

И.С. САЗОНОВ, В.А. КИМ, доктора техн. наук
Белорусско-Российский университет, г. Могилев

**Н.П. АМЕЛЬЧЕНКО,
О.В. БИЛЫК**, кандидаты техн. наук
Белорусский государственный университет информатики и радио-электроники,
г. Минск

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНЫХ МАШИН

В работе отражены особенности составления математических моделей динамики движения колесных машин с позиционными и неголономными связями колебательной модели. Особенности представления расчетных схем машин колебательной системы с использованием модели Максвелла (с включением элемента релаксации демпфирования).

Развитие методов моделирования динамики движения колесных машин во многом связано с созданием современных пакетов прикладных программ для ПЭВМ, которые постоянно совершенствуются. В то же время, основы процесса моделирования динамики движения колесных машин — математические модели, включающие расчетные схемы и дифференциальные уравнения, описывающие движение масс системы, — основываются на методах классической и аналитической механики.

Для представления математических моделей динамики движения колесных машин с позиционными геометрическими связями используют методы классической механики. При разработке математических моделей колесных машин с неголономными связями используются методы аналитической механики. В большинстве случаев математические модели с позиционными связями отличаются расчетными схемами, которые акцентируют внимание на специфических особенностях конструкции машин.

Для составления дифференциальных уравнений движения системы материальных точек с позиционными геометрическими связями чаще всего используют дифференциальные уравнения в проекциях на ортогональные оси координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cdot a_x = \sum_{i=1}^n F_x; \\ M \cdot a_y = \sum_{i=1}^n F_y; \\ M \cdot a_z = \sum_{i=1}^n F_z; \\ J_x \cdot \varepsilon_x = \sum_{i=1}^n M(F_i)_x; \\ J_y \cdot \varepsilon_y = \sum_{i=1}^n M(F_i)_y; \\ J_z \cdot \varepsilon_z = \sum_{i=1}^n M(F_i)_z, \end{array} \right. \quad (1)$$

где M — масса механической системы; $\sum_{i=1}^n F_{x,y,z}$ — сумма проекций всех сил на ортогональные координаты; $\sum_{i=1}^n M(F_i)_{x,y,z}$ — моменты всех сил, действующих на механическую систему относительно осей координат X, Y, Z ; $J_{x,y,z}$ — моменты инерции системы относительно осей координат.

Для механических систем с упруго-диссипативными связями для составления дифференциальных уравнений движения (динамические уравнения) широкое применение получило уравнение Лагранжа второго рода [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_{q_i}, \quad (2)$$

где T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы; Φ — диссипативная энергия системы; Q_{q_i} — обобщенные силы по соответствующим обобщенным координатам.

Уравнение Лагранжа (2) позволяет автоматизировать процедуру составления дифференциальных уравнений движения механических систем за счет того, что исключаются реакции связей между массами механической системы. В то же время, способы вычисления кинетической энергии системы и обобщенных сил для каждой механической системы требуют учета специфических особенностей механической системы (особенности кинематических связей системы). Вычисление обобщенных сил также необходимо производить с учетом особенностей обобщенных координат (линейные, угловые, сферические, полярные и др.) и соблюдения принципа виртуальных перемещений.

Рассмотрим простейшие расчетные схемы, которые используются для представления математической модели простейшей колебательной модели.

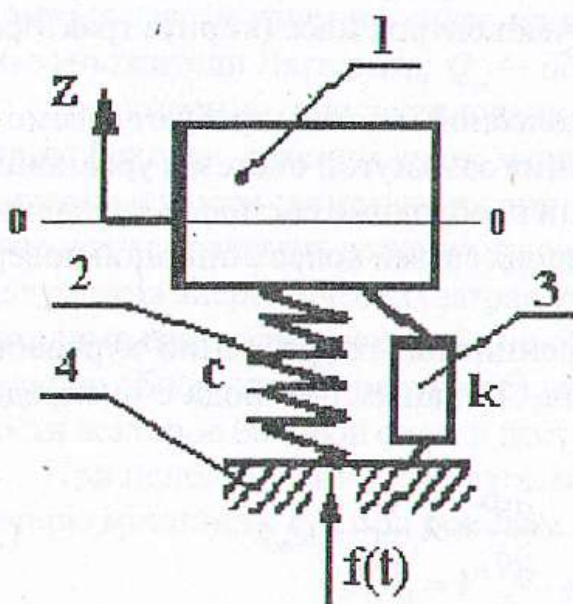
В существующих методах представления математических колебаний масс автомобиля широкое применение получила модель Ньютона (рисунок 1).

Модель Ньютона, включает подрессоренную массу 1, упругий элемент 2 (несущий элемент подвески сиденья), элемент диссипации энергии колебаний 3 (амортизатор) массы 1. Основной характеристикой колебательной системы является частота собственных колебаний, зависящей от коэффициента жесткости упругого элемента и коэффициента вязкого сопротивления амортизатора и подрессоренной массы.

Эффективность использования колебательной модели (см. рисунок 1) зависит от того, в каком соотношении находится частота собственных колебаний ω с частотой возмущающего воздействия f .

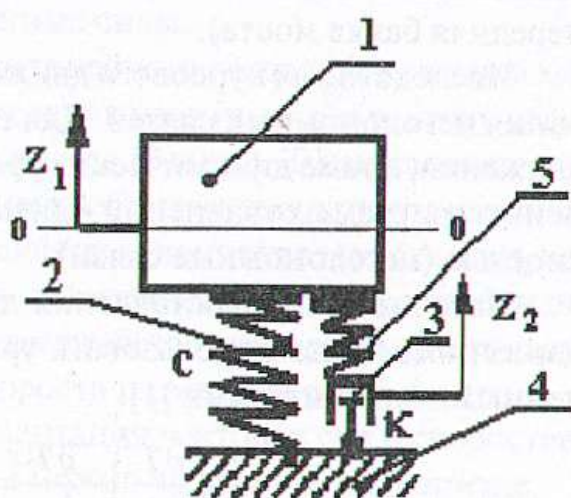
В случае, когда упругий элемент обладает свойством остаточной деформации (например, шина), то возникает необходимость использования модели Максвелла (рисунок 2). Колебательная модель Максвелла характеризуется наличием дополнительной координаты Z_2 . Модель последовательного включения упругого элемента 5 с элементом диссипации энергии 4 называют колебательной моделью с релаксацией демпфирования. Особенность колебательной модели Максвелла состоит в том, что она описывается системой двух дифференциальных уравнений или одним дифференциальным уравнением третьего порядка [4]. Включение элемента релаксации демпфирования в колебательную систему приводит к сдвигу фаз колебаний. Данный эффект может быть использован для систем подрессоривания колесных машин. Так, систему подрессоривания сиденья водителя колесного трактора с элементом релаксации демпфирования можно реализовать по схеме, представленной на рисунке 3 [4].

При исследовании колебаний масс серийного колесного трактора необходимо обратить внимание на конструктивную особенность балки передне-



a

Рисунок 1 — Колебательная модель Ньютона



b

Рисунок 2 — Модель Максвелла

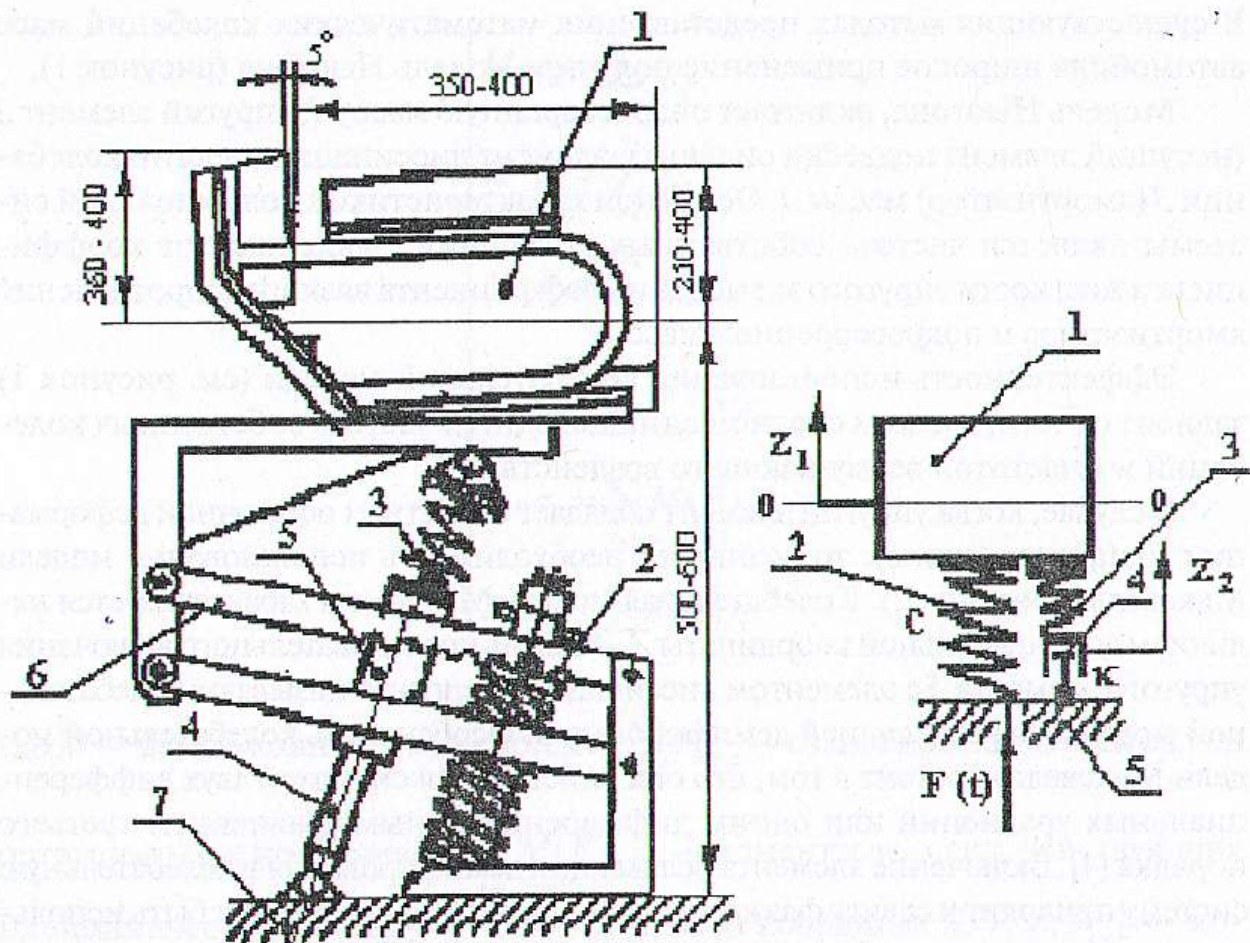


Рисунок 3 — Схема подвески сиденья колесного трактора с элементом релаксации демпфирования

го моста трактора, требующей использования пространственной колебательной системы (рисунок 4). При составлении дифференциальных уравнений колебаний масс пространственной модели (см. рисунок 4) необходимо учитывать также и кинематические связи точек центров масс (корпус трактора, передняя балка моста).

Исследования курсового движения колесной машины требуют рассмотрения неголономных связей. Для получения замкнутой системы уравнений движения, кроме динамических уравнений необходимо составить уравнения неинтегрируемых уравнений кинематических связей колес с опорной поверхностью (неголономные связи).

Например, для составления дифференциальных уравнений курсового движения можно использовать уравнение Лагранжа 1-го рода с неопределенными множителями [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + Q_{q_i}, \quad (3)$$

где T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы; Φ — диссипативная энергия системы; q — обобщенные координаты масс системы; \dot{q}_i — обобщенные скорости масс системы; f_j — уравнение неголо-

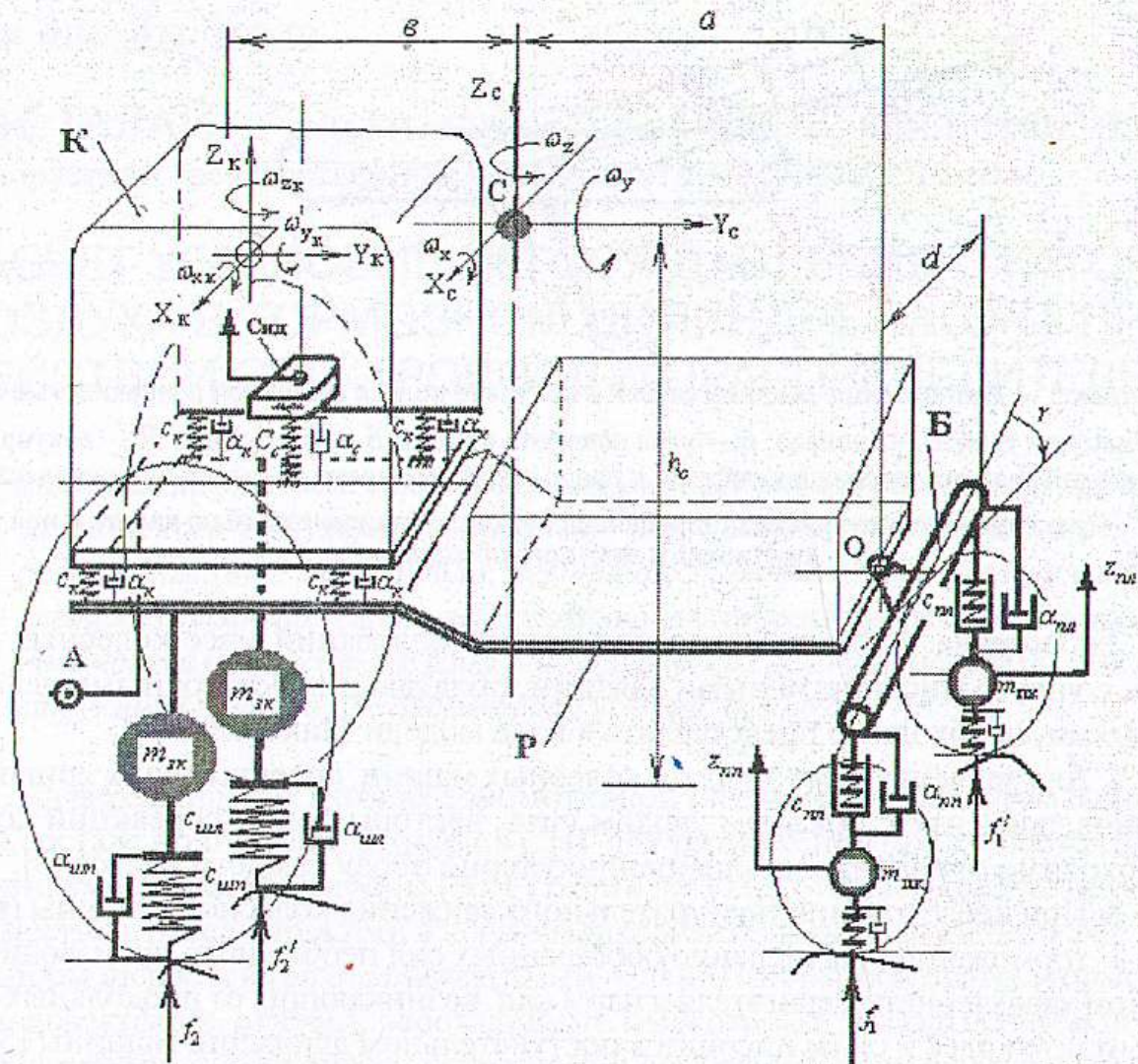


Рисунок 4 — Расчетная схема колебания масс колесного трактор

номных связей качения колес по опорной поверхности; λ_i — неопределенные множители Лагранжа; Q_{qi} — обобщенные силы.

Традиционно, при исследовании криволинейного движения колесной машины боковые реакции колес направляют перпендикулярно к вектору абсолютной скорости геометрического центра колеса [2 и др.]. Такая расчетная не позволяет определить влияние углов увода на энергетические затраты машины. Для расчета энергетических затрат, учитывающих влияние углов увода шин, необходимо направлять вектор боковой силы, действующий на колесо перпендикулярно ободу колеса (рисунок 5), что подтверждается проверкой ортогональности векторов боковой силы и вектора скорости геометрического центра.

При использовании предлагаемой ориентации векторов сил и скоростей, потерю мощности ΔA_δ при боковом уводе δ можно вычислить по формуле:

$$\Delta A_\delta = V \cdot N \cdot \varphi_{\text{сц}} \cdot (1 - \cos \delta + \sin \delta),$$

где $\varphi_{\text{сц}}$ — коэффициент сцепления колеса с опорной поверхностью; N — нормальная реакция опорной поверхности колеса.

В случае $\delta=0$ потеря мощности отсутствует, т.е. $\Delta A_\delta = 0$.

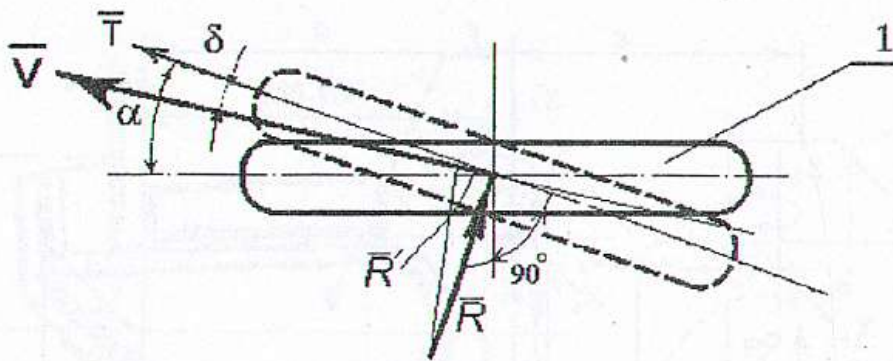


Рисунок 5 — Направление реакций связей в контакте колеса с опорной поверхностью при боковом уводе: 1 — колесо; α — угол поворота колеса; δ — угол увода; \bar{R} — вектор боковой реакции, перпендикулярный к продольной плоскости жесткого обода колеса; \bar{T} — вектор тангенциальной составляющей реакции, направленный по касательной к окружности жесткого обода колеса

Заключение. 1. Математические модели колебаний масс колесных машин с упруго-диссипативными связями, обладающих остаточными деформациями, необходимо представлять в виде модели Максвелла [4].

2. Для расчета затрат энергии колесных машин, совершающих криволинейное движение с боковым уводом шин, векторы боковых реакций колес необходимо ориентировать перпендикулярно ободу каждого колеса [3].

3. При исследовании поступательного движения колесной машины (разгон — торможение) вычисление обобщенных сил необходимо производить с учетом характеристик двигателя и пары сил, возникающих от продольных сил в контакте колес и силы инерции в поступательном движении машины [3].

4. В качестве критерия устойчивости и управляемости колесных машин необходимо использовать предельные значения сил в контакте колес по условиям их сцепления с опорной поверхностью. Например, отклонения нормальных реакций колес машины от их статических нагрузок для тяговых, транспортных и тормозных режимов движения [3, 5].

Список литературы

1. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.: ил.
2. Фаробин, Я.Е. Теория поворота транспортных машин / Я.Е. Фаробин. — М.: Машиностроение, 1970. — 217 с.: ил.
3. Сазонов, И.С. Динамика колесных машин / И.С. Сазонов [и др]. — Могилев: БРУ, 2006. — 461 с.
4. Амельченко, Н.П. Подвеска сиденья водителя колесного трактора / Н.П. Амельченко, В.А. Ким. — Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2006. — 160 с.: ил.
5. Сазонов, И.С. Тормозные системы колесных машин / И.С. Сазонов [и др]. — Могилев: БРУ, 2011. — 351 с.