МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к управляемой самостоятельной работе для студентов специальности 6-05-0612-03 «Системы управления информацией» очной формы обучения

Могилев 2023

УДК 519.6
ББК 22.176
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «31» августа 2023 г., протокол № 1

Составители: д-р техн. наук, доц. А. И. Якимов;
канд. техн. наук Е. А. Якимов

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

В методических рекомендациях к управляемой самостоятельной работе по дисциплине «Дискретная математика» (2 семестр) приведены примеры, задания и список литературы для самостоятельной подготовки.

Учебное издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 21 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение 4
1 Реализация операций над подмножествами заданного универсума.......... 5
2 Исследование свойств отношений 9
3 Операции над графами 15
4 Решение задач теории графов в системе компьютерной алгебры 19
5 Исследование полноты системы булевых функций 27
6 Минимизация функций булевой алгебры.. 29
7 Синтез логических схем 35
8 Способы задания абстрактного конечного автомата 40
Список литературы 45

Введение

Целью преподавания дисциплины «Дискретная математика» является ознакомление студентов с основными дискретными математическими моделями и методами, понятиями теории множеств и отношений, операциями алгебры логики, критериями полноты систем булевых функций, задачами анализа и синтеза логических схем, различными представлениями графов и операциями над графами, способами задания конечного автомата.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

– систематизации и закрепления полученных практических умений студентов;

– углубления и расширения теоретических знаний;

– формирования умений использовать справочную и специальную литературу;

– развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– развития исследовательских умений.

Цель методических рекомендаций – помочь студентам в самостоятельной подготовке к выполнению лабораторных работ и выполнении заданий по дисциплине.

Требования к выполнению индивидуальных заданий.

Для более эффективной самостоятельной работы необходимо очень внимательно изучить все возможные инструкции и теоретические сведения по теме в лекционном курсе или источнике литературы, указанном в перечне.

Обучающийся должен оформить выполненное индивидуальное задание в тетради для самостоятельных работ студента, соответственно своему варианту. Запись должна содержать: название раздела и темы, номер варианта, условие задания, решение с промежуточными выкладками, полный ответ.

Сдать работу преподавателю не позднее одной недели после получения задания.

1 Реализация операций над подмножествами заданного универсума

Основные теоретические положения

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, ...\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами.

Пример 1 – Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$. Если какое-либо множество A включено в другое множество B, то используется запись $A \subset B$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M, и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном этого множества и обозначать 2^M, а множество M будем называть универсальным (универсумом или пространством) и обозначать 1 или U. Мощностью булеана конечного множества является количество всех подмножеств этого множества: $|2^M| = 2^{|M|}$.

Пример 2 – Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество 2^A включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е. $2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Объединением A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример 3 – Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

Пример 4 – Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cup B$ – множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являю**тся элементами обоих множеств *A* и *B***:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример 5 – Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

Пример 6 – Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cap B$ – множество чисел, которые делятся и на 2, и на 3: $A \cap B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример 7 – Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Разностью между множеством A и множеством B называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример 8 – $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

Пример 9 – $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пример 10 – $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A \Delta B = \{2, 5\}$.

Пример 11 – $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A \Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Дополнением $\overline{M}$ множества M является множество

$$\overline{M} = \{m_i \mid m_i \notin M\}.$$

Пример 12 – Заданы множества $A = \{1, 2, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 6\}$ на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Выполнить операции $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение

В результате выполнения заданных операций получим следующие множества: $\overline{A} = \{3, 7\}$; $\overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

Для конечных множеств существует понятие: мощность множества A – число его элементов. Обозначают мощность множества $|A|$.

Пример 13 – $A = \{1, 2, 5, 6\}$, тогда мощность множества $|A| = n(A) = 4$; $|\varnothing| = 0$; $|\{\varnothing\}| = 1$.

Также справедлива следующая формула для любых множеств A и B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

т. е. учитываются общие для обоих множеств элементы.

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используются диаграммы Венна (рисунок 1). Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, – в виде геометрических фигур внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри фигуры.

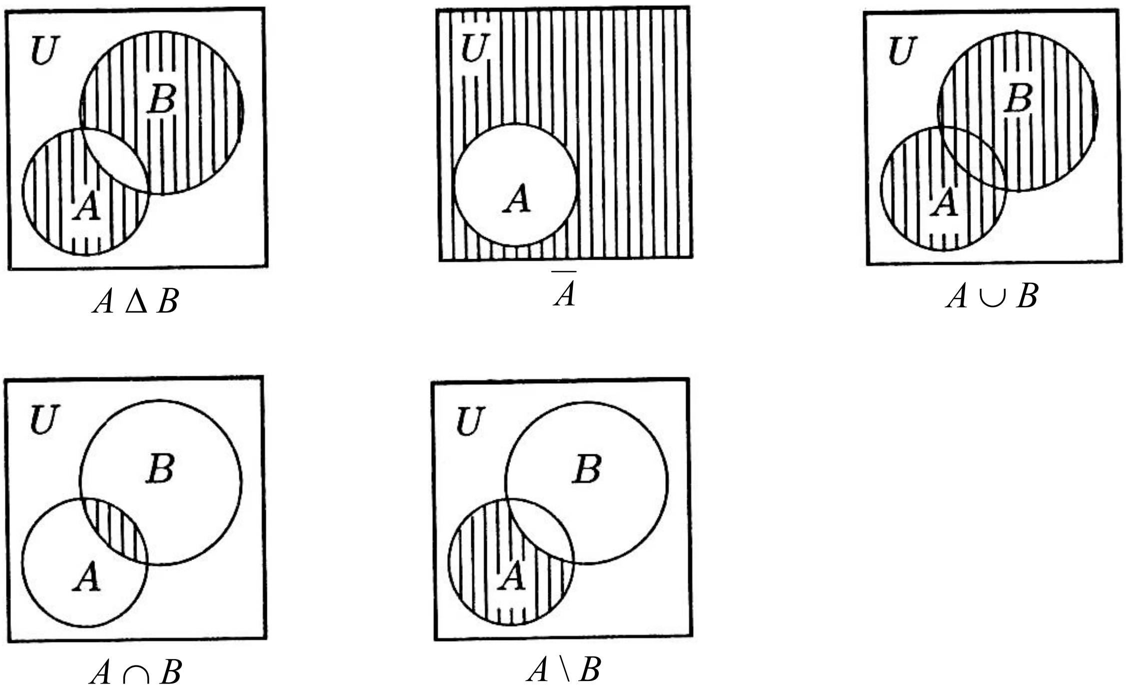


Рисунок 1 – Диаграммы Венна с операциями над множествами

Разбиением множества X называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств X таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному, и только одному из этих подмножеств.

Примеры разбиений множества.

Пример 14 – $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, тогда $\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$ – разбиение множества X.

Пример 15 – Пусть X – множество студентов университета. Тогда разбиением этого множества является, например, совокупность студенческих групп.

Задания для самостоятельной работы

1 Выяснить, какие из следующих утверждений имеют место:

а) $a \in a$;	д) $a \neq \{a\}$;	и) $\varnothing \neq \{\varnothing\}$;
б) $a \notin a$;	е) $\varnothing \in \varnothing$;	к) $\{a\} \subseteq a$.
в) $a \in \{a\}$;	ж) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;	
г) $a = \{a\}$;	з) $a \subseteq \{a\}$;	

2 Какие из приведенных соотношений верны (ответ обосновать):

а) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, 3\}$; $\{1, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

б) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \in \{\{1, 3\}\}$; $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

в) $3 \in \{\{1, 2, 3)\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

г) $1 \in \{1, \{2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

д) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $2 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

е) $2 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

ж) $3 \in \{\{1, 2\}, 3\}$; $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$;

з) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, 3\}$;

и) $\{3\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, \{3\}\} \in \{1, 2, \{3\}\}$;

к) $2 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{3\}\}$; $\{2, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

3 Какие из приведенных соотношений верны (ответ обосновать):

а) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$;

б) $\{1\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{2, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}\}$;

в) $2 \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{\{1\}, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}$; $\{1, \{3\}\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$;

г) $1 \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{2, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{1, \{2\}\} \subseteq \{1, 2, \{2,3\}\}$;

д) $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

е) $3 \subseteq \{1, 2, \{3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{2\} \subseteq \{\{1\}, 2, \{2, 3\}\}$;

ж) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}$;

з) $\{3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$; $\{2,3\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$;

и) $2 \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, 2,3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;

к) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{\{1\}, 2\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{3\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$.

4 Привести примеры множеств A, B, C, D и F, которые удовлетворяют заданным условиям:

а) $A \subset B, B \in C, C \subset D, D \subseteq F$;
б) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \subseteq F$;
в) $A \subseteq B, B \in C, C \subset D, D \in F$;
г) $A \subseteq B, B \in C, C \notin D, D \subseteq F$;
д) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \notin F$;
е) $A \in B, B \notin C, C \subset D, D \in F$;
ж) $A \subset B, B \in C, C \subseteq D, D \notin F$;
з) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \notin F$;
и) $A \in B, B \notin C, C \subseteq D, D \subseteq F$;
к) $A \notin B, B \in C, C \subseteq D, D \subseteq F$.

5 Определить, является ли утверждение правильным:

а) $A \in B, B \in C \Rightarrow A \in C$;
б) $A \in B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
в) $A \in B, B \subseteq C \Rightarrow A \in C$;
ж) $A \in B, B \in C \Rightarrow A \subseteq C$;
г) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
з) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \in C$;
д) $A \subseteq B, B \in C \Rightarrow A \in C$;
и) $A \notin B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$;
е) $A \subseteq B, B \in C \Rightarrow A \subseteq C$;
к) $A \subseteq B, B \notin C \Rightarrow A \notin C$.

Ответ следует обосновать. Если утверждение неправильное, вместе с контрпримером привести несколько примеров, для которых утверждение выполняется.

6 Для заданного множества A определить множество всех подмножеств множества A, т. е. булеан множества A:

а) $A=\{1, 2, \{3\}\}$;
б) $A=\{\varnothing, \{1\}, \{\varnothing\}\}$;
в) $A=\{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
г) $A=\{\varnothing, \{\varnothing\}, 1\}$;
д) $A=\{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$;
е) $A=\{1, \{2\}, 3\}$;
ж) $A=\{\varnothing, \{1\}, 2\}$;
з) $A=\{1, \varnothing, \{1, 2\}\}$;
и) $A=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$;
к) $A=\{1, \{\varnothing\}, \{1, 2\}\}$.

7 Пусть $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – универсальное множество, $A=\{1, 3, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C=\{2, 5, 7, 8\}$, $D=\{1, 4, 7, 9, 10\}$; определить, из каких элементов состоит множество:

а) $((A \cup B) \setminus D) \cap (A \setminus \overline{C})$;
б) $((A \cup C)\, \Delta\, (B \setminus \overline{C})) \cap D$;
в) $((B \setminus C)\, \Delta\, (D \cup \overline{C})) \cap A$;
г) $((A \cap \overline{B}) \cup C) \cap D$;
д) $(A\, \Delta\, B) \cap (D \cup \overline{C})$;
е) $((\overline{A \cup C}) \cup (\overline{A \cup B}))\, \Delta\, D$;
ж) $(D \setminus B) \cup (A \cap \overline{C})$;
з) $(B \setminus A) \cap (D \cup \overline{C})$;
и) $((B\, \Delta\, D) \setminus A) \cup (\overline{B \cup C})$;
к) $(A \setminus D)\, \Delta\, (B \cap \overline{C})$.

8 С помощью диаграмм Венна проверить правильность теоретико-множественных равенств:

а) $A \cap (B\, \Delta\, C) = (A \cap B)\, \Delta\, (A \cap C)$;
б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
е) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
ж) $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus ((A \cap B) \setminus C)$;
з) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$;
и) $A\, \Delta\, (B \setminus C) = ((A\, \Delta\, B) \setminus (A\, \Delta\, C)) \cup A \setminus (B\, \Delta\, C)$;
к) $A\, \Delta\, (B \cup C) = ((A\, \Delta\, B) \cup (A\, \Delta\, C)) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

2 Исследование свойств отношений

Основные теоретические положения

Бинарным отношением R называется множество упорядоченных пар. Если R есть некоторое отношение и пара (x, y) принадлежит этому отношению, то употребляется запись $(x, y) \in R$ или $x\ R\ y$. Элементы x и y называются координатами или компонентами (объектами) отношения R. Если x и y – компоненты (объекты), то через (x, y) обозначают упорядоченную пару. Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом: $(a, b) = (c, d)$:= $a = c$ и $b = d$ (:= – операция присваивания).

Областью определения бинарного отношения R называется множество $DomR = \{x \mid$существует такое y, что $x\ R\ y\}$. Областью значений бинарного отношения R называется множество $ImR = \{y \mid$ существует такое x, что $x\ R\ y\}$.

Так как бинарное отношение – множество, то способы задания бинарного отношения такие же, как и способы задания множества. Бинарное отношение может быть задано перечислением упорядоченных пар или указанием общего свойства упорядоченных пар.

Кроме того, бинарное отношение может быть задано матрицей бинарного отношения. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – конечное множество. Матрица бинарного отношения C есть квадратная матрица порядка n, элементы которой c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i R\, a_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 1 – $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Зададим бинарное отношение R тремя перечисленными способами.

1 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ – отношение задано перечислением всех упорядоченных пар.

2 $R = \{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j;\ a_i, a_j \in A\}$ – отношение задано указанием свойства «меньше» на множестве A.

3 Отношение задано матрицей отношения C:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть даны два множества X и Y. Прямым (декартовым) произведением двух множеств X и Y называется совокупность всех упорядоченных пар (x, y), таких, что $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначается прямое произведение множеств X и Y через $X \times Y$: $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$.

Каждое отношение R есть подмножество прямого произведения некоторых множеств X и Y таких, что $DomR \subseteq X$ и $ImR \subseteq Y$, т. е. $R \subset X \times Y$. Если $X = Y$, то говорят, что R есть отношение на множестве X, и тогда $R \subset X^2$.

Пример 2 – Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$. Тогда

$X \times Y = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$;

$Y \times X = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Пусть R есть отношение на множестве X. Введем понятия: обратное отношение: $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$; дополнение отношения: $\overline{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\}$; тождественное отношение: $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Композицией отношений R_1 и R_2

называется отношение $R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \mid$ существует y такое, что $(x, y) \in R_1$ и $(y, z) \in R_2\}$. Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

2) $R_2 \circ R_1 = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.

Пример 3 – $R = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$. $S = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$.

$R \circ S = \{(x, z) \mid$ существует такое y, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in S\} =$ $= \{(x, z) \mid$ существует такое y, что $y = \sin x$ и $z = \sqrt{y}\} = \{(x, z) \mid z = \sqrt{\sin x}\}$.

Отношение R называется *рефлексивным* на множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется $x\,R\,x$. Из определения следует, что всякий элемент $(x, x) \in R$.

Пример 4 – Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Отношение R рефлексивно. Если X – конечное множество, то главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы. Для данного примера

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5 – Пусть X – множество действительных чисел и R – отношение равенства. Это отношение рефлексивно, т. к. каждое число равно самому себе.

Отношение R называется *симметричным* на множестве X, если для любых $x, y \in X$ из $x\,R\,y$ следует $y\,R\,x$. Очевидно, что R симметрично тогда, и только тогда, когда $R = R^{-1}$.

Пример 6 – Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Отношение ρ симметрично. Если X – конечное множество, то матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7 – Пусть X – множество действительных чисел и R – отношение равенства. Это отношение симметрично, т. к. если x равно y, то и y равно x.

Отношение R называется *транзитивным* на множестве X, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ следует $x\,R\,z$. Одновременное выполнение условий $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $x\,R\,z$ означает, что пара (x, z) принадлежит композиции $R \circ R$. Поэтому для транзитивности R необходимо и достаточно, чтобы множество $R \circ R$ являлось подмножеством R, т. е. $R \circ R \subseteq R$.

Пример 8 – Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. Отношение R транзитивно, т. к. наряду с парами (x, y) и (y, z) имеется пара (x, z). Например, наряду с парами (1, 2) и (2, 3) имеется пара (1, 3).

Пример 9 – Пусть бинарное отношение R на множестве M задано в виде диаграммы, состоящей из узлов и стрелок так, что узлам взаимно однозначно соответствуют элементы множества M, а стрелкам, соединяющим пару a и b в направлении от a к b, – наличие отношения $a\ R\ b$. Определить графические особенности диаграммы в зависимости от характера свойств отношения R.

1 Отношение $R \subseteq M \times M$ рефлексивно, если $a\ R\ a$ для любых $a \in M$. Соответствующая диаграмма рефлексивного отношения должна содержать петли во всех узлах (то есть стрелки, начинающиеся и заканчивающиеся в одном узле).

2 Отношение R антирефлексивно, если ни для каких $a \in M$ не выполняется $a\ R\ a$. Диаграмма антирефлексивного отношения не должна содержать ни одной петли.

3 Отношение R симметрично, если из $a\ R\ b$ следует $b\ R\ a$. В диаграмме симметричного отношения для каждой стрелки, соединяющей два узла, существует также стрелка, соединяющая эти узлы в обратном направлении.

4 Отношение R антисимметрично, если из $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ следует $a = b$. В диаграмме антисимметричного отношения не существует двух различных узлов, связанных парой разнонаправленных стрелок.

5 Отношение R транзитивно, если из $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$ следует $a\ R\ c$. В диаграмме транзитивного отношения для любых двух стрелок таких, что одна направлена от a к b, а другая – от b к c, существует стрелка, соединяющая a и c в направлении от a к c.

Отношение эквивалентности – бинарное отношение, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Примеры отношений эквивалентности.

Пример 10 – Отношения равенства, параллельности прямых.

Пример 11 – Отношение между элементами множества всех многоугольников: «иметь одинаковое число сторон».

Пример 12 – Отношение принадлежности к одной студенческой группе на множестве студентов института – отношение эквивалентности.

Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x\ R\ y$ – класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]$:

$$[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x\ R\ y\}.$$

Пример 13 – Отношение равенства на множестве Z порождает следующие классы эквивалентности: для любого элемента $x \in Z$ $[x] = \{x\}$, т. е. каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента – числа x.

Пример 14 – Множества подобных друг другу треугольников в разных классах – треугольники разной формы.

Пример 15 – Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов этой группы.

Отношения порядка – важный тип бинарных отношений. **Отношение строгого порядка** – бинарное отношение, являющееся антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным. Примерами могут служить отношения «больше», «меньше», «старше» и т. п. Для чисел обычное обозначение – знаки < и >.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением частичного (нестрогого) порядка** на множестве X и обозначается символом $\leq$.

Примеры отношений частичного порядка.

Пример 16 – Отношение $x \leq y$ на множестве действительных чисел R есть отношение частичного порядка.

Пример 17 – Во множестве подмножеств некоторого универсального множества U отношение $A \subseteq B$ есть отношение частичного порядка.

Пример 18 – Схема организации подчинения в учреждении – отношение частичного порядка на множестве должностей.

Отношение частичного порядка на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, т. е. для любых x, $y \in X$ $x \leq y$ или $y \leq x$, называется отношением линейного порядка.

Примеры отношений линейного порядка.

Пример 19 – Отношение $x \leq y$ на множестве R есть отношение линейного порядка.

Пример 20 – Во множестве подмножеств некоторого универсального множества U отношение $A \subseteq B$ не является отношением линейного порядка.

Задания для самостоятельной работы

1 Каковы свойства отношений, заданных:

а) на множестве натуральных чисел N: R_1 – «быть не больше $\leq$»;

б) на множестве натуральных чисел N: R_2 – «быть делителем»;

в) на множестве натуральных чисел N: R_3 – «быть равным»;

г) на множестве точек действительной плоскости $\Re \times \Re$: R_4 – «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»;

д) на множестве точек действительной плоскости $\Re \times \Re$: R_5 – «быть симметричным относительно оси X»;

е) на системе множеств 2^M: R_6 – «пересекаться с …» (иметь непустое пересечение);

ж) на системе множеств 2^M: R_7 – «являться строгим включением с …»;

з) на множестве людей: R_8 – «быть сыном»;

и) на множестве людей: R_9 – «жить в одном городе»;

к) на множестве людей: R_{10} – «быть братом»;

л) на множестве элементов структуры (рисунок 2): R_{11} – «быть непосредственно связанным с …»;

м) на множестве элементов структуры (см. рисунок 2): R_{12} – «быть начальником».

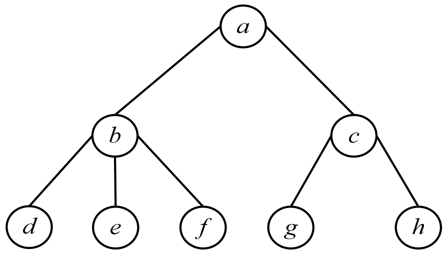


Рисунок 2 – Структура элементов множества

2 Определить, является ли отношение R на множестве $B = \{1, 2, 3, 4\}$ симметричным, антисимметричным, рефлексивным, антирефлексивным, транзитивным, полным; построить диаграмму, график и матрицу отношения R, если:

а) $R = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$;

б) $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

в) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

г) $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

д) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 4), (4,1)\}$;

е) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

ж) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

з) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$;

и) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$;

к) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 4)\}$.

3 Пусть заданы множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, а также отношения между A и B, B и G:

$C_1 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 2), (d, 3)\}$;

$C_2 = \{(b, 3), (b, 5), (c, 1), (c, 4), (d, 1), (d, 4), (d, 5)\}$;

$C_3 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 2), (d, 4)\}$;

$D_1 = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \gamma), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \beta)\}$;

$D_2 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (4, \alpha), (4, \gamma)\}$;

$D_3 = \{(1, \beta), (2, \alpha), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (4, \beta), (4, \gamma), (5, \beta)\}$.

Определить композицию отношений:

а) $C_1 \circ (D_3 \circ D_1^{-1})$;

б) $C_3 \circ C_1^{-1}$;

в) $C_2 \circ C_1^{-1}$;

г) $C_2 \circ (D_1 \circ D_3^{-1})$;

д) $C_2 \circ (D_1 \circ D_2^{-1})$;

ж) $C_3 \circ (D_2 \circ D_1^{-1})$;

з) $D_3^{-1} \circ C_1^{-1}$;

е) $C_3 \circ C_2^{-1}$;

и) $D_1^{-1} \circ C_2^{-1}$;

к) $C_1 \circ (D_1 \circ D_1^{-1})$.

4 Пусть на множестве P людей (см. рисунок 2) определены отношения:

$F = \{(x, y) \mid x, y \in P, x$ является отцом $y\}$;

$D = \{(x, y) \mid x, y \in P, x$ является сыном $y\}$.

Построить диаграмму и дать содержательное описание отношения:

а) $F \circ F$;

б) $D \circ D$;

в) $F \circ D$;

г) $D \circ F$;

д) $D \circ F^{-1}$;

е) $F^{-1} \circ D$;

ж) $F \circ D^{-1}$;

з) $F^{-1} \circ D^{-1}$;

и) $D^{-1} \circ F$;

к) $D^{-1} \circ D^{-1}$.

3 Операции над графами

Основные теоретические положения

Пусть $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$ – произвольные графы. Объединением $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $X_1 \cup X_2$ и с множеством ребер (дуг) $E_1 \cup E_2$.

Рассмотрим операцию на примере графов $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$, приведенных на рисунке 3. Множества вершин первого и второго графов определяются как $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$, а множество вершин результирующего графа – $X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Аналогично определяем множества дуг графа:

$E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3)\}$; $E_2 = \{(x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$;

$E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$.

Результирующий граф $G(X, E) = G_1(X_1, E_1) \cup G_2(X_2, E_2)$ также приведен на рисунке 3.

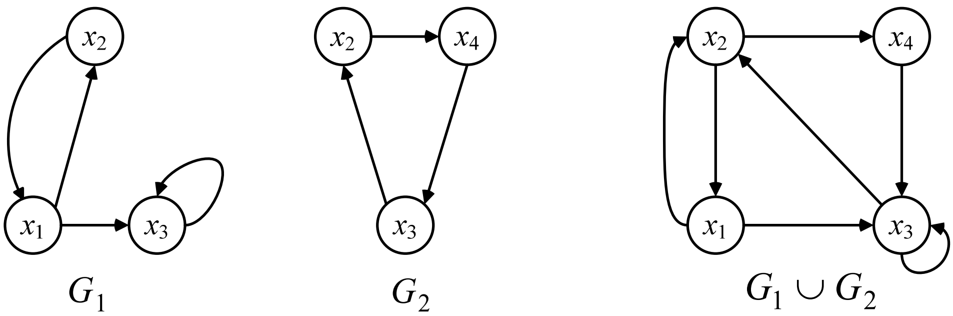


Рисунок 3 – Операция объединения графов

Операция объединения обладает следующими свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$ – свойство коммутативности;

$G_1 \cup (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cup G_2) \cup G_3$ – свойство ассоциативности.

Операция объединения графов может быть выполнена в матричной форме.

Пусть $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$ – произвольные графы. Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $X_1 \cap X_2$, с множеством ребер (дуг) $E = E_1 \cap E_2$.

Операция пересечения обладает свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$– свойство коммутативности;

$G_1 \cap (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cap G_2) \cap G_3$ – свойство ассоциативности.

Для того чтобы операция пересечения была всеобъемлющей, необходимо ввести понятие пустого графа. Граф $G(X, E)$ называется пустым, если множество X вершин графа является пустым ($X = \varnothing$). Заметим, что в этом случае и множество E ребер (дуг) графа также пустое множество ($E = \varnothing$). Пустой граф обозначается символом $\varnothing$. Такой граф может быть получен в результате выполнения операции пересечения графов, у которых $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. В этом случае говорят о непересекающихся графах.

Рассмотрим выполнение операции пересечения графов, изображенных на рисунке 3. Для нахождения множества вершин результирующего графа запишем множества вершин исходных графов и выполним над этими множествами операцию пересечения:

$X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; $X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$;

$X = X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Аналогично определяем множество E дуг результирующего графа:

$E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$;

$E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_1)\}$;

$E = E_1 \cap E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1)\}$.

Графы $G_1(X_1, E_1)$, $G_2(X_2, E_2)$ и их пересечение приведены на рисунке 4.

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

Пусть $G_1(X, E_1)$ и $G_2(X, E_2)$ – два графа с одним и тем же множеством вершин X. Композицией $G_1(G_2)$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством дуг E, в котором существует дуга (x_i, x_j) тогда, и только тогда, когда существует дуга (x_i, x_k), принадлежащая множеству E_1, и дуга (x_k, x_j), принадлежащая множеству E_2.

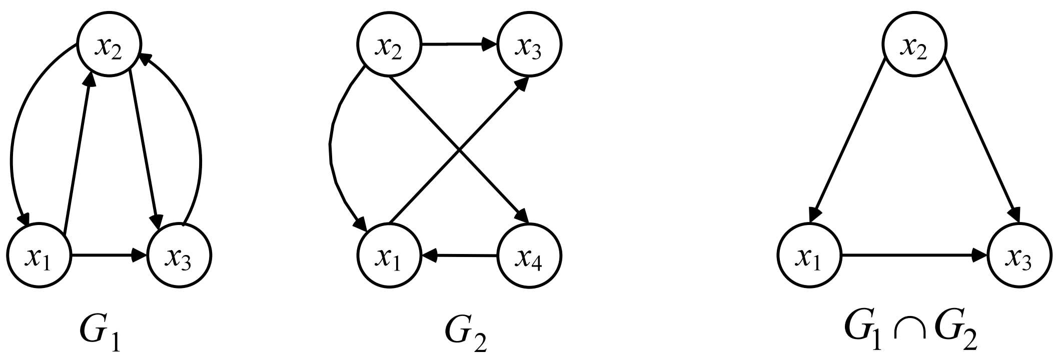


Рисунок 4 – Операция пересечения графов

Рассмотрим выполнение операции композиции $G_1(G_2)$ на графах, изображенных на рисунке 5. Для рассмотрения операции составим таблицу 1, в первом столбце которой указываются дуги (x_i, x_k), принадлежащие графу G_1, во втором – дуги (x_k, x_j), принадлежащие графу G_2, а в третьем – результирующее ребро (x_i, x_j) для графа $G_1(G_2)$.

Заметим, что дуга (x_1, x_3) результирующего графа в таблице встречается дважды. Однако поскольку рассматриваются графы без параллельных ребер (дуг), то в множестве E результирующего графа дуга (x_1, x_3) учитывается только один раз, т. е. $E = \{(x_1, x_1), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3)\}$.

Таблица 1 – Композиция графов

G_1	G_2	$G_1(G_2)$
(x_1, x_2)	(x_2, x_1) (x_2, x_3)	(x_1, x_1) (x_1, x_3)
(x_1, x_3)	(x_3, x_3)	(x_1, x_3)
(x_2, x_1)	(x_1, x_1) (x_1, x_3)	(x_2, x_1) (x_2, x_3)

На рисунке 5 изображены графы G_1, G_2 и их композиция $G_1(G_2)$. На этом же рисунке изображен граф $G_2(G_1)$. Рекомендуется самостоятельно построить граф $G_2(G_1)$ и убедиться, что графы $G_1(G_2)$ и $G_2(G_1)$ неизоморфны.

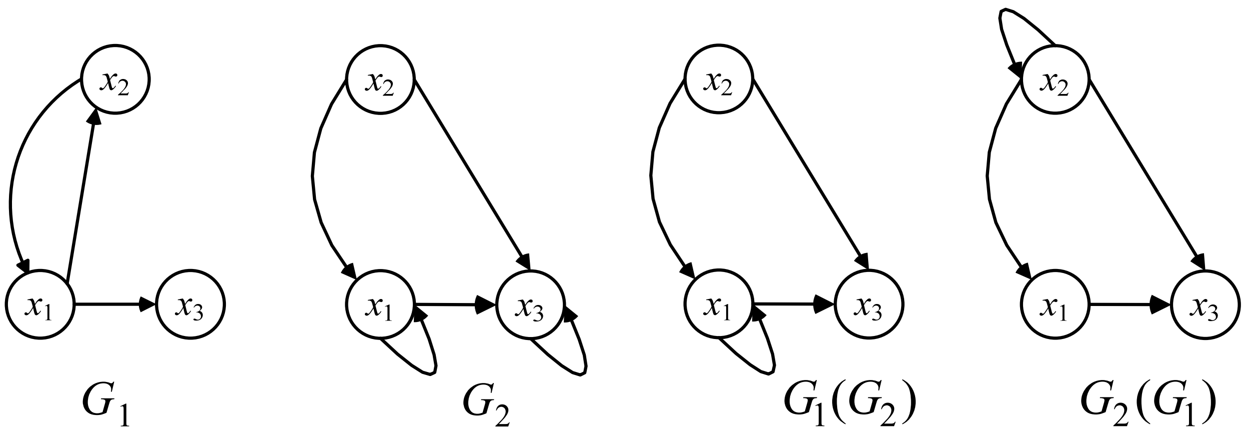


Рисунок 5 – Композиции графов

Пусть $G = (V, E)$ – орграф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Матрицей достижимости орграфа G называется квадратная матрица $T(G) = [t_{ij}]$ порядка n, у которой $t_{ij} = 1$, если вершина v_j достижима из v_i, и $t_{ij} = 0$ – в противном случае.

Матрицей сильной связности орграфа G называется квадратная матрица $S(G) = [s_{ij}]$ порядка n, у которой $s_{ij} = 1$, если вершина v_i достижима из v_j и одновременно вершина v_j достижима из v_i, и $s_{ij} = 0$ – в противном случае, т. е. $s_{ij} = 1$ тогда, и только тогда, когда вершины v_i, v_j принадлежат одной компоненте сильной связности орграфа G.

Пусть $G = (V, E)$ – орграф, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Матрицей связности графа G называется квадратная матрица $S(G) = [s_{ij}]$ порядка n, у которой $s_{ij} = 1$, если $i = j$ или существует маршрут, соединяющий вершины v_i, v_j, и $s_{ij} = 0$ – в противном случае (т. е. $s_{ij} = 1$ тогда, и только тогда когда вершины v_i, v_j принадлежат одной компоненте связности орграфа G).

Задания для самостоятельной работы

Даны графы G_1 и G_2. Найти $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1\ (G_2)$, $G_2\ (G_1)$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найти матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент (рисунок 6).

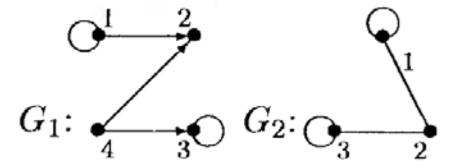
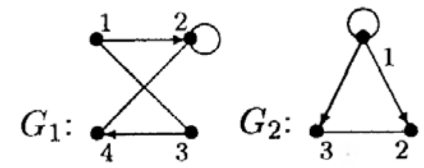
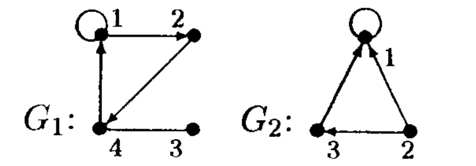
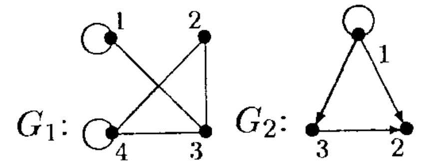
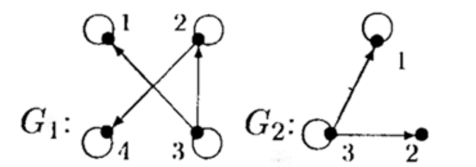
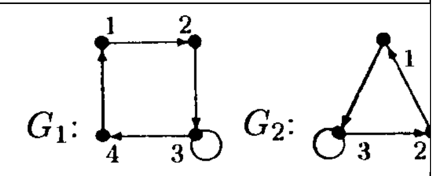
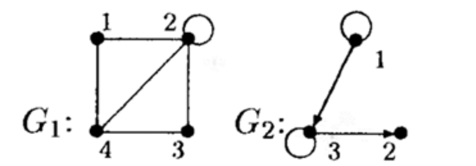
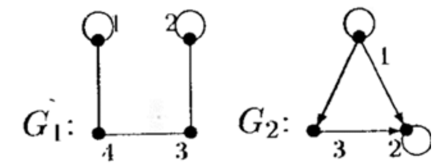
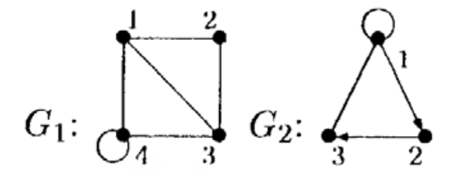
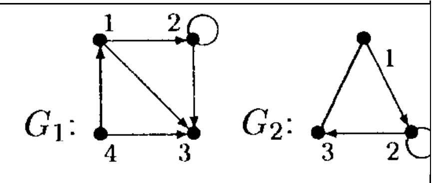
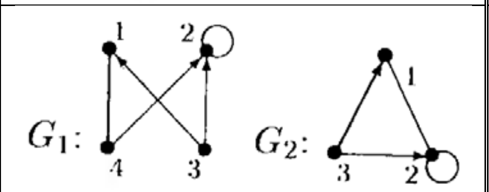
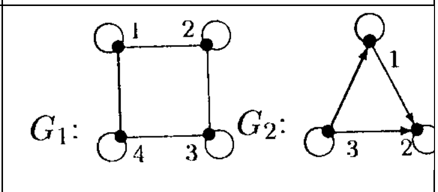
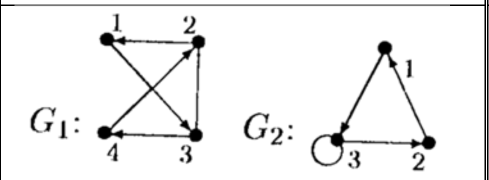
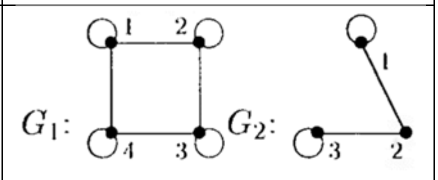
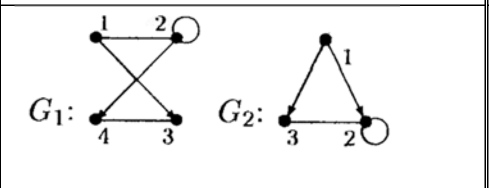
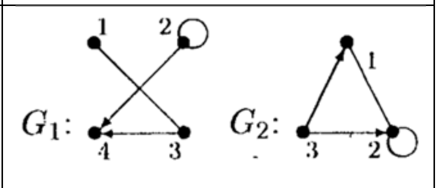
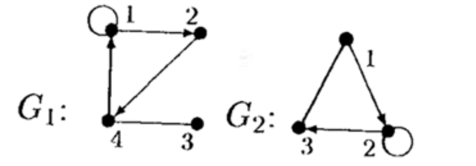
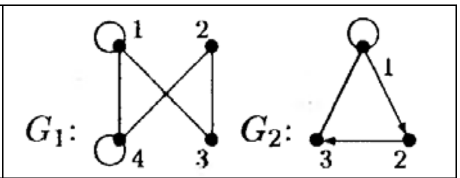
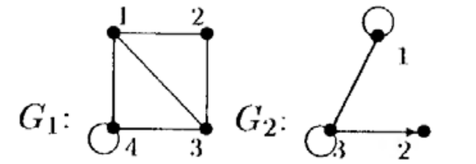
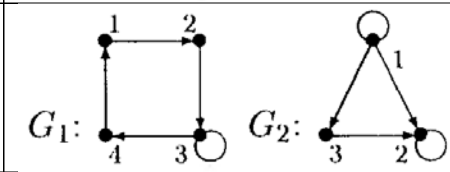
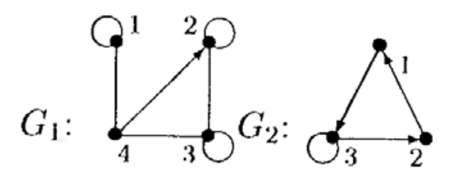
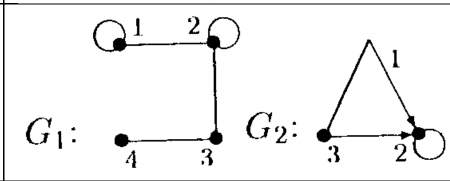
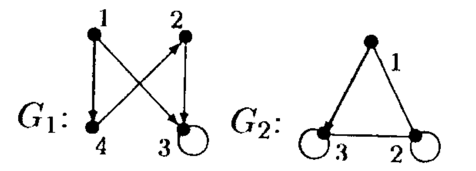
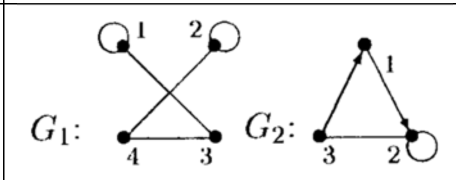
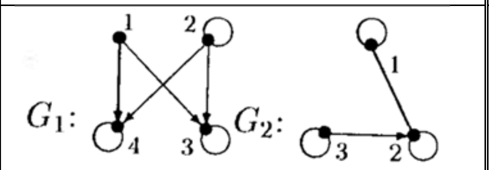
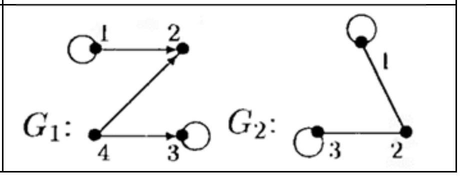
Вариант	Графы G_1 и G_2	Вариант	Графы G_1 и G_2
1		**9**	
2		**10**	
3		**11**	
4		**12**	
5		**13**	
6		**14**	
7		**15**	
8		**16**	

Рисунок 6 – Варианты контрольных заданий

17		**22**	
18		**23**	
19		**24**	
20		**25**	
21		**26**	

Окончание рисунка 6

4 Решение задач теории графов в системе компьютерной алгебры

Основные теоретические положения

Система Maple хорошо зарекомендовала себя при изучении учебных дисциплин, позволяя решать задачи, связанные с графами. Некоторые команды, реализуемые в Maple (использование функций):

Graph() – для задания графа;

CompleteGraph() – для создания полного графа;

DrawGraph(G,style=cycle) – для соединения графа по контуру;

New(G) – для создания пустого графа;

RandomGraph(G) – для создания случайного графа;

Graph ([количество вершин]) – для создания графа без ребер;

AddEdge(G,{},inplace=false) – для добавления ребер в граф, третий оператор необязателен. Он используется, если измененный граф не нужно сохранять и распечатывать;

AddVertex(G,[]) – для добавления вершин в граф;

DeleteEdge(G,{})/Vertex(G,[]) – для удаления ребер и вершин из графа;

DrawGraph(G) – для построения графа;

GraphUnion(G1,G2) – для объединения двух графов;
AdjacencyMatrix(G) – для нахождения матрицы смежности;
IncidenceMatrix(G) – для нахождения матрицы инцидентности;
WeightMatrix(G) – для нахождения весов ребер;
IsNetwork(G) – для нахождения начальных и конечных вершин;
DijkstrasAlgoritm(G, 's', 't') – для нахождения кратчайшего расстояния, где **s** – начало, **t** – конец маршрута.

Для работы с графами в Maple предназначена библиотека *GraphTheory*. Команда подключения этой библиотеки стандартная, т. е. достаточно воспользоваться оператором with в Maple 14:

>*with*(*GraphTheory*):

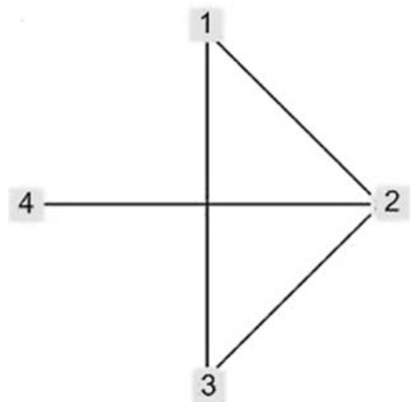
Двоеточие после функции ставится в случае, если не требуется отображать ее результат. В этом случае функция все равно выполняется.

Создадим граф с четырьмя вершинами и четырьмя дугами

>*G* := *Graph*({{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}});

Построим заданный граф.

>*DrawGraph*(*G*);

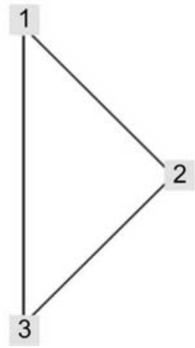


Теперь удалим четвертую вершину.

>*G* := *DeleteVertex*(*G*, [4]); – присваивание осуществляется для сохранения нового графа с удаленными вершинами. Можно осуществлять данную процедуру без присваивания *DeleteVertex*(*G*, [4]), тогда программа сделает копию данного графа, удалит его вершины, но построить мы его не сможем.

Построим то, что получилось.

>*DrawGraph*(*G*);



Теперь добавим четвертую, пятую, шестую и седьмую вершины

>*G* := *AddVertex*(*G*, [4, 5, 6, 7]);

Проверим, сколько теперь вершин содержит граф *G*:

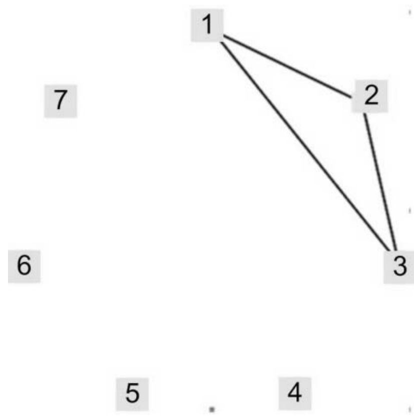
>*Vertices*(*G*);

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

Внизу функции видны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Это означает, что добавленные вершины принадлежат графу.

Далее построим граф с добавленными вершинами. Для наглядности построим граф, вершины которого стоят по кругу.

>*DrawGraph*(*G, style=circle*);



Добавим новые ребра 1–7, 5–6, 2–5, 3–5, 4–7:

>*AddEdge*(*G*, {{1, 7}, {2, 5}, {3, 5}, {4, 7}, {5, 6}});

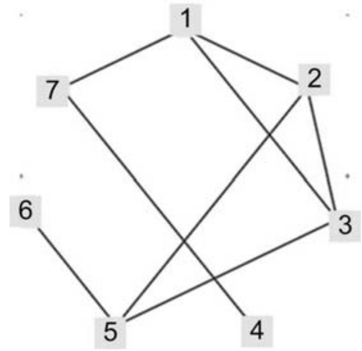
Проверим количество вершин и ребер графа:

>*G*;

Graph 3: an undirected unweighted graph with 7 vertices and 8 edge(s)

Видно, что граф теперь состоит из семи вершин и восьми ребер.
Построим полученный граф.

>*DrawGraph*(*G*, *style=circle*);



Теперь посмотрим, сколько вершин в графе и какие они имеют номера.

>*Vertices*(*G*);

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Внизу функции через запятую перечислены вершины.

Таким образом создаются и удаляются вершины и ребра в графе. Если необходимо переопределить граф, то следует сначала удалить ненужные вершины и ребра, а затем добавить новые, т. к. программа сохраняет все внесенные ранее изменения. Даже если Вы допустили ошибку в добавлении или удалении вершин/ребер и уже создали новый измененный граф, то после удаления ненужного (ошибочного) кода программы тот граф все равно сохранится и в дальнейшем могут возникать ошибки после его исправления.

Рассмотрим действия с весами ребер.

Создадим новый граф *P*:

>*P* :=*Graph*({{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}});

Данный граф еще не взвешенный. Создадим матрицу весов, которые следует добавить на ребра графа:

>*M* := *Matrix*([[0, 2, 3], [2, 0, 1], [3, 1, 0]]);

Внизу функции появилась матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

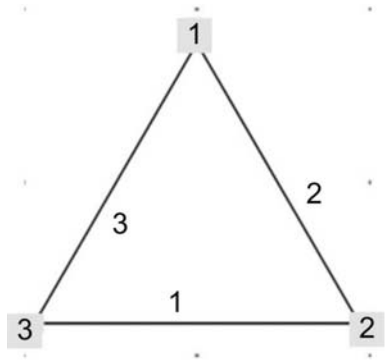
Создадим взвешенный граф *H1*, состоящий из вершин и ребер исходного графа *P*, но с указанием весов ребер, указанных в матрице *M*.

>*H1* := *MakeWeighted*(*P*, *M*);

После ввода функции видно, что граф стал взвешенным:

Graph 6: an undirected weighted graph with 3 vertices and 3 edge(s)

>*DrawGraph*(*H1*);



Теперь объединим два графа в один. Для этого создадим графы *G1* и *G2*.

>*G1* := *Graph*({{1, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {1, 3}});

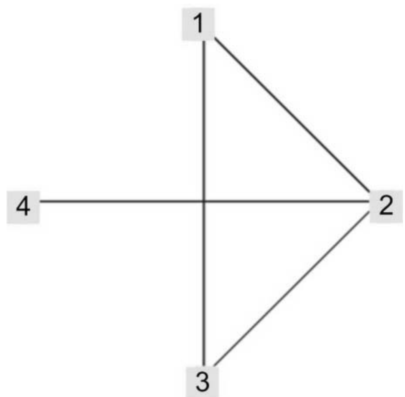
Graph 7: an undirected unweighted graph with 4 vertices and 4 edge(s)

>*G2* := *Graph*({{2, 5}, {2, 4}, {1, 3}, {4, 5}});

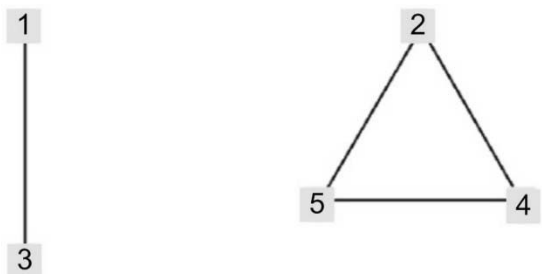
Graph 8: an undirected unweighted graph with 5 vertices and 4 edge(s)

Нарисуем эти графы.

>*DrawGraph*(*G1*);



>*DrawGraph*(*G2*);

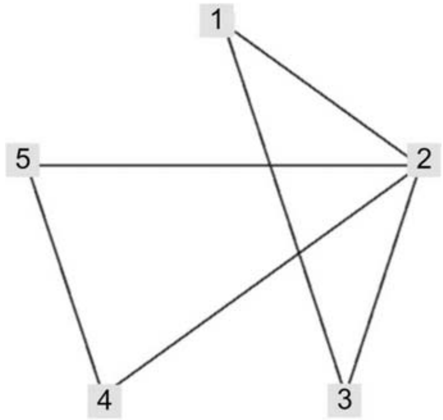


Объединим эти графы в граф *H* и нарисуем полученный граф.

>*H*:=*GraphUnion*(*G1*,*G2*);

Graph 9: an undirected unweighted graph with 5 vertices and 6 edge(s)

>*DrawGraph*(*H*);



Найдем максимальный поток в графе, используя функцию MaxFlow(*N*, ‘*s*’, ‘*t*’), где *N* – граф, *s* – начало графа, *t* – конец.

Создадим ориентированный граф, для начала определим матрицу весов ребер:

>*A* := *Matrix*([[0, 1, 0, 4, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 3, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 3, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 4], [0, 0, 0, 0, 0, 0]]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Создаем орграф *N* с помощью функции *Digraph*(*A*, *weighted*), с помощью функции *IsNetwork*(*N*) проверяем начальную и конечную вершину:

>*N*:=*Digraph*(*A*, *weighted*);

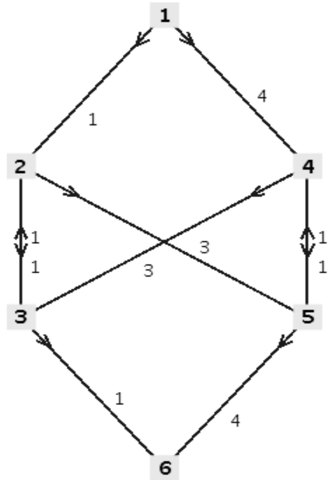
Graph 14: a directed weighted graph with 6 vertices and 10 edge(s)

>*Isnetwork*(*N*);

$$\{1\}, \{6\}$$

Построим граф *N*:

>*DrawGraph*(*N*);



Найдем максимальный поток орграфа:

>*MaxFlow*(*N*, *1*, *6*);

$$4, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Создадим взвешенный граф *C*:

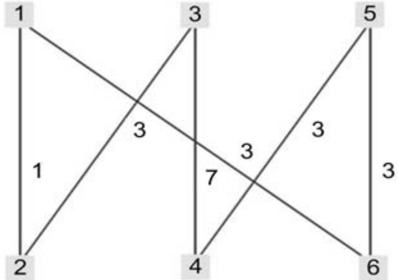
>*C* := *Graph*({[{1, 2}, 1], [{1, 6}, 3], [{2, 3}, 3], [{3, 4}, 7], [{4, 5}, 3], [{5, 6}, 3]});

С помощью функции DijkstrasAlgorithm(*C*, 1, 4) найдем кратчайший путь от первой до четвертой вершины:

>*DijkstrasAlgorithm*(*C*, 1, 4);

$$[[1, 6, 5, 4], 9]$$

>*DrawGraph*(*C*);



Если надо проверить путь от определенной вершины до каждой, то в скобках, помимо исходного графа, указываем номер вершины, от которой ищут кратчайший путь.

>*DijkstrasAlgorithm*(*C*, 1);

[[[1],0], [[1,2],1] [[1,2,3],4], [[1,6,5,4],9], [[1,6,5],6], [[1,6],3];

Задания для самостоятельной работы

На заданной сети указаны пропускные способности ребер (рисунок 7). Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы. Требуется: сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока *I* в сток *S*; выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности; проверить решение в системе Maple 14.

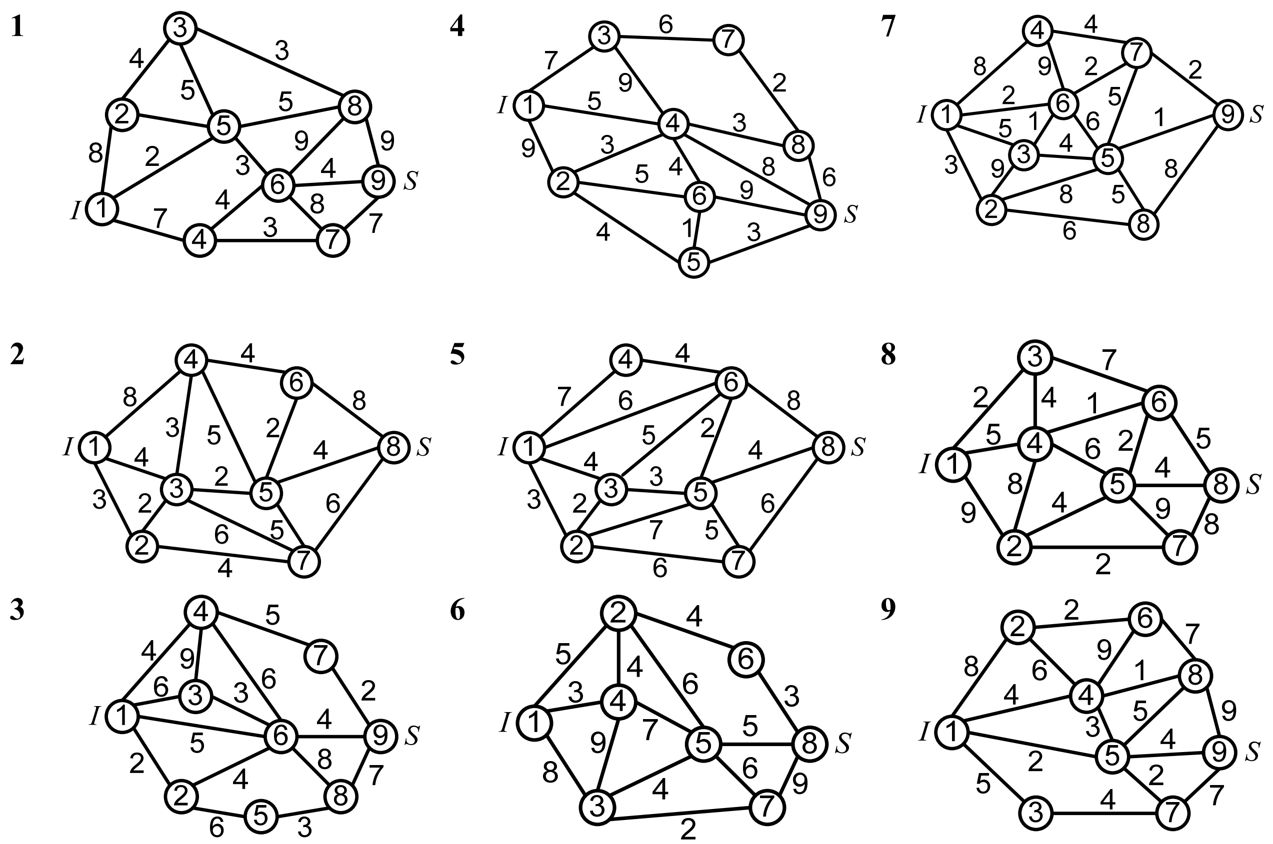


Рисунок 7 – Варианты контрольных заданий

5 Исследование полноты системы булевых функций

Основные теоретические положения

Как известно, *алгеброй* называют систему, включающую в себя некоторое непустое множество объектов с заданными на нем функциями (операциями), результатами применения которых к объектам данного множества являются объекты того же множества.

Булевой алгеброй или алгеброй логики называется двухэлементное множество $B = \{0, 1\}$ вместе с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена в виде суперпозиции этих функций. Все логические операции могут быть выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому система функций $\{\neg, \&, \vee\}$ является полной. Также полными являются следующие системы функций:

а) $\{\neg, \vee\}$;

б) $\{\neg, \&\}$;

в) $\{\neg, \rightarrow\}$.

Полнота систем $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \&\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \&, \vee\}$, а также законов де Моргана и двойного отрицания, следствием которых является возможность выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и наоборот: $A\&B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$; $A \vee B \equiv \neg(\neg A \ \& \ \neg B)$. Поэтому система $\{\neg, \&, \vee\}$ может быть сокращена на одну функцию.

Полнота системы $\{\neg, \rightarrow\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \vee\}$ и равносильности, позволяющей выразить импликацию через отрицание и дизъюнкцию: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

Пусть дан класс функций B (то есть конечное или бесконечное множество функций), объединенных по общему признаку. Замыканием этого класса (обозначение – $[B]$) будем называть множество всех суперпозиций функций из класса B. Класс B будем называть замкнутым, если его замыкание совпадает с ним самим $B = [B]$.

Рассмотрим классы функций, которые являются замкнутыми.

Класс T_0 – класс функций, сохраняющих константу 0:

$$f(\tilde{x}^n) \in T_0 \Leftrightarrow f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Класс T_1 – класс функций, сохраняющих константу 1:

$$f(\tilde{x}^n) \in T_1 \Leftrightarrow f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Класс S – класс самодвойственных функций:

$$f(\tilde{x}^n) \in S \Leftrightarrow f(\tilde{x}^n) = f^*(\tilde{x}^n).$$

Функция $\overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}$ называется двойственной к $f(\tilde{x}^n)$, обозначается $f^*(\tilde{x}^n)$, т. е. $f^*(\tilde{x}^n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ \ldots, \bar{x}_n)}$.

Класс M – класс монотонных функций:

$$f(\tilde{x}^n) \in M \Leftrightarrow \forall\ \alpha, \beta \in P_2^n, \text{ таких, что } \alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta).$$

На множестве наборов значений переменных P_2^n введем отношение порядка $\le$, называемое отношением предшествования (отношением сравнимости), следующим образом: $\alpha \le \beta$, если $\alpha_i \le \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Класс L – класс линейных функций:

$$f(\tilde{x}^n) \in L \Leftrightarrow f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i x_i \oplus a_0,$$

представимых полиномом Жегалкина не выше первой степени.

Теорема Поста. Система функций полна тогда, и только тогда, когда она не находится ни в одном из пяти важнейших замкнутых классов, а именно S, M, L, T_0, T_1.

Пример 1 – Исследовать полноту системы $A = \{f_1 = x \oplus y,\ f_2 = xy \oplus z, f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ f_4 = xy \oplus yz \oplus zx\}$.

Решение

Исследование на принадлежность функций классам T_0, T_1, L, S, M:

1) f_1, f_2, $f_4 \in T_0$, т. к. $f_1(0, 0) = 0 \oplus 0 = 0$, $f_2(0, 0) = 0 \wedge 0 \oplus 0 = 0$, $f_4(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \oplus 0 \wedge 0 \oplus 0 \wedge 0 = 0$; $f_3 \notin T_0$, т. к. $f_3(0, 0, 0) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$;

2) f_1, f_2, $f_3 \notin T_1$, т. к. $f_1(1,1) = 1 \oplus 1 = 0$, $f_2(1,1) = 1 \wedge 1 \oplus 1 = 0$, $f_3(1, 1,1) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$; $f_4 \in T_1$, т. к. $f_4(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 = 1$;

3) $f_1, f_3 \in L$, т. к. $f_1 = x \oplus y$, $f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$ – представимы полиномом Жегалкина первой степени; f_2, $f_4 \notin L$, т. к. $f_2 = xy \oplus z$, $f_4 = xy \oplus yz \oplus zx$ – представимы полиномом Жегалкина второй степени;

4) $f_3, f_4 \in S$, т. к. $f_3^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) = f_3(\tilde{x}^3)$, $f_4^*(\tilde{x}^3) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) = f_4(\tilde{x}^3)$;

$f_1, f_2 \notin S$, т. к. $f_1^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \ne f_1(\tilde{x}^3)$,

$f_2^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \ne f_2(\tilde{x}^3)$;

5) f_1, f_2, $f_3 \notin M$, т. к. f_1: $(0, 0, 1, 1) \not\le (1, 1, 0, 0)$, f_2: $(0, 1, 0, 1) \not\le (0, 1, 1, 0)$, f_3: $(1, 0, 0, 1) \not\le (0, 1, 1, 0)$; $f_4 \in M$, т. к. f_4: $(0, 0, 0, 1) \le (0, 1, 1, 1)$; $(0, 0) \le (0, 1)$ и $(0,1) \le (1, 1)$; $0 \le 0$ и $0 \le 1$, и $1 \le 1$.

Результаты исследования на принадлежность функций каждому из пяти классов отображены в критериальной таблице (таблица 2).

Таблица 2 – Критериальная таблица Поста

Функция	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	–
f_3	–	–	+	+	–
f_4	+	+	–	+	+

Вывод: система функций A является полной, т. к. в каждом из столбцов критериальной таблицы Поста есть хотя бы один «–».

Задания для самостоятельной работы

Доказать, является ли система булевых функций полной при:

а) $\{\to, 0\}$;

б) $\{\wedge, \oplus, 1\}$;

в) $\{\to, 1\}$;

г) $\{|\}$, где $x \mid y = \neg(x \wedge y)$ – штрих Шеффера;

д) $\{\downarrow\}$, где $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ – стрелка Пирса;

е) $\{\to, \oplus\}$;

ж) $\{\equiv, \wedge, 0\}$;

з) $\{xy \vee xz \vee \vee yz, \neg x\}$;

и) $\{\oplus, 1\}$;

к) $\{\oplus, \vee, 0\}$;

л) $\{xy, (x \equiv y) \equiv z\}$;

м) $\{\to, \mapsto\}$, где $x \mapsto y = \neg(x \to y)$;

н) $\{\mapsto, \neg\}$;

о) $\{\mapsto, \equiv\}$;

п) $\{\vee, \neg\}$.

6 Минимизация функций булевой алгебры

Задача минимизации булевых функций.

Задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют задачей минимизации. Решение такой задачи основывается на понятии несущественности переменных. Переменная называется несущественной на паре наборов, если при изменении ее значения на противоположное булева функция сохраняет свое значение. Две конъюнкции, содержащие несущественную переменную, заменяются одной, в которой несущественная переменная отсутствует.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***кратчайшей***, если она содержит наименьшее число элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***минимальной***, если она имеет наименьшее число аргументов среди всех эквивалентных ей ДНФ.

Импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что $K \vee f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Импликанта называется ***простой***, если при отбрасывании любого аргумента из K получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется ***сокращенной*** ДНФ функции f.

ДНФ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***тупиковой***, если отбрасывание любого слагаемого или аргумента приводит к неэквивалентной ДНФ.

Тупиковая ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ получается из сокращенной ДНФ этой функции путем отбрасывания некоторых элементарных конъюнкций. Среди тупиковых ДНФ находят минимальную и кратчайшую ДНФ функции.

Метод неопределенных коэффициентов.

Данный метод может быть применен для минимизации функций алгебры логики от любого числа аргументов, однако для простоты изложения и большей наглядности его рассмотрение будем производить на примере минимизации функции трех аргументов.

Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде следующей ДНФ:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & k_1^0\bar{x}_1 \vee k_1^1 x_1 \vee k_2^0\bar{x}_2 \vee k_2^1 x_2 \vee k_3^0\bar{x}_3 \vee k_3^1 x_3 \vee k_{12}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \\ & \vee k_{12}^{01}\bar{x}_1 x_2 \vee k_{12}^{10} x_1\bar{x}_2 \vee k_{12}^{11} x_1 x_2 \vee k_{13}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee k_{13}^{01}\bar{x}_1 x_3 \vee k_{13}^{10} x_1\bar{x}_3 \vee k_{13}^{11} x_1 x_3 \vee \\ & \vee k_{23}^{00}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{23}^{01}\bar{x}_2 x_3 \vee k_{23}^{10} x_2\bar{x}_3 \vee k_{23}^{11} x_2 x_3 \vee k_{123}^{000}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{001}\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \\ & \vee k_{123}^{010}\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{011}\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee k_{123}^{100} x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{101} x_1\bar{x}_2 x_3 \vee k_{123}^{110} x_1 x_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{111} x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь представлены все возможные конъюнктивные члены, которые могут входить в дизъюнктивную форму представления $f(x_1, x_2, x_3)$. Коэффициенты k с различными индексами являются неопределенными и подбираются так, чтобы получающаяся после этого дизъюнктивная форма была минимальной. Если теперь задавать все возможные наборы аргументов (x_1, x_2, x_3) и приравнивать полученное после этого выражение (отбрасывая нулевые конъюнкции) значению функции на выбранных наборах, то получим систему из 2^3 уравнений для определения коэффициентов k:

$$\begin{cases} k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = f(0,0,0); \\ k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{001} = f(0,0,1); \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{010} = f(0,1,0); \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{011} = f(0,1,1); \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = f(1,0,0); \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{101} = f(1,0,1); \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{110} = f(1,1,0); \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{111} = f(1,1,1). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть таблично задана некоторая функция $f(x_1, x_2, x_3)$. Задание некоторой конкретной функции определяет значения правых частей системы (2): $f(x_1, x_2, x_3) = 0 \vee 1$. Если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ на соответствующем наборе переменных равна нулю, то все коэффициенты, входящие в уравнение, будут равны нулю. Это вытекает из того, что дизъюнкция равна нулю только тогда, когда все члены, входящие в нее, равны нулю.

Рассмотрев все наборы, на которых данная функция обращается в нуль, получим все нулевые коэффициенты k. В уравнениях, в которых справа стоят единицы, вычеркнем все нулевые коэффициенты. Из оставшихся коэффициентов приравняем единице коэффициент, определяющий конъюнкцию наименьшего возможного ранга, а остальные коэффициенты в левой части данного уравнения примем равными нулю (это можно сделать, т. к. дизъюнкция обращается в единицу, если хотя бы один член ее равен единице). Единичные коэффициенты k определят из (1) соответствующую ДНФ.

Пример 1 – $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Составим систему (2):

$$\begin{cases} k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = 1; \\ k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{001} = 0; \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{010} = 0; \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{011} = 0; \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{101} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{110} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{111} = 1. \end{cases}$$

Из второго, третьего и четвертого уравнений в силу свойств дизъюнкции вытекает, что

$$k_1^0 = k_2^0 = k_2^1 = k_3^0 = k_3^1 = k_{12}^{00} = k_{12}^{01} = k_{13}^{00} = k_{13}^{01} = k_{23}^{01} = k_{23}^{10} = k_{23}^{11} = k_{123}^{001} = k_{123}^{010} = k_{123}^{011} = 0.$$

Таким образом, данная система имеет вид:

$$\begin{cases} k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{123}^{101} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{10} \vee k_{123}^{110} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{123}^{111} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} k_{23}^{00} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{23}^{00} = 1; \\ k_1^1 = 1; \\ k_1^1 = 1; \\ k_1^1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим минимальную ДНФ для данной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Описанный метод эффективен лишь для минимизации функций, число аргументов в которых не больше пяти-шести.

Правила минимизации с использованием диаграмм Вейча (карт Карно).

В диаграммах Вейча (картах Карно) таблица истинности булевой функции представляется в виде координатной карты состояний, которая содержит 2^n клеток (по числу входных наборов булевой функции n переменных). Переменные функции разбиваются на две группы так, что одна группа определяет координаты столбца карты, а другая – координаты строки.

При таком способе построения каждая клетка определяется значениями переменных, соответствующих определенному двоичному набору. Внутри каждой клетки карты Карно ставится значение функции на данном наборе. Переменные в строках и столбцах располагаются так, чтобы соседние клетки карты Карно различались только в одном разряде переменных, т. е. были соседними. Поэтому значения переменных в столбцах и в строках карты образуют соседний код Грея. Такой способ представления очень удобен для наглядности при минимизации булевых функций.

При минимизации булевых функций с помощью диаграмм Вейча (карт Карно) используют следующие правила.

1 В карте Карно группы единиц (для получения ДНФ) и группы нулей (для получения конъюнктивной нормальной формы (КНФ)) необходимо обвести четырехугольными контурами. Внутри контура должны находиться только одноименные значения функции. Этот процесс соответствует операции склеивания или нахождения импликант данной функции.

2 Количество клеток внутри контура должно быть целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16...).

3 При проведении контуров крайние строки карты (верхние и нижние, левые и правые), а также угловые клетки считаются соседними (для карт до четырех переменных).

4 Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.

5 Все единицы (нули) в карте должны быть охвачены контурами. Любая единица (нуль) может входить в контуры произвольное количество раз.

6 Множество контуров, покрывающих все 1 (0) функции, образуют тупиковую ДНФ (КНФ). Целью минимизации является нахождение минимальной из множества тупиковых форм.

7 В элементарной конъюнкции (дизъюнкции), которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри обведенного контура. Переменные булевой функции входят в элементарную конъюнкцию (для значений функции 1) без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 1, и с инверсией – если 0. Для значений булевой функции, равных 0, записываются элементарные дизъюнкции, куда переменные входят без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 0, и с инверсией – если 1.

Пример 2 – Пусть функция $f(x, y, z) = 1$ на наборах 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 15. Диаграмма Вейча для заданной функции представлена на рисунке 8.

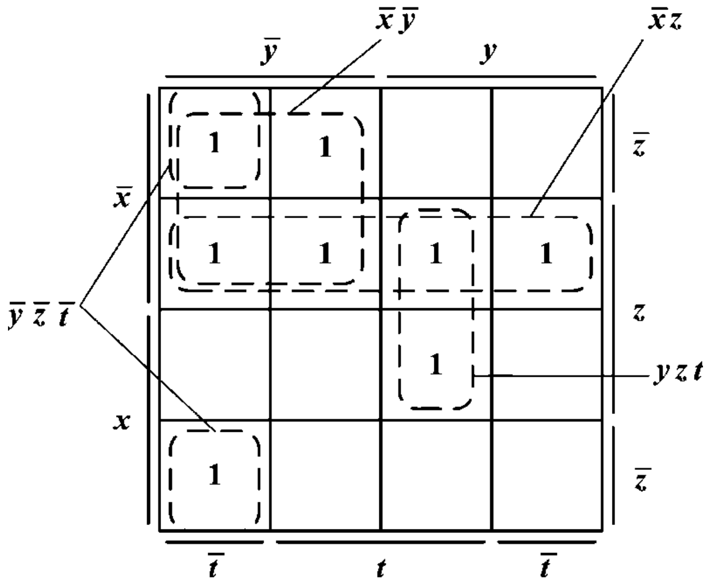


Рисунок 8 – Минимальная ДНФ на диаграмме Вейча

Единицы функции, стоящие в соседних клетках, отличаются значением только одной переменной, следовательно, они склеиваются по этой переменной и образуют импликанту. В этом случае говорят, что импликанта покрывает соответствующие единицы булевой функции. Например, две единицы на наборах 7 и 15 покрываются импликантой yzt. Четыре единицы на наборах 2, 3, 7, 6 – импликантой $\bar{x}z$. При этом соседними считаются также клетки, стоящие вдоль левого и правого края диаграммы (отличаются значением y) и вдоль верхнего и нижнего края (отличаются значением x).

При минимизации булевой функции на диаграмме Вейча сначала находят покрытия, содержащие максимальное число единиц (8, 4, 2), а затем покрытия, накрывающие оставшиеся единицы таким образом, чтобы они также были максимальны по величине и при удалении этого покрытия хотя бы одна единица функции осталась непокрытой. При этом некоторые единицы могут быть покрыты неоднократно.

Для функции, представленной на рисунке 8, минимальная ДНФ

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee yzt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t}\ .$$

Минимальная КНФ строится двойственно по диаграмме Вейча, заполненной нулями в пустых клетках. Для данной функции минимальная КНФ

$$f(x, y, z) = (\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{t}).$$

Минимизация частично определенных булевых функций.

Диаграммы Вейча могут использоваться для минимизации не только так называемых полностью определенных логических функций (когда функция в таблице истинности принимает только два значения – 0 или 1), но и для случая частичных (не полностью определенных) функций. При построении реальных цифровых устройств контроля и управления комбинационные схемы описываются, как правило, не полностью определенными булевыми функциями. В таблице истинности и, следовательно, в диаграммах Вейча такие функции, кроме 0 и 1, будут содержать и «–»; это означает, что такой набор никогда на вход устройства не поступает. Следовательно, на месте «–» может быть произвольно поставлена 1 либо 0. Этот процесс называется *доопределением* булевой функции. Доопределение булевой функции желательно выполнять так, чтобы получить возможно более простое выражение. В этом случае реализованная комбинационная схема также оказывается более простой.

Задания для самостоятельной работы

Найти минимальные ДНФ и КНФ булевых функций:

а) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15$;

б) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14$;

в) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15$;

г) $f(x, y, z, t) = 1 | 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15$;

д) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15$;

е) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 15$;

ж) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15$;

з) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15$;

и) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15$;

к) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14$;

л) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 6, 7, 10, 12, 14, 15$;

м) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15$;

н) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$;

о) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11$;
п) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 15$;
р) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 15$;
с) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 3, 10, 11, 14, 15$;
т) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13$;
у) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 15$;
ф) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14$;
х) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 7, 8, 9, 12, 13$;
ц) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$;
ч) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 4, 5, 9, 11, 12$;
ш) $f(x, y, z, t) = 1 | 3, 4, 5, 6, 7, 11, 14, 15$;
щ) $f(x, y, z, t) = 1 | 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14$.

7 Синтез логических схем

Задача синтеза логической схемы.

По заданной функции *f* требуется построить схему, реализующую данную функцию. Задача синтеза решается неоднозначно. Можно поставить в соответствие заданной функции *f* целое множество схем. Для построения логической схемы необходимо элементы, предназначенные для выполнения логических операций, указанных в логической функции, располагать в порядке, указанном в булевом выражении.

Пример 1 – Построить логическую схему устройства, реализующего логическую функцию $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ (рисунок 9).

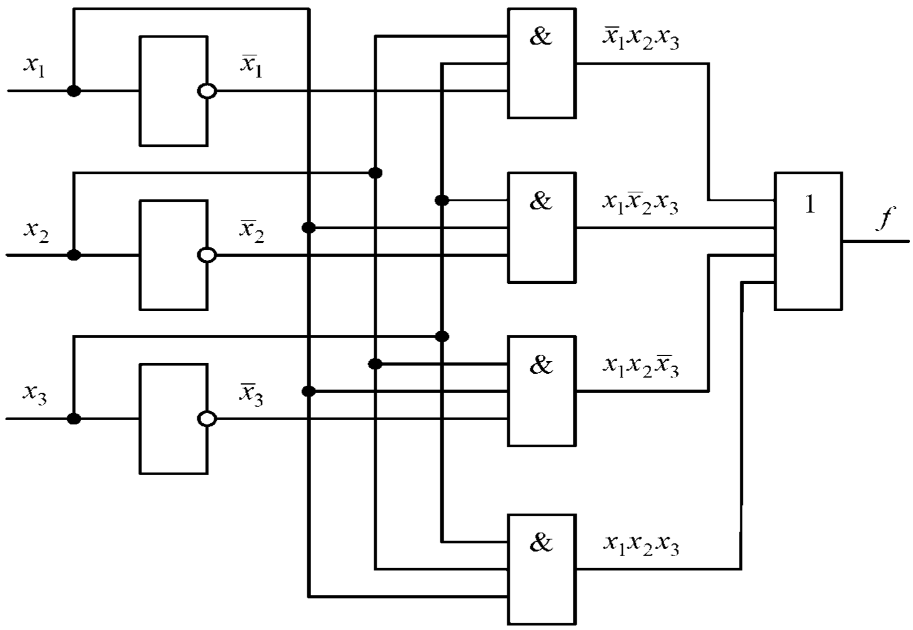


Рисунок 9 – Пример логической схемы устройства

Синтез логических устройств в заданном базисе.

С целью уменьшения номенклатуры используемых микросхем часто используют функционально полную систему в составе двух логических элементов, выполняющих операции И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Любую логическую функцию можно записать в заданном базисе логических элементов. Если задан базис И-НЕ, то путем двойного инвертирования исходного выражения или его части и применения теорем де Моргана логическая функция приводится к виду, содержащему только операции логического умножения и инвертирования. Если же задан базис ИЛИ-НЕ, исходную логическую функцию теми же приемами приводят к виду, содержащему только операции логического сложения и инверсии. Далее логическое выражение записывается через условные обозначения выбранных операций.

Пример 2 – Заданную функцию f перевести в базисы И-НЕ и ИЛИ-НЕ. Исходная ДНФ в базисе И-НЕ имеет вид:

$$f = x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}} =$$

$$= \overline{(\overline{x_2x_4})(\overline{\bar{x}_1x_3\bar{x}_4})(\overline{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3})} = (x_2 \mid x_4) \mid (\bar{x}_1 \mid x_3 \mid \bar{x}_4) \mid (x_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_3)\,.$$

Аналогично КНФ в базисе ИЛИ-НЕ имеет вид:

$$f = \overline{\overline{(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}} = \overline{\overline{(x_1 \vee x_4)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}} =$$

$$= (x_1 \downarrow x_4) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3) \downarrow (\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3 \downarrow \bar{x}_4)\,.$$

Пример 3 – Пусть логическая функция задана выражением

$$f = x_1x_4 \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)}(x_2 \vee \bar{x}_3)\,.$$

Привести логическую функцию в базис И-НЕ, ИЛИ-НЕ.

Решение

1 Приводим функцию к базису И-НЕ:

$$f = f_1 \vee \overline{f_2}f_3 = f_1 \vee \overline{\overline{\overline{f_2}f_3}} = f_1 \vee \overline{(\overline{f_2} \mid f_3)} = \overline{\overline{f_1 \vee \overline{(\overline{f_2} \mid f_3)}}} = \overline{\overline{f_1} \wedge \overline{\overline{(\overline{f_2} \mid f_3)}}} = \overline{f}_1 \mid (\overline{f_2} \mid f_3);$$

$$\overline{f_1} = \overline{x_1x_4} = x_1 \mid x_4\,;$$

$$\overline{f_2} = \overline{\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4} = x_1\bar{x}_3x_4 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3x_4}} = \overline{x_1 \mid \bar{x}_3 \mid x_4}\,;$$

$$f_3 = x_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_3}} = \overline{\bar{x}_2 x_3} = \bar{x}_2 \mid x_3;$$

$$f = (x_1 \mid x_4) \mid ((\overline{x_1 \mid \bar{x}_3 \mid x_4}) \mid (\bar{x}_2 \mid x_3)).$$

2 Приводим функцию к базису ИЛИ-НЕ:

$$f = f_1 \vee \overline{f_2} f_3 = f_1 \vee \overline{\overline{\overline{f_2} f_3}} = f_1 \vee \overline{(f_2 \vee \overline{f_3})} = \overline{\overline{f_1 \vee \overline{(f_2 \vee \overline{f_3})}}} = \overline{f_1 \downarrow (f_2 \downarrow \overline{f_3})};$$

$$f_1 = x_1 x_4 = \overline{\overline{x_1 x_4}} = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4} = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_4;$$

$$f_2 = \bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 = \overline{\overline{\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4}} = \overline{\bar{x}_1 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_4};$$

$$f_3 = x_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_3}} = \overline{x_2 \downarrow \bar{x}_3} \Rightarrow \overline{f_3} = \mathrm{x}_2 \downarrow \bar{x}_3;$$

$$f = \overline{(x_1 \downarrow x_4) \downarrow ((\overline{\overline{x_1} \downarrow x_3 \downarrow \overline{x_4}}) \downarrow (x_2 \downarrow \overline{x_3}))}.$$

Задача анализа логической схемы.

По заданной схеме требуется определить функцию *f*, реализуемую данной схемой.

При решении задачи анализа, как правило, придерживаются следующей последовательности действий:

1) заданная схема разбивается по ярусам;

2) начиная с последнего выходы каждого элемента обозначаются проиндексированными функциями в зависимости от яруса, к которому относится элемент;

3) записываются выходные функции каждого элемента в виде формул в соответствии с введенными обозначениями;

4) производится подстановка одних выходных функций через другие с помощью входных переменных;

5) записывается получившаяся булева функция через входные переменные.

Пример 4 – По заданной логической схеме (рисунок 10) составить булеву функцию.

Согласно приведенной выше последовательности действий произведем разбиение схемы на ярусы. Пронумеровав получившиеся ярусы, введем обозначения для каждой выходной функции (см. рисунок 10). Запишем все функции начиная с первого яруса:

1) $f_1 = \overline{f_{21} \cdot f_{22} \cdot x_4}$;

2) $f_{21} = f_{31} \vee x_2$; $f_{22} = f_{32} \cdot x_1$;

3) $f_{31} = \overline{x_1}$; $f_{32} = \overline{x_2 \vee x_3}$.

Теперь запишем все функции, подставляя входные переменные $x_1, ..., x_4$:

$$f_{21} = \overline{x_1} \vee x_2;$$

$$f_{22} = x_1 \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}).$$

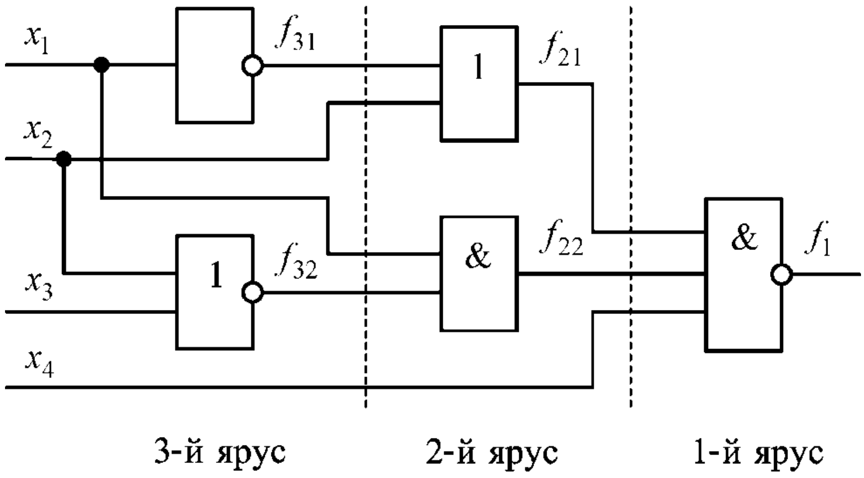


Рисунок 10 – Пример логической схемы устройства

В итоге получим выходную функцию

$$f = f_1 = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}) \cdot x_4}.$$

Задания для самостоятельной работы

1 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) сумматор для выполнения операции сложения четырехразрядных чисел в двоичном коде. Сложение двух двоичных чисел производится в соответствии с таблицей истинности (таблица 3), где A_i и B_i – значения складываемых двоичных чисел в данном разряде; S_i – результат суммирования в данном разряде; P_i и P_{i-1} – значения сигналов переноса в данном и предыдущем разряде соответственно.

Таблица 3 – Выполнение операции сложения двоичных чисел

Вход			Выход	
A_i	B_i	P_{i-1}	P_i	S_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

2 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) преобразователь двухразрядного двоичного кода в трехразрядный (таблица 4).

Таблица 4 – Преобразование двухразрядного кода в трехразрядный

Вход		Выход		
a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

3 Реализовать функции И, ИЛИ и НЕ на логических элементах в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ).

4 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) устройства, заданные логической функцией:

а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee (\overline{x_1x_2})(\overline{x_3x_4})$;

б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_1 \vee x_2)}\,\overline{x_3x_4}$;

в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1x_2}) \vee x_3 \vee x_4$;

г) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$;

д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$;

е) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x_1x_2}$;

ж) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;

з) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee (\overline{\bar{x}_1 \vee x_2})(\overline{x_3 \vee x_4})$;

и) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2x_3 \vee x_4}$;

к) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee \overline{x_1x_2x_3x_4}$;

л) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \overline{x_2x_3x_4})$;

м) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4}$;

н) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4 \vee \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4} \vee x_1\bar{x}_3$;

о) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee (\overline{x_2x_3(x_1 \vee \bar{x}_4)})$;

п) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1(\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_3x_4}$;

р) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3x_4 \vee \overline{\bar{x}_1x_2 \vee x_2\bar{x}_4}$;

с) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\overline{x_1x_2} \vee x_3\bar{x}_4} \vee x_1x_3x_4$;

т) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\overline{x_1x_2} \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3} \vee \overline{\bar{x}_1x_2}$;

у) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_3\bar{x}_4} \vee \overline{\bar{x}_1x_2x_4}$;

ф) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\bar{x}_1x_2 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4}$.

8 Способы задания абстрактного конечного автомата

Понятие конечного автомата.

Конечный автомат является математической моделью реальных дискретных устройств по переработке информации.

Конечным автоматом называется структура $A = \langle X; Q; Y; \delta; \lambda \rangle$, где X, Q, Y – произвольные непустые конечные множества.

Множество $X = \{a_1, ..., a_m\}$ называется входным алфавитом, а его элементы входными символами, их последовательности – входными словами. Множество $Q = \{q_1, ..., q_n\}$ называется множеством состояний, а его элементы – состояниями. Множество $Y = \{b_1, ..., b_p\}$ называется выходным алфавитом, а его элементы – выходными символами, их последовательности – выходными словами.

Функция $\delta : X \times Q \to Q$ называется функцией переходов. Функция $\lambda : X \times Q \to Y$ называется функцией выходов, т. е. $\delta(a,q) \in Q$, $\lambda(a,q) \in Y \mid \forall a \in X;\ \forall q \in Q$.

Если в момент времени t = 1, 2,... на вход автомата $A = (X; Q; Y; \delta; \lambda)$ последовательно подаются входные символы $x(t) \in X$ и при этом автомат находится в состоянии $q(t) \in Q$, то под воздействием символа $x(t)$ автомат перейдет в новое состояние $q(t+1) \in Q$ и выдаст выходной сигнал $y(t)$.

Величины $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $q(t+1)$ связаны между собой следующими уравнениями:

$$\begin{cases} q(t+1) = \delta(x(t),\, q(t)); \\ y(t) = \lambda(x(t),\, q(t)), \end{cases} \quad t = 1, 2, ..., n, ...\ .$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями автомата A.

С конечным автоматом ассоциируется воображаемое устройство, которое работает следующим образом. Оно может находиться в состоянии из множества Q, воспринимать символы из множества X и выдавать символы из множества Y.

Способы задания конечного автомата.

Существует несколько эквивалентных способов задания абстрактных автоматов, среди которых можно назвать табличный, графический, матричный и функциональный.

Табличное задание автомата. Из определения автомата следует, что его всегда можно задать таблицей с двумя входами, содержащей m строк и n столбцов, где на пересечении столбца q и строки a стоят значения функций $\delta(a, q)$ и $\lambda(a, q)$ (таблица 5).

Задание автомата диаграммой Мура. Другой способ задания конечного автомата – графический. При этом способе состояния автомата изображают кружками, в которые вписывают символы состояний q_j (j = 1, ..., n). Из каждого кружка проводится m стрелок (ориентированных ребер), взаимнооднозначно соответствующих символам входного алфавита $X = \{a_1, ..., a_m\}$. Стрелке, соответствующей символу $a_i \in X$ и выходящей из кружка $q_j \in Q$, приписывается пара $(a_i, \lambda(a_i, q_j))$, причем эта стрелка ведет в кружок, соответствующий $\delta(a_i, q_j)$.

Таблица 5 – Табличное задание автомата

a	q				
	q_1	…	q_j	…	q_n
a_1	$\delta(a_1, q_1)\,;\lambda(a_1, q_1)$	…	$\delta(a_1, q_j)\,;\lambda(a_1, q_j)$	…	$\delta(a_1, q_n)\,;\lambda(a_1, q_n)$
…	…	…	…	…	…
a_i	$\delta(a_i, q_1)\,;\lambda(a_i, q_1)$	…	$\delta(a_i, q_j)\,;\lambda(a_i, q_j)$	…	$\delta(a_i, q_n)\,;\lambda(a_i, q_n)$
…	…	…	…	…	…
a_m	$\delta(a_m, q_1)\,;\lambda(a_m, q_1)$	…	$\delta(a_m, q_j)\,;\lambda(a_m, q_j)$	…	$\delta(a_m, q_n)\,;\lambda(a_m, q_n)$

Полученный рисунок называется графом автомата, или диаграммой Мура. Для не очень сложных автоматов этот способ более нагляден, чем табличный.

Матричный способ задания автомата. Кроме рассмотренных выше способов, произвольный абстрактный автомат может быть описан матрицей соединений. Такое описание – один из способов матричного задания абстрактных автоматов. Матрица соединений автомата является квадратной и содержит столько столбцов (строк), сколько различных состояний имеет рассматриваемый автомат. Каждый столбец (строка) матрицы соединений помечается символом состояния автомата. Если автомат инициальный, то первый слева столбец и первая сверху строка матрицы помечаются символом начального состояния автомата. В клетке матрицы соединений, находящейся на пересечении столбца j и строки i, ставится входной символ a (или дизъюнкция входных символов), под воздействием которого осуществляется переход из состояния i в состояние j. Рядом с входным символом в скобках ставится выходной символ, который выдает автомат, выполняя переход из i-го состояния в j-е.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Для автомата, заданного таблицей, построить диаграмму Мура. Задать этот автомат системой булевых функций (рисунок 11).

1

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 1)	(3; 0)	(2; 0)	(2; 0)
1	(2; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(3; 0)

2

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(3; 1)	(2; 0)
1	(2; 0)	(0; 1)	(3; 1)	(1; 0)

3

x	q			
	0	1	2	3
0	(3; 0)	(2; 0)	(1; 1)	(0; 1)
1	(0; 1)	(1; 1)	(2; 0)	(3; 0)

4

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 0)	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)
1	(3; 0)	(3; 1)	(2; 1)	(1; 0)

5

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(2; 0)	(3; 1)
1	(1; 0)	(0; 1)	(3; 0)	(2; 1)

6

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 1)	(0; 0)	(3; 1)	(2; 0)
1	(0; 1)	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)

7

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 0)	(3; 1)	(2; 0)	(1; 0)
1	(3; 0)	(1; 1)	(0; 1)	(3; 1)

8

x	q			
	0	1	2	3
0	(2; 0)	(0; 0)	(3; 1)	(1; 0)
1	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(3; 0)

9

x	q			
	0	1	2	3
0	(2; 1)	(2; 1)	(2; 1)	(2; 1)
1	(1; 1)	(3; 1)	(0; 0)	(1; 0)

10

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 1)	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)
1	(0; 0)	(0; 1)	(3; 1)	(2; 1)

11

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(0; 1)	(2; 0)	(2; 1)
1	(1; 0)	(1; 1)	(3; 0)	(3; 1)

12

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 1)	(0; 0)	(1; 0)	(1; 0)
1	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)	(3; 1)

Рисунок 11 ─ Варианты контрольных заданий

13

x	q 0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)
1	(3; 1)	(0; 1)	(1; 1)	(2; 0)

17

x	q 0	1	2	3
0	(1; 0)	(3; 1)	(2; 1)	(2; 1)
1	(2; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(3; 0)

14

x	q 0	1
0	(0; 0)	(0; 1)
1	(0; 1)	(1; 0)
2	(0; 1)	(1; 0)
3	(1; 0)	(1; 1)

18

x	q 0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(1; 1)	(1; 1)
2	(1; 1)	(1; 1)
3	(0; 0)	(1; 1)

15

x	q 0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(1; 0)	(1; 1)
2	(0; 1)	(0; 0)
3	(–; 1)	(–; 0)

19

x	q 0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(0; 0)	(0; 1)
2	(1; 1)	(1; 1)
3	(1; 1)	(0; 1)

16

x	q 1	2	3
0	(2; 0)	(2; 1)	(3; 1)
1	(1; 1)	(3; 0)	(3; 1)
2	(1; 1)	(2; 1)	(1; 0)

20

x	q 1	2	3
0	(1; 0)	(2; 1)	(0; 2)
1	(2; 1)	(2; 1)	(3; 0)
2	(3; 2)	(0; 1)	(2; 0)

Окончание рисунка 11

Задание 2

Для автомата, заданного диаграммой Мура, выписать соответствующую таблицу и систему булевых функций (рисунок 12).

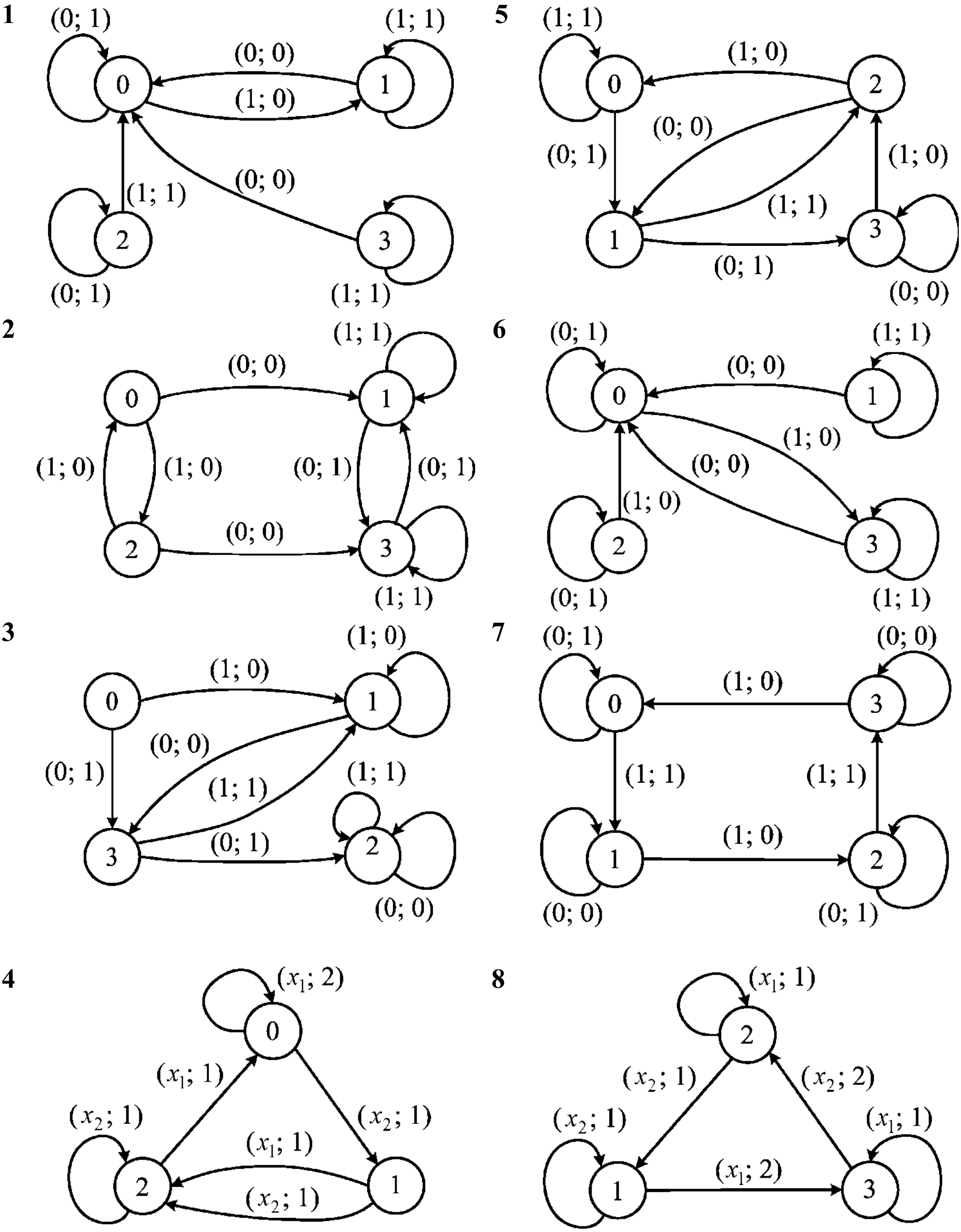
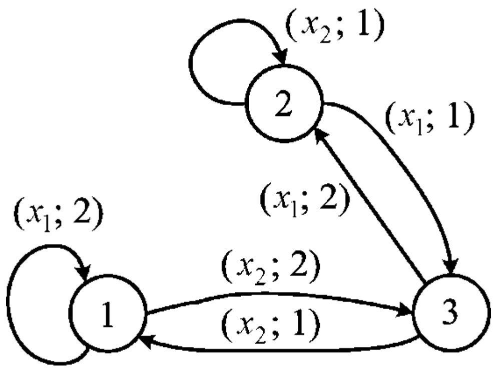
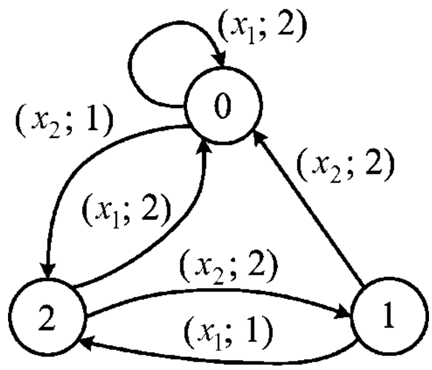


Рисунок 12 – Варианты контрольных заданий

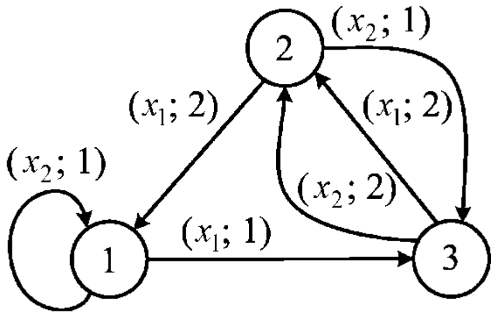
9



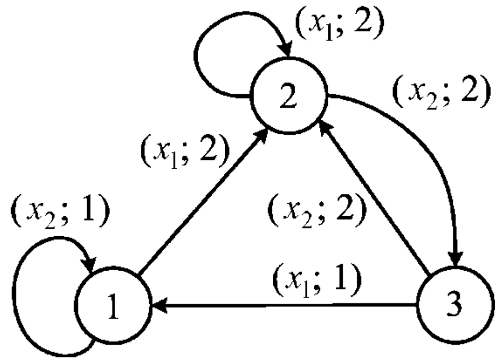
12



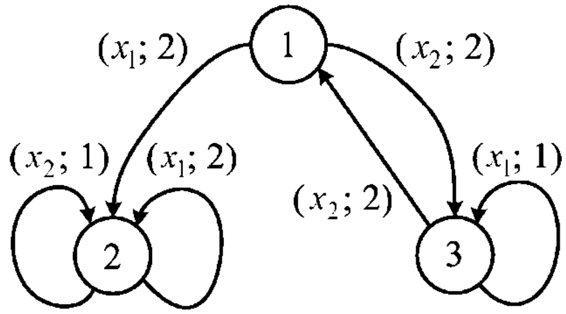
10



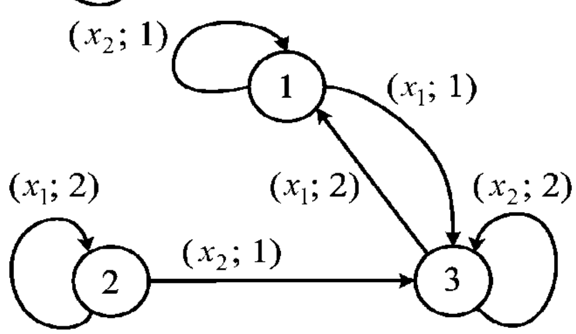
13



11



14



Окончание рисунка 12

Список литературы

1 **Деза, Е. И.** Основы дискретной математики: учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – 3-е изд. – Москва: ЛЕНАНД, 2016. – 224 с.

2 **Баврин, И. И.** Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва: Юрайт, 2016. – 208 с.

3 **Вороненко, А. А.** Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: учебно-методическое пособие / А. А. Вороненко. – Москва: ИНФРА-М, 2014. – 104 с.

4 **Певзнер, Л. Д.** Практикум по математическим основам теории систем: учебное пособие / Л. Д. Певзнер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. – 400 с.

5 **Дроботун, Б. Н.** Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике: учебное пособие: в 2 ч. / Б. Н. Дроботун; под ред. С. С. Гончарова. – Нур-Султан: Фолиант, 2019. – Ч. 1. – 528 с.

6 **Дроботун, Б. Н.** Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике: учебное пособие: в 2 ч. / Б. Н. Дроботун; под ред. С. С. Гончарова. – Нур-Султан: Фолиант, 2019. – Ч. 2. – 448 с.