МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД, СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Могилев 2023

УДК 519.22
ББК 22.172
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» сентября 2023 г., протокол № 1

Составители: ст. преподаватель Т. Ю. Орлова;
доц. Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения примеров, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

1.1 Теоретическая часть

Генеральная совокупность. Выборка.

Исходным материалом всякого статистического исследования является совокупность результатов наблюдения, которые удобно заносить в таблицу. Совокупность экспериментальных данных представляет собой первичный статистический материал. Эта совокупность называется ***простой статистической совокупностью*** или ***простым статистическим дискретным рядом***.

Вся подлежащая изучению совокупность объектов называется ***генеральной***, а число входящих в неё элементов – ***объёмом генеральной совокупности***. Та часть объектов, которая попала на проверку или исследование, называется ***выборочной совокупностью*** или ***выборкой***, а число элементов, входящих в выборку, – ***объёмом выборки***.

Распределение выборки. Полигон и гистограмма.

Пусть дана выборка $\{x_1,\ldots,x_n\}$ объёма n, элементы которой являются экспериментальными значениями непрерывной или дискретной случайной величины (СВ) X, полученные при реализации n независимых экспериментов, повторяющихся в одних и тех же условиях.

Если СВ X – дискретная, то значения наблюдений x_i располагаются в возрастающем порядке. При этом x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – ***вариационным рядом***. Число появлений наблюдения x_i называют ***абсолютной частотой*** m_i, а $W_i = \dfrac{m_i}{n}$ – ***относительной частотой***.

Значения x_i, m_i, W_i заносят в таблицу, которую называют ***статистическим рядом распределения*** или ***частотной таблицей***.

Статистический ряд распределения, представленный графически, называется ***полигоном частот***. Для построения полигона на плоскости наносятся точки с координатами $(x_i;m_i)$ или $(x_i;W_i)$ и соединяются отрезками прямых.

Если СВ X – непрерывная, то весь диапазон экспериментальных данных делят на интервалы и подсчитывают количество значений m_i, входящих в данный интервал. Затем находят относительные частоты $W_i = \dfrac{m_i}{n}$, $\sum\limits_i m_i = n$. Очевидно, что $\sum\limits_i W_i = 1$. Полученные интервалы и соответствующие им относительные частоты W_i записываются в виде таблицы, которая называется ***интервальным статистическим рядом распределения***.

При построении интервального статистического ряда распределения рассматривают интервалы одинаковой длины (обычно $k = 6...20$). Количество интервалов k можно определять из соотношений

$$k = 1 + 3,2 \cdot \lg n \text{ или } k = 1 + 1,4 \cdot \ln n,$$

где n – объем выборки.

Длину интервала h находят по формуле

$$h = \frac{R}{k},$$

где R – размах варьирования, $R = x_{\max} - x_{\min}$.

При необходимости длину последнего отрезка увеличивают, чтобы в него вошло $x_{\max}$.

Интервальный статистический ряд распределения, представленный графически, называется ***гистограммой***. Для её построения по оси абсцисс откладываются интервалы $[x_i, x_{i+1})$ и на каждом из них строится прямоугольник площадью W_i, т. е. высота этого прямоугольника равна $H_i = \dfrac{W_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{W_i}{h}$.

Очевидно, площадь гистограммы равна единице.

Полигон частот (относительных частот) для интервального ряда – ломаная, соединяющая точки с координатами $(x_i^*; m_i)$ или $(x_i^*; W_i)$, где x_i^* – середина i-го интервала, $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$.

Гистограмму и полигон частот выборочного распределения можно использовать для подбора модели распределения изучаемой СВ X.

Распределение выборки, задаваемое таблицей относительных частот или интервальным статистическим рядом, называется ***эмпирическим распределением СВ X***.

Эмпирическая функция распределения.

Эмпирической функцией распределения называется относительная частота события $\{X < x\}$ в данной выборке значений СВ *X*, т. е.

$$\tilde{F}(x) = W(X < x) = \frac{m_x}{n} = W_x,$$

где m_x – число значений x_i, меньших x;

n – объём выборки.

$\tilde{F}(x)$ используют для оценки функции распределения $F(x)$ (функции распределения генеральной совокупности).

Свойства эмпирической функции $\tilde{F}(x)$ следуют из определения и аналогичны свойствам теоретической функции распределения $F(x)$:

1) $0 \le \tilde{F}(x) \le 1$;

2) $\tilde{F}(x)$ – неубывающая функция;

3) $\tilde{F}(x) = 0$, если $x \le x_1$, где x_1 – наименьшая варианта. $\tilde{F}(x) = 1$, если $x > x_k$, где x_k – наибольшая варианта.

Если X – ДСВ, то $\tilde{F}(x)$ – ступенчатая, её скачки соответствуют наблюдённым значениям и равны относительным частотам этих значений:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ W_1, & x_1 < x \le x_2; \\ W_1 + W_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots & \\ \sum\limits_{i=1}^{k} W_i = 1, & x > x_k. \end{cases}$$

Если X – НСВ, то в качестве x берут границы интервалов, записанных в интервальном ряде:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ W_1, & x = x_2; \\ W_1 + W_2, & x = x_3; \\ \ldots & \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} W_i, & x = x_k; \\ 1, & x \ge x_{k+1}. \end{cases}$$

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Построить статистический ряд распределения абсолютных и относительных частот выборки и полигон для распределения размеров 50 пар мужской обуви, проданной магазином за день. Была продана мужская обувь следующих размеров:

44, 39, 43, 42, 41, 38, 43, 42, 44, 42, 43, 41, 40, 40, 42, 39, 40, 42, 41, 45, 43, 42, 43, 38, 39, 43, 41, 40, 43, 41, 44, 45, 43, 42, 45, 43, 38, 43, 42, 43, 39, 42, 43, 44, 42, 41, 43, 43, 44, 45.

Составить эмпирическую функцию распределения и построить её график.

Решение

Сгруппируем данные x_i, расположив их в порядке возрастания, и подсчитав количество каждого размера абсолютную частоту m_i. Получим статистический ряд распределения (таблица 1). Объём выборки $n = 50$, относительная частота $W_i = \frac{m_i}{n}$.

Таблица 1

x_i	38	39	40	41	42	43	44	45	
m_i	3	4	4	6	10	14	5	4	$n = \sum_i m_i = 50$
W_i	0,06	0,08	0,08	0,12	0,2	0,28	0,1	0,08	$\sum_i W_i = 1$

Построим полигон относительных частот (рисунок 1).

Составим эмпирическую функцию распределения и построим её график (рисунок 2).

Мы имеем дискретную СВ X – размеры пар мужской обуви, проданной магазином за день.

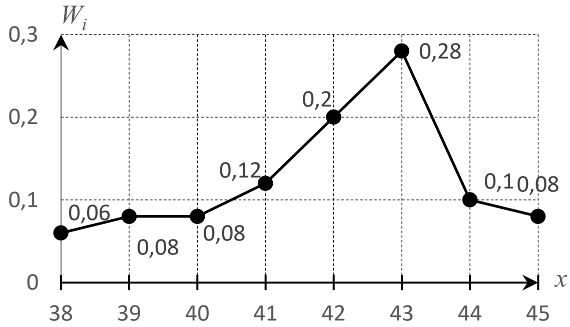

Рисунок 1

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 38; \\ 0,06, & 38 < x \le 39; \\ 0,06 + 0,08 = 0,14, & 39 < x \le 40; \\ 0,14 + 0,08 = 0,22, & 40 < x \le 41; \\ 0,22 + 0,12 = 0,34, & 41 < x \le 42; \\ 0,34 + 0,2 = 0,54, & 42 < x \le 43; \\ 0,54 + 0,28 = 0,82, & 43 < x \le 44; \\ 0,82 + 0,1 = 0,92, & 44 < x \le 45; \\ 0,92 + 0,08 = 1, & x > 45. \end{cases}$$

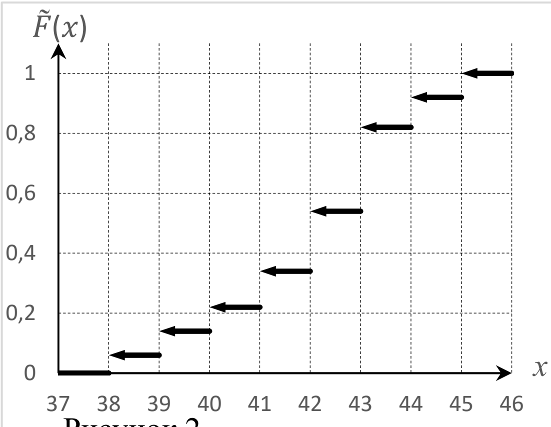

Рисунок 2

Пример 2 – В таблице 2 представлены данные о числе сделок на фондовой бирже за квартал для 100 инвесторов.

Таблица 2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	22	25	12	10	8	7	7	5	2	1	1

Составить интервальный статистический ряд распределения числа сделок. Построить полигон относительных частот и гистограмму интервального статистического ряда. Составить эмпирическую функцию распределения и построить её график для интервального статистического ряда.

Решение

Количество интервалов найдём по формуле

$$k = 1 + 3,2 \cdot \lg n = 1 + 3,2 \cdot \lg 100 = 1 + 3,2 \cdot 2 = 7,4 \approx 7.$$

Длину интервала находим по формуле

$$h = \frac{10 - 0}{7} \approx 1,4.$$

Составим интервальный статистический ряд распределения числа сделок (таблица 3).

Таблица 3

$[x_i; x_{i+1})$	$[0;1,4)$	$[1,4;2,8)$	$[2,8;4,2)$	$[4,2;5,6)$	$[5,6;7)$	$[7;8,4)$	$[8,4;10]$	$[x_i; x_{i+1})$
m_i	47	12	18	7	7	7	2	100
W_i	0,47	0,12	0,18	0,07	0,07	0,07	0,02	1

Составим вспомогательную таблицу 4 для построения полигона и гистограммы.

Таблица 4

$[x_i; x_{i+1})$	$[0;1,4)$	$[1,4;2,8)$	$[2,8;4,2)$	$[4,2;5,6)$	$[5,6;7)$	$[7;8,4)$	$[8,4;10]$	
m_i	47	12	18	7	7	7	2	100
W_i	0,47	0,12	0,18	0,07	0,07	0,07	0,02	1
x_i^*	0,7	2,1	3,5	4,9	6,3	7,7	9,2	
$\frac{W_i}{h}$	0,34	0,09	0,13	0,05	0,05	0,05	0,01	

$x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ – середина интервала $[x_i; x_{i+1})$.

Построим полигон относительных частот (рисунок 3) и гистограмму (рисунок 4).

Составим по интервальному статистическому ряду эмпирическую функцию распределения и построим её график (рисунок 5).

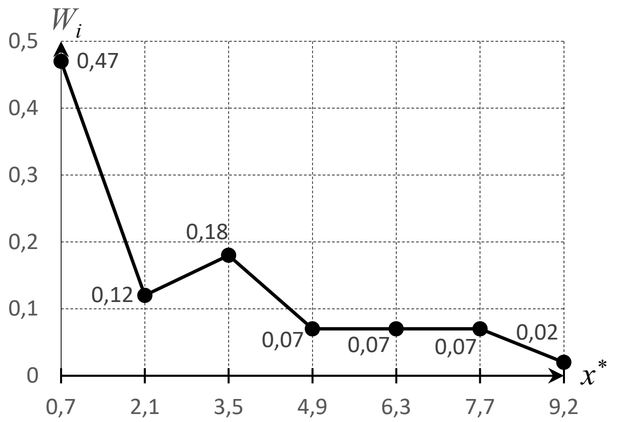

Рисунок 3

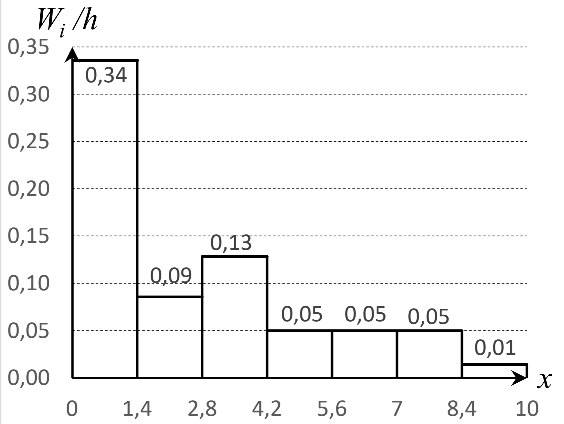

Рисунок 4

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,47, & x=1,4;\\ 0,47+0,12=0,59, & x=2,8;\\ 0,59+0,18=0,77, & x=4,2;\\ 0,77+0,07=0,84, & x=5,6;\\ 0,84+0,07=0,91, & x=7;\\ 0,91+0,07=0,98, & x=8,4;\\ 0,98+0,02=1, & x\ge 10.\end{cases}$$

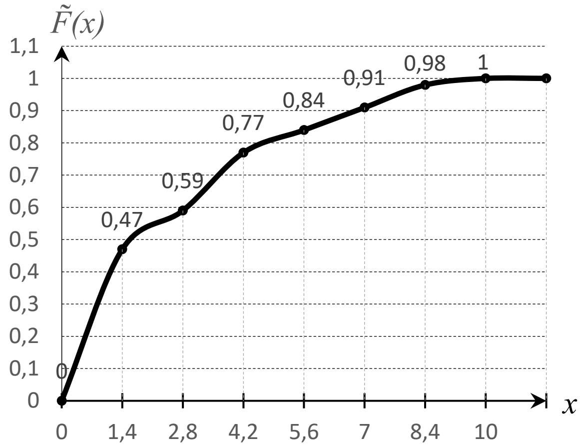

Рисунок 5

1.3 Задачи для самостоятельной работы

1 Число рабочих мест в магазинах составляло:

2, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 5.

Построить статистический ряд распределения и полигон абсолютных и относительных частот выборки. Составить эмпирическую функцию распределения и построить её график.

2 Ежегодно американский журнал «Fortune» публикует список наиболее богатых людей в мире с оценками их состояний в миллиардах долларов. Ниже приведены результаты одной из публикаций:

25,0; 20,9; 8,7; 7,5; 7,4; 6,0; 5,7; 5,5; 5,0; 5,0; 4,4; 4,0; 3,6; 3,4; 3,1; 3,0; 3,0; 2,9; 2,8; 2,8; 2,5; 2,5; 2,5; 2,4; 2,4; 2,4; 2,2; 2,0; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8; 1,7; 1,6; 1,5; 1,5; 1,5; 1,5; 1,4; 1,3; 1,3; 1,3; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,1; 1,1; 1,1; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0.

Постройте частотные таблицы и интервальный статистический ряд. Начертите гистограмму и полигон относительных частот.

3 Результаты измерений толщины вкладышей 500 шатунных подшипников для автомобилей «Жигули» приведены в таблице 5.

Построить гистограмму, эмпирическую функцию распределения и её график.

Таблица 5

Интервал допустимых значений толщины подшипников $[x_i; x_{i+1})$, мм	Число вкладышей m_i	Интервал допустимых значений толщины подшипников $[x_i; x_{i+1})$, мм	Число вкладышей m_i
$[1,723;1,724)$	5	$[1,727;1,728)$	118
$[1,724;1,725)$	25	$[1,728;1,729)$	90
$[1,725;1,726)$	73	$[1,729;1,730)$	49
$[1,726;1,727)$	130	$[1,730;1,731]$	10

4 По имеющимся данным о возрасте студентов первого курса (рисунок 6, указано число полных лет) построить статистический ряд распределения абсолютных и относительных частот, полигон, эмпирическую функцию и её график.

17	20	18	17	19	17	20	19	20	18
19	17	18	18	19	18	20	18	20	20
17	22	19	20	18	21	17	22	17	21
22	19	17	21	20	17	19	18	18	18
20	18	18	21	19	18	20	21	18	21

Рисунок 6

1.4 Домашнее задание

1 Построить полигон абсолютных и полигон относительных частот по данному распределению выборки (таблица 6). Построить эмпирическую функцию распределения и её график.

Таблица 6

x_i	15	20	25	30	35
m_i	10	15	30	20	25

2 Результаты измерений отклонений от номинала диаметров 50 подшипников дали следующие численные значения (рисунок 7, в микрометрах).

–1,752	–0,291	–0,933	–0,450	0,512	–1,256	1,701	0,634	0,720	0,490
1,531	–0,433	1,409	1,730	–0,266	–0,058	0,248	–0,095	–1,488	–0,361
0,415	–1,382	0,129	–0,361	–0,087	–0,329	0,086	0,130	–0,244	–0,882
0,318	–1,087	0,899	1,028	–1,304	0,349	–0,293	–0,883	–0,056	0,757
–0,059	–0,539	–0,078	0,229	0,194	–1,084	0,318	0,367	–0,992	0,529

Рисунок 7

Для данной выборки построить интервальный статистический ряд, полигон относительных частот, гистограмму, эмпирическую функцию распределения и её график.

2 Числовые характеристики выборки. Статистические оценки параметров распределения

2.1 Теоретическая часть

Числовые характеристики выборки.

Рассмотрим основные характеристики эмпирического распределения СВ X.

***Средним арифметическим* (*выборочным средним*)** $\overline{x}_B$ наблюдённых значений выборки называется величина, определяемая по формуле

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

или

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i,$$

где x_i – наблюдаемое значение с частотой m_i;

n – число наблюдений (объём выборки), $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Если СВ X описывается интервальным статистическим рядом, то в качестве наблюдаемого значения x_i берётся середина интервала $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$.

В качестве дополнительной числовой характеристики выборки применяется ***выборочная медиана*** Me_B. Чтобы вычислить её, все наблюдения располагают в порядке возрастания. При этом, если число вариант нечётно, т. е. $2m+1$, то медианой является $m+1$ варианта

$$Me_B = x_{m+1}.$$

Если же число вариант чётное, то медиана равна среднему арифметическому двух средних значений

$$Me_B = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Наблюдение выборки, имеющее наибольшую частоту, называется ***выборочной модой*** **(**Mo_B**)**.

$\overline{x}_B, Me_B, Mo_B -$ средние значения выборки.

Для описания рассеивания наблюдённых значений СВ X относительно $\overline{x}_B$ используются выборочные дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Выборочной дисперсией $D_B(X)$ **(*статистической дисперсией*)** выборочного распределения называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений наблюдений от средней выборочной $\overline{x}_B$

$$D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2$$

или

$$D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \overline{x}_B)^2,$$

где $x_i -$ наблюдаемое значение с частотой m_i;

$n -$ число наблюдений, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$;

$\overline{x}_B -$ выборочная средняя.

Часто выборочную дисперсию удобно находить по формуле

$$D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i - \overline{x}_B^{\,2}.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением **(*стандартной ошибкой*)** $\sigma_B(X)$ называется квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\sigma_B(X) = \sqrt{D_B(X)}.$$

Обобщающими характеристиками выборочных распределений являются статистические моменты распределения.

Начальные статистические моменты k***-го порядка***:

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

или

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i^k m_i, \quad \sum_{i} m_i = n.$$

Тогда $\tilde{\alpha}_0 = 1$; $\tilde{\alpha}_1 = \overline{X}$; $\tilde{\alpha}_2 = \overline{X^2}$.

Центральные статистические моменты k***-го порядка***:

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^k$$

или

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_i m_i\left(x_i - \overline{x}_B\right)^k; \quad \sum_i m_i = n.$$

Тогда $\tilde{\mu}_0 = 1; \quad \tilde{\mu}_1 = 0; \quad \tilde{\mu}_2 = D_B(X).$

Центральный момент третьего порядка $\tilde{\mu}_3$ служит мерой асимметрии распределения выборки

$$A_B = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_B^3},$$

где $A_B -$ коэффициент асимметрии выборки.

Если распределение симметрично, то $\tilde{\mu}_3 = 0$.

Центральный момент четвертого порядка $\tilde{\mu}_4$ служит мерой островершинности (плосковершинности) распределения выборки

$$E_B = \frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma_B^4} - 3,$$

где $E_B -$эксцесс выборочного распределения.

Если СВ X описывается интервальным статистическим рядом, то в качестве наблюдаемого значения x_i берётся середина интервала $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$.

Точечное оценивание. Оценки математического ожидания и дисперсии СВ.

Выборочная числовая характеристика, применяемая для получения оценки неизвестного параметра генеральной совокупности, называется ***точечной оценкой***, т. е. оценка одним числом.

Для подбора наилучшей точечной оценки параметра распределения рассматривают условия: несмещённость, эффективность и состоятельность.

Если $M(\tilde{a}) = a$, то $\tilde{a}$ называется ***несмещённой оценкой*** a.

В противном случае оценка смещена.

Если существует больше одной несмещённой оценки, то выбирают более эффективную оценку.

Оценка $\tilde{a}_1$ называется ***более эффективной***, чем оценка $\tilde{a}_2$, если

$$D(\tilde{a}_1) < D(\tilde{a}_2).$$

Оценка $\tilde{a}$ называется ***состоятельной оценкой*** a, если при $n \to \infty$ она сходится по вероятности к a, т. е. $\tilde{a} \xrightarrow[n\to\infty]{p} a$.

Несмещённой, эффективной, состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ является среднее арифметическое $\overline{x}_B$.

Оценкой для дисперсии СВ X $D(X)$ служит её выборочная дисперсия $D_B(X)$. Эта оценка состоятельная, смещённая. Несмещённой оценкой дисперсии является ***исправленная статистическая*** (***выборочная***) ***дисперсия***

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1} D_B(X).$$

Соответственно оценкой среднего квадратического отклонения СВ X служат $\sigma_B(X)$ и исправленное среднеквадратическое отклонение

$$S_X = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma_B(X).$$

Методы нахождения оценок параметров.

Метод наибольшего правдоподобия предложен Р. Фишером.

Пусть случайный эксперимент описывается НСВ X, плотность распределения вероятностей $f(x,a)$ которой содержит неизвестный параметр a. Функцией правдоподобия для оценки этого параметра называется функция

$$L(x_1,\ldots,x_n;a) = f(x_1;a)\cdot f(x_2;a)\cdot\ldots\cdot f(x_n;a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a),$$

где $x_1,\ldots,x_n$ – наблюдаемые значения СВ X.

Если СВ X – дискретная, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L(x_1,\ldots,x_n;a) = p_1^{m_1}(a)\cdot p_2^{m_2}(a)\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}(a) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}(a),$$

где $P(X = x_i) = p_i(a)$, значения x_i встречается m_i раз, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Величина $\tilde{a}$ – точка максимума функции $L(x_1,\ldots,x_n;a)$, оценка неизвестного параметра a, которая получена по методу наибольшего правдоподобия.

Пусть $L(x_1,\ldots,x_n;a)$ дифференцируема по a при любых возможных значениях x_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда оценка $\tilde{a}$ находится из уравнения

$$\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n;a)}{\partial a} = 0.$$

Так как точки максимума функций $L(x_1,\ldots,x_n;a)$ и $\ln L(x_1,\ldots,x_n;a)$ совпадают, то иногда удобнее решать уравнение

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;a)}{\partial a}=0.$$

Метод моментов заключается в том, что выборочные моменты $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\mu}_k$ принимаются в качестве оценок для моментов распределения СВ X, зависящих от неизвестных параметров. В свою очередь оцениваемые параметры могут быть выражены в виде определённых функций теоретических моментов. Заменяя теоретические моменты их оценками, т. е. статистическими моментами выборочного распределения, получаем оценки параметров.

Этот метод прост, но оценки, найденные этим методом, не являются наилучшими из возможных. Они могут быть малоэффективными и смещёнными.

$$\tilde{\alpha}_k=\alpha_k, \quad \tilde{\mu}_k=\mu_k.$$

Интервальное оценивание.

Наряду с точечными рассматриваются интервальные оценки. Кратко задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью можно утверждать, что этот интервал накрывает оцениваемый параметр. Интервальные оценки особенно необходимы при малом числе экспериментов, когда точечные оценки мало надёжны.

Пусть a – оцениваемый параметр генеральной совокупности; $\tilde{a}$ – статистическая оценка этого параметра по выборке.

Доверительным интервалом называется интервал $(\tilde{a}-\delta;\, \tilde{a}+\delta)$, который покрывает оцениваемый параметр a с заданной надёжностью $1-\alpha=\gamma$. Причем $\gamma=P(|\tilde{a}-a|<\delta)$ называют доверительной вероятностью, а δ – точность оценки.

Очевидно, что чем меньше для данного γ будет δ (длина интервала), тем точнее оценка $\tilde{a}$.

В качестве доверительной вероятности обычно берут $\gamma=0{,}95;\, 0{,}99$. Это значит, что при извлечении n выборок из одной и той же генеральной совокупности доверительный интервал примерно в 95 % (99 %) случаев будет накрывать неизвестный параметр. При увеличении доверительной вероятности строится более широкий доверительный интервал, который малопригоден для практики.

Для точного нахождения доверительных интервалов необходимо знать закон распределения СВ X, тогда как для применения приближенных методов это не обязательно.

Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределённой СВ *X*.

Если σ известно, то

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Значение t находим, пользуясь таблицей функции Лапласа (таблица А.1), из равенства $2\Phi(t)=\gamma$, $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$, где γ – надёжность.

Если σ неизвестно, то

$$\overline{x}_B - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \overline{x}_B + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Значение t_γ находим по таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (таблица А.2).

Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения нормально распределённой СВ *X*.

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \quad q < 1;$$

$$0 < \sigma < S(1+q), \quad q > 1.$$

Для нахождения параметра q есть таблицы значений $q = q(\gamma, n)$ (таблица А.3).

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – По данному распределению выборки (таблица 7) найти числовые характеристики: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Таблица 7

x_i	1	3	4	6
m_i	2	5	10	3

Указать несмещённые точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратичного отклонения.

Решение

Найдём выборочную среднюю

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i m_i = \frac{1}{20}(1\cdot 2 + 3\cdot 5 + 4\cdot 10 + 6\cdot 3) = 3{,}75.$$

Найдём выборочную дисперсию

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2} \cdot m_i - \overline{x}_B^{\,2} = \frac{1}{20}(1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 3) - 3,75^2 = 1,6875.$$

Найдём выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1,6875} \approx 1,299.$$

Несмещённой точечной оценкой математического ожидания m служит выборочная средняя

$$\tilde{m} = \overline{x}_B = 3,75.$$

Несмещённой точечной оценкой дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1} D_B\left(X\right) = \frac{20}{20-1} \cdot 1,6875 \approx 1,7763.$$

Несмещённой точечной оценкой среднеквадратичного отклонения служит исправленное выборочное среднеквадратичное отклонение

$$S_X = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_B = \sqrt{\frac{20}{20-1}} \cdot 1,299 \approx 1,333$$

или

$$S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{1,7763} \approx 1,333.$$

Пример 2 – В таблице 8 приведены результаты измерения роста (в сантиметрах) случайно отобранных 100 студентов.

Таблица 8

Рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти числовые характеристики данной выборки.

Указать несмещённые точечные оценки математического ожидания и среднеквадратичного отклонения.

Решение

Найдём середины интервалов по формуле $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Построим интервальный статистический ряд (таблица 9).

Таблица 9

$[x_i;x_{i+1})$	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
m_i	10	14	26	28	12	8	2
x_i^*	156	160	164	168	172	176	180

Найдём выборочную среднюю

$$\overline{x}_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}x_i^{\,*}m_i=\frac{1}{100}\left(10\cdot 156+14\cdot 160+26\cdot 164+28\cdot 168+12\cdot 172+8\cdot 176+2\cdot 180\right)=166\,.$$

Найдём выборочную моду

$$Mo_B=168.$$

Найдём выборочную медиану

$$Me_B=168.$$

Найдём выборочную дисперсию

$$D_B\left(X\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}m_i(x_i^*-\overline{x}_B)^2=$$

$$=\frac{10\cdot(156-166)^2+14\cdot(-6)^2+26\cdot(-2)^2+28\cdot 2^2+12\cdot 6^2+8\cdot 10^2+2\cdot 14^2}{100}=33,44\,.$$

Найдём выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}=\sqrt{33,44}\approx 5,78.$$

Найдём исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение

$$S_X=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sigma_B=\sqrt{\frac{100}{100-1}}\cdot 5,78\approx 5,81.$$

Найдём выборочный коэффициент асимметрии

$$A_B=\frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_B^3}=\frac{1}{n\sigma_B^3}\sum_{i=1}^{7}m_i\left(x_i^*-\overline{x}_B\right)^3=$$

$$=\frac{1}{100\cdot 5,78^3}\left((156-166)^3\cdot 10+\ldots+(180-166)^3\cdot 2\right)\approx 0,159\,.$$

Найдём выборочный эксцесс

$$E_B = \frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{1}{n\sigma_B^4}\sum_{i=1}^{7} m_i\left(x_i^* - \overline{x}_B\right)^4 - 3 =$$

$$= \frac{1}{100\cdot 5{,}78^4}\left(\left(156-166\right)^4\cdot 10 + \ldots + \left(180-166\right)^4\cdot 2\right) - 3 \approx -0{,}394.$$

Несмещённой точечной оценкой математического ожидания служит выборочная средняя

$$\tilde{m} = \overline{x}_B = 166.$$

Несмещённой точечной оценкой среднеквадратичного отклонения служит исправленное выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\tilde{\sigma} = S_X \approx 5{,}81.$$

Пример 3 – Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью $\gamma = 0{,}95$ неизвестного математического ожидания m нормально распределённой СВ *X*, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x}_B = 14$ и объём выборки $n = 25$.

Решение

Доверительный интервал находим по формуле

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме *t*, известны. Найдём *t* из соотношения $\Phi\left(t\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По таблице значений функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Подставив $t = 1{,}96$, $\overline{x}_B = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$ в формулу, получим

$$14 - 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}} < m < 14 + 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}};\ 12{,}04 < m < 15{,}96.$$

Пример 4 – По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_B = 30{,}1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надёжностью $\gamma = 0{,}99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение

Истинное значение измеряемой величины равно её математическому ожиданию *m*. Доверительный интервал для математического ожидания (при неизвестном σ) находим по формуле

$$\overline{x}_B - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \overline{x}_B + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме t_γ, известны. По таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находим $t_\gamma = t(0{,}99;9) = 3{,}36$. Подставив $t_\gamma = 3{,}36$, $\overline{x}_B = 30{,}1$, $S = 6$, $n = 9$ в формулу, получим

$$30{,}1 - 3{,}36 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}} < m < 30{,}1 + 3{,}36 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}}\ ;\ 23{,}38 < m < 36{,}82.$$

Пример 5 – По данным выборки объёма $n = 16$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 1$ нормально распределённой СВ *X*. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение

Доверительный интервал находим по одной из формул

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \quad q < 1;$$

$$0 < \sigma < S(1+q), \quad q > 1.$$

Все величины, кроме q, известны. По таблице значений $q = q(\gamma, n)$ находим $q = q(0{,}95;16) = 0{,}44$. Подставив $q = 0{,}44 < 1$, $S = 1$ в первую формулу, получим

$$1 \cdot (1 - 0{,}44) < \sigma < 1 \cdot (1 + 0{,}44); \quad 0{,}56 < \sigma < 1{,}44.$$

2.3 Задачи для самостоятельной работы

1 По данным выборки (таблица 10) найти несмещённые точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

Таблица 10

$[x_i; x_{i+1})$	$[7{,}8;8{,}0)$	$[8{,}0;8{,}2)$	$[8{,}2;8{,}4)$	$[8{,}4;8{,}6)$	$[8{,}6;8{,}8)$	$[8{,}8;9{,}0]$
m_i	5	20	80	95	40	10

(Ответ: $\overline{x}_B = 8,44;\ S^2 \approx 0,042.$)

2 Найти точечные оценки среднего квадратического отклонения по данным выборки, занесенным в таблицу 11.

Таблица 11

x_i	102	104	108
m_i	2	3	5

(Ответ: $\sigma_B \approx 2,498;\ S \approx 2,633.$)

3 Даны урожайности ржи на различных участках поля (таблица 12).

Таблица 12

Урожайность, ц/га	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$	$[18;21)$	$[21;24)$	$[24;27]$
Количество участков	6	12	33	22	19	8

Найти оценку для средней урожайности всего поля. (Ответ: $\overline{x}_B = 18,3.$)

4 Случайная величина X (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. В таблице 13 приведено распределение семян сорняков в $n = 1000$ пробах зерна (в первой строке указано количество x_i сорняков в одной пробе; во второй – частота m_i, т. е. число проб, содержащих x_i семян сорняков).

Таблица 13

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона. (Ответ: $\overline{x}_B = 0,9$.)

5 СВ X (время безотказной работы элемента) имеет показательное распределение $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. В таблице 14 приведено эмпирическое распределение среднего времени работы 1000 элементов. Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения.

Таблица 14

x_i	5	15	25	35	45	55	65
m_i	365	245	150	100	70	45	25

(Ответ: $\tilde{\lambda} = 0,05.$)

6 Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 10$ (таблица 15).

Таблица 15

x_i	–2	1	2	3	4	5
m_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надёжностью 0,95 математическое ожидание нормально распределённого признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала. (Ответ: $0,3 < m < 3,7.$)

7 Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma = 40$ м произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния m до цели с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_B = 2000$ м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально. (Ответ: $1964,94 < m < 2035,06.$)

8 По данным выборки объёма n из генеральной совокупности нормально распределённого количественного признака найдено «исправленное» среднеквадратическое отклонение S. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднеквадратическое отклонение σ с надёжностью 0,999, если:

а) $n = 10,\ \ S = 5,1;$

б) $n = 50,\ \ S = 14.$

(Ответ: а) $0 < \sigma < 14,28;$ б) $7,98 < \sigma < 20,02.$)

9 Службой контроля проверен расход энергии в течение месяца в 10 квартирах 70-квартирного дома, в результате чего были получены значения (в киловатт-часах): 125, 78, 102, 140, 90, 45, 50, 125, 115, 112. Определить с надёжностью 0,95 доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии в доме. (Ответ: $75,23 < m < 121,17.$)

10 Найдите минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,975 точность оценки математического ожидания m по выборочной средней $\delta = 0,3,$ если $\sigma = 1,2.$ (Ответ: $n = 81.$)

2.4 Домашнее задание

1 Случайная величина X (отклонение контролируемого размера изделия от номинала) подчинена нормальному закону распределения с неизвестными параметрами m и σ. В таблице 16 приведено эмпирическое распределение отклонения от номинала 200 изделий. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров m и σ нормального распределения.

Таблица 16

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
m_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

(Ответ: $\tilde{m} = 1,26;\ \tilde{\sigma} = 0,5.$)

2 По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены $\overline{x}_B = 42,8$ и «исправленное» среднеквадратическое отклонение $S = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надёжностью $\gamma = 0,999$. (Ответ: $34,66 < m < 50,94$.)

3 Станок-автомат штампует валики. По выборке объёма $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надёжностью $\gamma = 0,95$ точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров валиков, зная , что их среднеквадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально. (Ответ: $0,392$ мм.)

4 Признак генеральной совокупности распределён нормально. Получена выборка объёма $n = 20$ (таблица 17).

Таблица 17

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

Найти доверительный интервал, накрывающий среднеквадратическое отклонение с вероятностью 0,99. (Ответ: $0,0049 < m < 0,0183$.)

Список литературы

1 **Герасимович, А. И**. Математическая статистика / А. И. Герасимович. − Минск: Вышэйшая школа, 1983.

2 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. − Минск : Вышэйшая школа, 1984.

3 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. − Москва : Высшая школа, 2002.

4 **Булдык**, **Г. М.** Теория вероятностей и математическая статистика / Г. М. Булдык. − Минск: Вышэйшая школа, 1989.

5 **Калинина, В. Н.** Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. − Москва: Высшая школа, 1998.

6 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. − Москва: Высшая школа, 2004.

7 **Колемаев, В. А.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев. − Москва: Высшая школа, 2002.

8 **Белько, И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И. В. Белько**.** − Минск: Новое знание, 2002.

9 **Фигуркин, В. А**. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Фигуркин, В. В. Оболонкин. − Минск: Новое знание, 2000.

10 Сборник задач по высшей математике : учебное пособие: в 4 ч. / Под ред. А. С. Поспелова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2021. – Ч. 4.

Приложение А
(рекомендуемое)

Таблица А.1 – Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0763	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание таблицы А.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499963
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,499997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	–	–
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963	–	–

Таблица А.2 – Критические точки распределения Стьюдента (односторонняя критическая область)

Число степеней свободы k	Уровень значимости α									
	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица А.3 – Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162