РАЗРЕШИМОСТЬ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА — РИККАТИ

О.А. Маковецкая

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
olya.makzi@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde\rho\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$, $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$.

Следуя [1], решение этой задачи разыскивается в виде

$$X(t) = C + Y(t), \tag{3}$$

где C — постоянная матрица, $Y(t)$ — матрица, подчиненная условиям [2]

$$Y(0) = Y(\omega), \quad \int\limits_0^\omega [A(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B(\tau)]\,d\tau = 0.$$

Обозначим $M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau$, $N = -\int_0^\omega B(\tau)\,d\tau$.

Установлено, что в случае, когда матрицы M и N не имеют общих характеристических чисел, задача (1), (2) в представлении (3) эквивалентна интегральной задаче [2]

$$C = -\Phi^{-1}\int\limits_0^\omega [(C+Y(\tau))Q(\tau)(C+Y(\tau)) + F(\tau, C+Y(\tau))]d\tau, \tag{4}$$

$$Y(t) = \Phi^{-1}\Big[\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^\tau A(\sigma)d\sigma\Big)S(\tau)d\tau - \int\limits_t^\omega \Big(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\Big)S(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t S(\tau)\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \int_t^\omega S(\tau)\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)d\tau, \qquad (5)$$

где $S(\tau) = A(\tau)(C+Y(\tau))+(C+Y(\tau))B(\tau)+(C+Y(\tau))Q(\tau)(C+Y(\tau))+F(\tau, C+Y(\tau))$, Φ — линейный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$.

Получены конструктивные условия типа [3, гл. III] однозначной разрешимости задачи (4), (5).

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1990. № 5. С. 25-–30.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. *Конструктивный анализ и структурные свойства решений периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова –– Риккати (двусторонняя регуляризация)*. Могилев: Белорус.–Рос. ун-т, 2013. 55 с. (Препринт/ ИТМ НАН Беларуси, № 33).

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. 300 с.