределения случайной величины?

2 Когда используют аргумент функции Лапласа и аргумент функции Стьюдента?

3 Какие данные о выборке необходимо иметь, чтобы получить величину доверительного интервала измерений величины с доверительной вероятностью 95 %?

4 Практическая работа № 4. Изучение методики планирования и проведения экспериментов при получении полинома первой степени

Планирование эксперимента связано с изучением зависимости критериев оптимизации (функции отклика) от величины управляющих (входных) параметров и выражается формулой

$$y = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \tag{4.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимые переменные факторы.

Пли планировании эксперимента учитывают, что неизвестная исследователю функция отклика (4.1) аппроксимируется полиномом той или иной степени.

Уравнение первой степени:

– для двух факторов

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2; \tag{4.2}$$

– для трех факторов

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3. \tag{4.3}$$

Установление статистических зависимостей (4.2), (4.3) и т. д. осуществляется с использованием разработанных планов экспериментальных исследований.

Применение известных планов удобно тем, что:

– отпадает необходимость в тщательном обдумывании техники проведения каждого опыта;

– фактически автоматически проводится статистический анализ как каждого опыта, так и всего эксперимента в целом;

– сразу получается аналитическое выражение для описания исследуемого объекта;

– облегчен графический анализ влияющих факторов.

Последовательность построения математических зависимостей следующая.

1 Выявление необходимых оптимизирующих параметров (t, S, V) или других $\left(h_з,\ T_0,\ \delta_p\right)$ и т. д.

2 Выбор основных факторов, определяющих значения оптимизирующих параметров.

3 Выбор разумных интервалов и уровней варьирования факторов.

Следует учитывать, что увеличение интервала варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика и увеличивает количество экспериментов.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни варьирования факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний – -1, а основной – 0. Обычно при записи цифра 1 опускается и кодовая запись уровней факторов имеет вид «+», «–», «0».

Кодированное значение фактора x_i определяют по выражению

$$x_i = \frac{C_i - C_{0i}}{\varepsilon_i}, \tag{4.4}$$

где x_i – кодированное значение фактора (безразмерная величина);

C_i – натуральное значение i-го фактора;

C_{0i} – натуральное значение i-го фактора на основном уровне;

ε_i – натуральное значение интервала варьирования i-го фактора.

4 Выбор плана эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом (ПФЭ), а результаты оцениваются в результате статистического анализа. Если число уровней каждого фактора m, а число факторов k, то число N всех возможных сочетаний уровней факторов, а следовательно, и число опытов в ПФЭ определяется выражением

$$N = m^k. \tag{4.5}$$

Цель первого этапа планирования эксперимента – это получение *линейной модели*. Он предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Возможное количество сочетаний уровней факторов в этом случае равно 2^k.

Факторный эксперимент осуществляется с помощью матрицы эксперимента, в которой используют кодированные значения факторов. В таблице 4.1 представлена матрица эксперимента для числа факторов от двух до трех.

5 Выбор уровней и интервалов варьирования факторов.

6 По матрице эксперимента и уровням факторов строят матрицу планирования и рабочую матрицу эксперимента (таблица 4.2).

Таблица 4.1 – Матрица эксперимента для трех факторов

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3
1	+	+	+	+
2	+	–	+	+
3	+	+	–	+
4	+	–	–	+
5	+	+	+	–
6	+	–	+	–
7	+	+	–	–
8	+	–	–	–

Таблица 4.2 – Матрица планирования эксперимента и результаты

Номер опыта	План			Взаимодействие	Отклик Y_u
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	+	+	+	+	
2	+	–	+	–	
3	+	+	–	–	
4	+	–	–	+	
5	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	

Опыты 5–7 – это опыты в нулевой (основной) точке, предназначенные для оценки однородности (адекватности) результатов.

7 После реализации плана эксперимента рассчитывают коэффициенты уравнения (4.2).

Расчет коэффициентов производят по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_1^n Y_u}{N}, \tag{4.6}$$

где N – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке (для рассматриваемого двухфакторного эксперимента $N = 4$);

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{iu} \cdot Y_u ; \tag{4.7}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot Y_u , \tag{4.8}$$

где Y_u – значение (величина) отклика;

X_{iu} – значение i-го фактора в u-м опыте;

X_{ju} – значение j-го фактора в u-м опыте.

Для каждой колонки плана производят умножение кодированного значения фактора (+1, -1) на полученное значение отклика Y_u. После суммирования данных по колонкам и деления на соответствующее число опытов получают коэффициенты.

8 Статистический анализ в нулевых точках.

Определяют среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра:

$$\overline{Y_0} = \frac{\sum_{1}^{n_0} Y_{ou}}{n_0}, \tag{4.9}$$

где Y_{ou} – значение оптимизирующего параметра в нулевой точке;

n_0 – число опытов в нулевой точке.

Оценивают дисперсию воспроизводимости, когда опыты повторяются только в нулевой точке (дисперсия ошибки опыта):

$$S_{\overline{Y}} = S_0^2 = \frac{\sum_{1}^{n_0} \left(\overline{Y_0} - Y_{0i}\right)^2}{f}; \tag{4.10}$$

$$f = n_0 - 1,$$

где f – степень свободы.

Определяют среднее квадратическое отклонение в нулевой точке:

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n_0} \left(\overline{Y_0} - Y_{0i}\right)^2}{n_0 - 1}}. \tag{4.11}$$

9 Полученные результаты служат основанием для установления значимости коэффициентов.

Оценка значимости коэффициентов регрессии связана с построением доверительных интервалов. Коэффициент уравнения регрессии значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала.

Доверительный интервал

$$P\left(b_i - \Delta b_i \le \beta_i \le b_i + \Delta b_i\right) = \alpha,$$

где α – доверительная вероятность;

Δb_i – доверительный интервал.

Проверку значимости коэффициентов можно производить двумя способами:

1) сравнением абсолютной величины коэффициентов с доверительным интервалом;

2) с помощью t-критерия Стьюдента.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии по выражению

$$S^2\{b_i\} = \frac{S^2_{\bar{Y}}}{N}, \tag{4.12}$$

где $S^2\{b_i\}$ – дисперсия i-го коэффициента регрессии;

N – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке.

Из формулы (4.12) следует, что дисперсии всех коэффициентов равны. Затем определяют среднюю квадратическую ошибку в определении коэффициентов:

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}}. \tag{4.13}$$

Доверительный интервал Δb_i находят по формуле

$$\Delta b_i = \pm t S_{\{b_i\}}, \tag{4.14}$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента при принятом уровне значимости и числе степеней свободы f, с которым определялась дисперсия $S^2_{\bar{Y}}$.

Значения t-критерия Стьюдента приведены в таблице 3.3. Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала, т. е. $b_i > \Delta b_i$.

При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют расчетное значение t_p-критерия Стьюдента по выражению

$$t_p = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}. \tag{4.15}$$

Для каждого коэффициента уравнения (4.2) составляют расчетное и табличное значение критерия Стьюдента (см. таблицу 3.3). Коэффициент b_i значим, если $t_p > t$ для принятого уровня значимости и числа степеней свободы $f = n_0 - 1$, с которым определялась дисперсия $S^2_{\bar{Y}}$. Критерий t_p вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Если расчетное значение меньше табличного, то соответствующий коэффициент считается равным нулю, а член уравнения отбрасывается. Таким образом, получаем уравнение (4.2) в измененном виде, при условии исключения какого-то коэффициента.

10 После отбрасывания ряда коэффициентов оценивают новое уравнение на приемлемость его для оптимизации рассматриваемого процесса, т. е. оценивают адекватность нового уравнения.

Определяют дисперсию адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{1}^{N} \left(Y_u - Y_{up}\right)^2}{f_{ад}}, \tag{4.16}$$

где Y_u – фактическая величина отклика или критерия оптимизации (эксперимент);

Y_{up} – расчетное число критерия оптимизации, полученное из уравнения после исключения коэффициентов;

$f_{ад}$ – число степеней свободы при оценке дисперсии адекватности,

$$f_{ад} = N - \left(K + 1\right), \tag{4.17}$$

где N – число опытов (без учета в нулевых точках);

K – число факторов,

или

$$f_{ад} = N - m,$$

где m – число значимых коэффициентов с учетом коэффициента b_0.

11 Определяют расчетное значение Фишера:

– если $S_{ад}^2 > S_{\bar{Y}}^2$,

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{\bar{Y}}^2}; \tag{4.18}$$

– если $S_{\bar{Y}}^2 > S_{ад}^2$,

$$F_p = \frac{S_{\bar{Y}}^2}{S_{ад}^2}. \tag{4.19}$$

Если расчетное значение $F_p \le F_T$ (см. таблицу А.2), то полученное уравнение адекватно и оно пригодно для оценки оптимизации исследуемых параметров.

12 Перевод полученного уравнения из использования кодированных факторов в именованные, используя соотношение (4.4).

Пример – Определить зависимость тангенциальной составляющей P_z силы резания от изменения переднего $\gamma_з$ и заднего $\alpha_з$ углов призматического резца.

Режимы обработки: скорость резания $V = 100$ м/мин, подача $S = 0,4$ мм/об, глубина резания $t = 0,8$ мм.

После анализа литературных данных выбираем интервалы варьирования фактов.

Предполагаем, что в выбранных интервалах варьирования тангенциальная составляющая P_z силы резания изменяется линейно. Выбираем двухфакторный план первого порядка (таблица 4.3). Уравнение имеет вид выражения (4.2): $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$.

Таблица 4.3 – Уровни и интервалы варьирования факторов

Фактор	Кодовое обозначение	Интервал варьирования факторов, град	Уровень варьирования		
			верхний +1	основной 0	нижний -1
$\gamma_з$ – передний угол заточки, град	x_1	5	10	5	0
$\alpha_з$ – задний угол заточки, град	x_2	4	10	6	2

Проводим эксперимент и полученные результаты сводим в таблицу 4.4.

Таблица 4.4 – План проведения эксперимента и результаты

Номер опыта	План в кодах		План в значениях		Y_u, Н
	x_1	x_2	x_1	x_2	
1	+	+	10	10	565
2	–	+	0	10	680
3	+	–	10	2	620
4	–	–	0	2	770
5	0	0	5	6	640
6	0	0	5	6	650
7	0	0	5	6	660

Используя результаты экспериментов (см. таблицу 4.4), составляем таблицу 4.5 для расчета коэффициентов уравнения.

Используя зависимости (4.6)–(4.8), проводим расчет коэффициентов:

$$b_0 = \frac{1}{4}\left(565 + 680 + 620 + 770\right) = \frac{2635}{4} = 658; \quad b_1 = -\frac{265}{4} = -66,25 \approx -66,3;$$

$$b_2 = -\frac{145}{4} = -36{,}25 \approx -36{,}3\,; \qquad b_{12} = \frac{35}{4} = 8{,}75\,.$$

Таблица 4.5 – Расчет коэффициентов уравнения

Номер опыта	x_1	x_2	$x_1 x_2$	Y_u
1	565	565	565	565
2	–680	680	–680	680
3	620	–620	–620	620
4	–770	–770	770	770
5	0	0	0	640
6	0	0	0	650
7	0	0	0	660
Сумма	–265	–145	35	4585

В результате обработки экспериментальных данных получено следующее уравнение:

$$Y_u = 658 - 66{,}3x_1 - 36{,}3x_2 + 8{,}75x_1x_2\,. \tag{4.20}$$

Проводим статистический анализ в нулевой точке. Определяем среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра, используя (4.9):

$$\overline{Y}_0 = \frac{640 + 650 + 660}{3} = \frac{1950}{3} = 650\,.$$

Определяем дисперсию опыта в нулевой точке по формуле (4.10) (дисперсия ошибки опыта):

$$S_{\overline{Y}}^2 = S_0^2 = \frac{(650-640)^2 + (650-650)^2 + (650-660)^2}{(3-1) = 2} = 100\,;$$

$$S_{\overline{Y}}^2 = 100\,.$$

Определяем среднее квадратическое отклонение в нулевой точке по формуле (4.11):

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{100} = 10\,.$$

Определяем среднюю квадратичную ошибку в определении коэффициентов по формуле (4.12):

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5.$$

Результаты анализов в нулевой точке сводим в таблицу 4.6.

Таблица 4.6 – Статистические характеристики опытов в нулевой точке

Среднее арифметическое $\overline{Y}_0$	658
Дисперсия $S_Y^2 = S_0^2$	100
Среднее квадратическое отклонение S_Y	10
Средняя квадратическая ошибка в определении коэффициентов $S_{\{b_i\}}$	5

Оцениваем значимость коэффициентов по критерию Стьюдента по формуле (4.15):

$$t_{p1} = \frac{658}{5} = 131{,}6; \quad t_{p2} = \frac{66{,}3}{5} = 13{,}26; \quad t_{p3} = \frac{36{,}3}{5} = 7{,}26; \quad t_{p12} = \frac{8{,}75}{5} = 1{,}75.$$

Сравниваем расчетный критерий Стьюдента с табличными значениями (см. таблицу 3.3) и результаты заносим в таблицу 4.7.

Таблица 4.7 – Анализ коэффициентов уравнения (4.19)

Параметры	Коэффициент уравнения			
	b_0	b_1	b_2	b_{12}
Значения до анализа	658	–66,3	–36,3	8,75
Ошибка в определении коэффициентов уравнения	5	5	5	5
Расчетное значение критерия Стьюдента	131,6	13,26	7,26	1,75
Табличное значение критерия Стьюдента: $n_0 = 3$; $f = 2$	4,3	4,3	4,3	4,3
Значимость коэффициентов	658	–66,3	–36,3	0,00

Поскольку $t_{p12} = 1{,}75$, $t_p = 4{,}3$, $1{,}75 < 4{,}3$, то $b_{12} = 0$.

Таким образом, окончательное (уточненное) уравнение для описания модели выглядит следующим образом:

$$Y = 658 - 66{,}3x_1 - 36{,}3x_2. \tag{4.21}$$

Отрицательные значения коэффициентов b_1 и b_2 говорят о том, что увеличение значения углов уменьшает тангенциальную составляющую P_z силы резания. Поскольку коэффициент $|b_1| > |b_2|$, то изменение переднего угла в большей степени влияет (уменьшает) на величину силы P_z.

Проверка уравнения (4.21) на адекватность.

После отбрасывания ряда коэффициентов (в данном случае одного) необходимо оценить приемлемость полученного уравнения от уравнения, когда были бы сохранены все коэффициенты, т. е. установить адекватность модели.

Для этого в каждом опыте рассчитывают по полученному уравнению величину отклика и находят квадрат разности рассчитанного значения отклика от фактического.

Определяют дисперсию адекватности по формуле (4.16):

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_1^N \left(Y_и - \widehat{Y}_{ир}\right)^2}{f_{ад}},$$

где $Y_и$ – значение критерия оптимизации (эксперимент);

$Y_{ир}$ – расчетное число критерия оптимизации (по полученному уравнению (4.19);

$f_{ад}$ – число степеней свободы для линейной модели при оценке дисперсии адекватности по формуле (4.17).

В данном случае $f_{ад} = 4 - (2+1) = 1$.

Используя результаты экспериментов (см. таблицу 4.5), составляем таблицу 4.8 для расчета дисперсии адекватности $S_{ад}^2$.

Таблица 4.8 – Проверка пригодности уравнения

Номер опыта	Полученный результат		$Y_и - \widehat{Y}_{ир}$	$\left(Y_и - \widehat{Y}_{ир}\right)^2$
	опытный $Y_и$	рассчитанный $\widehat{Y}_{ир}$		
1	565	555	10	100
2	680	688	8	64
3	620	628	8	64
4	770	760,6	9,4	88,3
5	640	658	18	324
6	650	658	8	64
7	660	658	2	4
				$\sum 708{,}3$

Определяем дисперсию адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_1^N \left(Y_и - \widehat{Y}_{ир}\right)^2}{f_{ад}} = \frac{708{,}3}{1} = 708{,}3.$$

По таблице А.2 находим, что при числе степеней свободы $f_{ад} = 1$ большей дисперсии $S_{ад}^2$ и числе степеней свободы $f = 2$ меньшей дисперсии $S_{\bar{Y}}$ табличное значение критерия Фишера равно 19,51.

Расчетное значение критерия Фишера определяем следующим образом:

$$F_p = \frac{S_{ay}^2}{S_{\bar{Y}}^2}; \qquad S_{\bar{Y}}^2 = 100;$$

$$F_p = \frac{708{,}3}{100} = 7{,}08.$$

Поскольку $F_p = 7{,}08$, $F_T = 19{,}51$, 7,08 < 19,51, то уравнение (4.21) адекватно.

Осуществим замену в уравнении (4.21) кодированных величин на именованные, используя выражение (4.4):

$$X_1 = \frac{\gamma_з - 5}{5}; \qquad X_2 = \frac{\alpha_з - 6}{4} .$$

После подстановки кодированных величин в уравнение (4.21) получим

$$P_z = 778{,}75 - 13{,}26\gamma_з - 9{,}02\alpha_з.$$

Таким образом, увеличение переднего угла $\gamma_з$ приводит к большему уменьшению тангенциальной составляющей P_z силы резания, чем увеличение заднего угла $\alpha_з$.

Задание

Определить зависимость радиальной составляющей P_y силы резания от изменения переднего $\gamma_з$ и заднего $\alpha_з$ углов призматического резца. Режимы обработки: скорость резания $V = 100$ м/мин; подача $S = 0{,}4$ мм/об; глубина резания $t = 0{,}8$ мм. Интервалы изменения углов взять из таблицы 4.3. При проведении экспериментов имеем значения радиальной составляющей P_y силы резания от углов $\gamma_з$ и $\alpha_з$ заточки резца (см. таблицу 4.4). В таблицу 4.9 сводим результаты эксперимента.

Таблица 4.9 – Результаты эксперимента

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7
$Y_u(P_y)$, Н	376	453	413	513	427	433	440

Контрольные вопросы

1 Каким образом осуществляется выбор факторов и интервалов, определяющих значения оптимизирующих параметров?

2 С какой целью осуществляются опыты в нулевой точке?

3 Какие существуют способы определения значимости коэффициентов полинома первой степени?

4 По какому критерию определяют адекватность полученного выражения?

5 Практическая работа № 5. Оценка достоверности результата эксперимента по методу наименьших квадратов

Математическое моделирование и оптимизация технологического процесса может быть осуществлена на основе статистической обработки экспериментальных данных, собранных в режиме нормальной работы оборудования в производственных условиях (метод пассивного эксперимента), и путем активного эксперимента, чаще всего в лабораторных условиях (метод активного эксперимента).

Корреляционная связь может быть представлена в аналитической, табличной и графической формах.

Аналитически корреляционная связь записывается обычно в виде уравнения

$$\overline{Y}_x = f(x), \tag{5.1}$$

где x – значение аргумента;

$\overline{Y}_x$ – условное среднее арифметическое значение ряда распределения, соответствующее данному значению аргумента x.

Уравнение (5.1) называется уравнением регрессии y от x или корреляционным уравнением.

Регрессионная зависимость может быть аппроксимирована прямой линией, параболой, гиперболой, логарифмической, степенной или показательной функцией, полиномом первой или второй степени и т. д.

Предположим, что на освоение экспериментальных данных получено n значений функций y при соответствующих значениях аргумента x.

На основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующим экспериментальным значениям, выбирается функция $Y = f(x,\ a,\ b,\ c)$. Остается подобрать входящие в нее параметры a, b, c так, чтобы она наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс. Линия, проходящая через точки на графике, – это так называемая линия регрессии. Линия регрессии может быть построена и определена с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Суть метода заключается в том, чтобы сумма квадратов разности экспериментально полученного значения Y_i для точки x_i и рассчитанного по подбираемому выражению (величинам коэффициентов a, b, c), была бы равна нулю или стремилась к минимуму (min).

$$\sum_{i}^{n}(Y_i - f(x,a,b,c))^2 \to \min \tag{5.2}$$

или

$$Q = \sum_{i}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \min, \tag{5.3}$$

где Y_i – фактические координаты линии;
 $\overline{Y}$ – среднее значение с абсциссой x.

Поиск коэффициентов сводится к решению системы уравнений с числом их, равным числу неизвестных коэффициентов. Для того чтобы условие (5.3) выполнялось, необходимо приравнять нулю первые производные функции Q по каждому из коэффициентов a, b, c, … . Таким образом, получают столько уравнений, сколько постоянных коэффициентов в уравнении (5.3). Решая эту систему уравнений, получают значения коэффициентов a, b, c, … .

Если предположить, что зависимость между переменными линейна и выражается уравнением

$$y = ax + b, \tag{5.4}$$

где a, b – постоянные коэффициенты,
то по условию (5.3) будем иметь

$$Q = \sum_{i}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i}^{n}(y - ax - b)^2 = \min. \tag{5.5}$$

Очевидно, что выражение (5.5) эквивалентно сумме:

$$Q = \sum\left[(y - ax) - b\right]^2 = \sum \left[(y - ax)^2 - 2(y - ax)b + b^2\right] =$$

$$= \sum\left[y^2 - 2axy + a^2x^2 - 2yb + 2axb + b^2\right].$$

Взяв частные производные, используя зависимость (5.5),

$$\frac{dQ(ab)}{da} = 0; \qquad \frac{dQ(ab)}{db} = 0;$$

$$\frac{dQ(ab)}{da} = -2\sum xy + 2a\sum x^2 + 2b\sum x = 0;$$

$$\frac{dQ(ab)}{db} = -2\sum y + 2a\sum x + 2\sum b = 0, \qquad (5.6)$$

получим систему уравнений

$$a\sum_{i}^{n} x_i^2 + b\sum_{i}^{n} x_i = \sum_{i}^{n} y_i x_i;$$

$$a\sum_{i}^{n} x_i + bn = \sum_{i}^{n} y_i, \qquad (5.7)$$

где n – число опытов (объем выборки).

Решив ее, можно получить значения коэффициентов a и b.

Обычно их вычисляют по следующим выражениям:

$$a = \frac{n\sum_{i}^{n} x_i y_i - \sum_{i}^{n} x_i \sum_{i}^{n} y_i}{n\sum_{i}^{n} x_i^2 - (\sum_{i}^{n} x_i)^2}; \qquad (5.8)$$

$$b = \frac{\sum_{i}^{n} y_i}{n} - \frac{a\sum_{i}^{n} x_i}{n}. \qquad (5.9)$$

В результате получаем уравнение линии прямой – это так называемая линия регрессии, характеризующая экспериментальные данные.

После получения уравнения (5.4) необходимо удостовериться в его достоверности. Для этого существуют определенные критерии. В технологии машиностроения для нормирования широко используется коэффициент корреляции r, показывающий степень тесноты связи x и y и определяемый по формуле

$$r = \frac{\sum_{i}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \sum_{1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[\sum_{1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{1}^{n} x_i)^2\right]\left[\sum_{1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{1}^{n} y_i)^2\right]}}. \qquad (5.10)$$

Величина r изменяется от +1 до -1. Обычно берется по абсолютной величине. Считается, что корреляция при $r < 1$ – пренебрежимо мала; $0{,}1 \le r < 0{,}3$ – слабая; $0{,}3 \le r < 0{,}7$ – существенная; $0{,}7 \le r < 0{,}9$ – большая; $0{,}9 \le r$ – очень большая.

Модуль коэффициента r является мерой линейной зависимости. Чем ближе значения к прямой, тем в большей степени модуль r приближается к единице.

Некоторые значения по коэффициенту r.

1 Если две величины не зависят друг от друга, то они не коррелированны и $r = 0$; если пары значений (x_i, y_i) лежат на прямой, то $r = 1$.

2 Необходимо учитывать, что τ зависит от объема выборки. При $n = 2$ всегда $r = 1{,}0$. При $n = 2$ на графике изображается точка. Использование r в качестве статистической зависимости при $n = 2$ недопустимо.

Пример – Определить уравнение зависимости температуры от скорости резания при точении стали 45 и определить коэффициент корреляции при экспериментальных данных, представленных в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Исходные данные

Скорость, м/мин	x_i	70	127	169	200
Температура, °C	y_i	97	221	350	400
		100	240	400	500

В целях упрощения расчет оформляем в виде таблицы 5.2.

Коэффициент корреляции

$$r = \frac{174007 - \frac{1}{4}566 \cdot 1068}{\sqrt{\left[89590 - \frac{1}{4}566^2\right]\left[340750 - \frac{1}{4}1068^2\right]}} = \frac{22885}{22982{,}57} = 0{,}996.$$

Так как коэффициент корреляции получился близким к + 1, то можно утверждать, что между скоростью резания и температурой существует тесная связь. Эта связь близка к линейной.

Таблица 5.2 – Расчет коэффициентов

Номер эксперимента	V, м/мин (x_i)	T, мин (y_i)	V^2 (x_1^2)	T^2 (y_1^2)	VT ($x_i\ y_i$)
1	70	97	4900	9409	6790
2	127	221	16129	48841	28067
3	169	350	28561	122500	59150
4	200	400	40000	160000	80000
$\sum$	566	1068	89590	340750	174007

Рассчитаем коэффициенты линейной регрессии, используя выражения (5.8) и (5.9):

$$a = \frac{4 \cdot 174007 - 566 \cdot 1068}{4 \cdot 89590 - 566^2} = \frac{91540}{38004} = 2{,}4;$$

$$b = \frac{1068}{4} - 2{,}4\frac{566}{4} = -72{,}6.$$

Теоретическая регрессионная зависимость имеет вид

$$T = -72{,}6 + 2{,}4V.$$

Задание

Определить уравнение зависимости температуры от скорости резания при точении стали 45 и коэффициент корреляции при экспериментальных данных таблицы 5.1, используя формулы (5.8)–(5.10).

Контрольные вопросы

1 Какова суть метода оценки достоверности результата эксперимента по методу наименьших квадратов?

2 Какое количество уравнений необходимо составить для получения линии регрессии первой или второй степени?

3 Какой коэффициент служит оценкой достоверности полученного уравнения регрессии?

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 279 с.

2 **Спиридонов, А. А.** Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов. – Москва: Машиностроение, 1981. – 184 с.

3 **Канне, М. М.** Основы научных исследований в технологии машиностроения / М. М. Канне. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 231 с.

4 Исследования и изобретательство в машиностроении / М. Ф. Пашкевич [и др.]; под общ. ред. М. Ф. Пашкевича. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 294 с.

5 **Горохов, В. А.** Основы экспериментальных исследований и методика их проведения: учебное пособие / В. А. Горохов. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2016. – 655 с.

6 **Рыжков, И. Б.** Основы научных исследований и изобретательства: учебное пособие / И. Б. Рыжков. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. – 224 с.

7 **Шатуров, Д. Г.** Технологические особенности чистовой токарной обработки валов / Д. Г. Шатуров, Г. Ф. Шатуров, А. А. Жолобов. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 192 с.

Приложение А
(справочное)

Таблица А.1 – Значение функции Лапласа

t	$2\varphi(t)$	$\varphi(t)$
1,50	0,8664	0,4330
1,55	0,8789	0,4395
1,60	0,8904	0,4450
1,65	0,9011	0,4505
1,70	0,9109	0,4555
1,75	0,9199	0,4600
1,80	0,9281	0,4640
1,85	0,9357	0,4680
1,90	0,9426	0,4715
1,95	0,9500	0,4750
2,00	0,9545	0,4775

Таблица А.2 – Значения критерия Фишера (F-критерия) при доверительной вероятности 0,95

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Число степеней свободы для большей дисперсии					
	1	2	3	4	5	6
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28

Таблица А.3 – Значения вероятностей $S_n(t_c)$ для распределения Стьюдента

t_c	n_1									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
2,0	0,852	0,908	0,930	0,942	0,949	0,954	0,957	0,960	0,962	0,965
2,2	0,864	0,921	0,942	0,954	0,960	0,965	0,968	0,970	0,972	0,975
2,4	0,874	0,931	0,952	0,963	0,969	0,973	0,976	0,978	0,980	0,982
2,6	0,883	0,938	0,960	0,970	0,976	0,980	0,982	0,984	0,986	0,988
2,8	0,891	0,946	0,966	0,976	0,981	0,984	0,987	0,988	0,990	0,991
3,0	0,898	0,952	0,971	0,980	0,985	0,988	0,990	0,992	0,992	0,994