МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилев 2024

УДК 517.2
ББК 22.161.1
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» декабря 2023 г., протокол № 4

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и функций нескольких переменных» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. Приведены необходимые теоретические сведения, разобраны примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы на практических занятиях и задания для домашней работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Производная и дифференциал функции

1.1 Теоретические сведения

Приращением функции $y=f\left(x\right)$ называется разность $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$, где Δx – приращение аргумента x.

Производной функции $y=f\left(x\right)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'=f'\left(x\right)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Если x изменяется, то предел тоже будет изменяться, следовательно, производная данной функции есть некоторая функция. Функция, имеющая конечную производную, называется ***дифференцируемой***. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Геометрический смысл производной: производная функции $y=f\left(x\right)$ для каждого значения x равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке $M\left(x;y\right)$ к графику функции $y=f\left(x\right)$.

Из рисунка 1.1 видно, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\beta$.

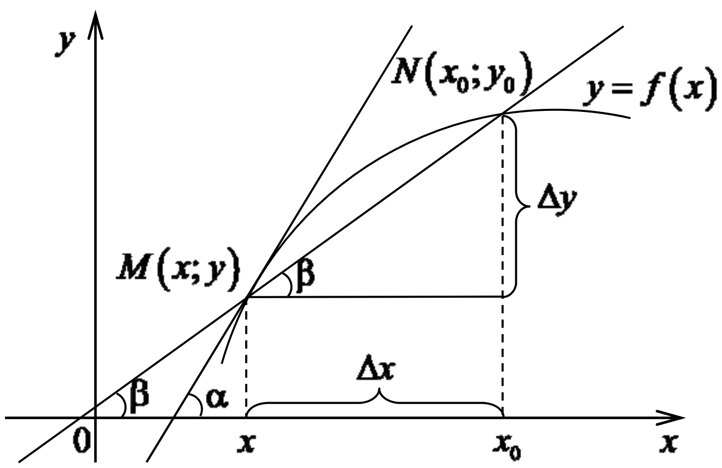

Рисунок 1.1

Механический смысл производной: для функции $S=f\left(t\right)$, изменяющейся со временем t, производная S' есть скорость изменения функции в данный момент времени t_0, т. е. $f'\left(t_0\right)=v\left(t_0\right)$.

Если c – постоянное число, $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

4) $(cu)' = c \cdot u'$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, (v \neq 0)$;

6) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}, (v \neq 0)$.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\dfrac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} .$$

На основании определения и правил дифференцирования составлена таблица производных основных элементарных функций:

1) $(x)' = 1$;

2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R}$;

5) $\left(e^x\right)' = e^x$;

6) $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$;

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$;

9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$;

11) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

15) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

17) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

18) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

19) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

20) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Если функция $y(x)$ задана соотношением $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – выражение, содержащее x и y, то y называется ***неявной функцией*** от x.

Производная от такой функции может быть определена следующим образом: находим производную от левой части равенства $F(x,y)=0$, рассматривая при этом y как функцию от x, и приравниваем её к нулю. Далее решаем полученное уравнение относительно y' и имеем производную $y' = f(x,y)$.

Пусть функция $y(x)$ задана при помощи параметрических соотношений $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$.

Производная от y по x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называется ***логарифмическим дифференцированием***. Этот метод позволяет легко найти производную от сложной функции вида $y = u^v$, где u и v – функции аргумента x. Прологарифмируем обе части исходного равенства:

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

Дифференцируя последнее соотношение, имеем

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln u;$$

$$y' = u^v \cdot \left(v \cdot \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln u \right) \text{ или } y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал dy функции равен произведению её производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = y'dx = f'(x)dx.$$

Из формулы дифференциала следует равенство $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала: если MN – дуга графика функции $y = f(x)$, MD – касательная к нему в точке $M(x,y)$ и $AB = \Delta x = dx$, то $DC = dy$, а $NC = \Delta y$ (рисунок 1.2).

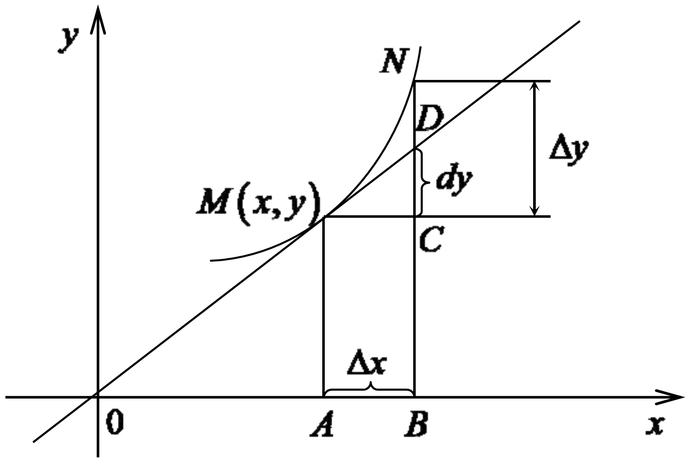

Рисунок 1.2

Дифференциал функции dy отличается от её приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx.

Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем свойства дифференциала:

1) $dC = 0 \ \left(C = \text{const}\right)$;

2) $d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$;

3) $d\left(u{\cdot}v\right) = vdu + udv$;

4) $d\left(C{\cdot}u\right) = C{\cdot}du$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;

6) $df\left(u\right) = f_u'\left(u\right)\cdot u'dx = f'\left(u\right)du$.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти производную функции $y = x \cdot \ln x$.

Решение

$$\left(x \cdot \ln x\right)' = \left(x\right)' \cdot \ln x + x \cdot \left(\ln x\right)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Пример 2 – Найти производную функции $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Решение

$$\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)' = \frac{\left(1+e^x\right)' \cdot \left(1-e^x\right) - \left(1+e^x\right) \cdot \left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot \left(1-e^x\right) + e^x \cdot \left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

Пример 3 – Найти производную функции $y=\cos^2 x$.

Решение

$$\left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x\cdot(\cos x)' = 2\cos x\cdot(-\sin x) = -\sin 2x.$$

Пример 4 – Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $xy^2=4$, в точке $M(1;2)$.

Решение

Дифференцируем обе части функции:

$$y^2+2xy\cdot y'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=-\frac{y}{2x}.$$

Подставляя $x=1$ и $y=2$, получим $y'=-1$.

Пример 5 – Найти производную функции $\begin{cases} x=\cos t; \\ y=\sin t. \end{cases}$

Решение

Дифференцируем исходные соотношения по t:

$$x'_t=-\sin t; \qquad y'_t=\cos t.$$

Отсюда

$$y'_x=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

Пример 6 – Найти производную функции $y=(\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение

Логарифмируя данную функцию, получим

$$\ln y=\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin 2x.$$

Дифференцируем обе части равенства по x:

$$(\ln y)' = (\operatorname{tg} x)'\cdot\ln\sin 2x+\operatorname{tg} x\cdot(\ln\sin 2x)';$$
$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln\sin 2x+\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2;$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,2x \right).$$

Таким образом,

$$y' = \left(\sin 2x\right)^{\mathrm{tg}\,x} \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,2x \right).$$

Пример *7* – Найти дифференциал функции $y = \ln \mathrm{arctg}\left(\sin x\right)$.

Решение

Находим производную данной функции:

$$y' = \frac{1}{\mathrm{arctg}\left(\sin x\right)} \cdot \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x.$$

Тогда

$$dy = \frac{\cos x\, dx}{\mathrm{arctg}\left(\sin x\right) \cdot \left(1 + \sin^2 x\right)}.$$

1.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

1) $y = 4x^5 - 2x^3 + 3$, $y'(1)$;

2) $y = 2x^7 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}$, $y'(-1)$;

3) $y = \frac{1}{x^7} - 6 \cdot \sqrt[3]{x^5} + \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y'(1)$;

4) $y = 2x \cdot \cos x$, $y'(\pi)$;

5) $y = \left(4x^2 - 8x + 1\right) \cdot \sqrt{x}$, $y'(4)$;

6) $y = \frac{1 + 2x}{1 - 3x}$, $y'(-1)$;

7) $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 9}$, $y'(2)$;

8) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $y'(\pi)$;

9) $y = \left(x^3 + 2^x\right) \cdot \mathrm{tg}\,x$, $y'(0)$;

10) $y = \left(1 + x^2\right) \cdot \mathrm{arctg}\,x$, $y'(0)$.

Ответы: 1) 14; 2) 1; 3) -23; 4) -2; 5) $\frac{225}{4}$; 6) $\frac{5}{16}$; 7) -51; 8) 2; 9) 1; 10) 1.

2 Найти значения производных сложных функций в указанных точках:

1) $y = \sin^3 x$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $y = x \cdot \ln^2 x$, $y'(1)$;

3) $y = \sqrt{x^4 + 1}$, $y'(0)$;

4) $y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $y'(2)$;

5) $y=e^{-2\sin^2 5x}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; 6) $y=\sqrt[4]{1+e^{4x}}+7^{\cos x}$, $y'(0)$.

Ответы: 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) $\dfrac{8}{15}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

3 Найти y' от неявно заданных функций:

1) $e^y-e^{-x}+xy=0$; 2) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Ответы: 1) $y'=-\dfrac{e^{-x}+y}{x+e^y}$; 2) $y'=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

4 Найти y'_x от следующих функций:

1) $\begin{cases} x=t^3+t; \\ y=t^2+t+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t; \\ y=e^t\cos t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{2t+1}{3t^2+1}; \\ x=t^3+t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x=e^{2t}; \\ x=e^{-t}\sin t. \end{cases}$

5 Найти производные следующих функций:

1) $y=x^{\cos x}$; 3) $y=\dfrac{(x-2)^3\cdot(x-1)^4}{(x+5)^2}$;

2) $y=(\sin x)^{\ln x}$; 4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Ответы: 1) $y'=x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$; 2) $y'=(\sin x)^{\ln x}\left(\ln x\cdot\operatorname{ctg}x+\dfrac{\ln\sin x}{x}\right)$;
3) $y'=\dfrac{(x-2)^2\cdot(x-1)^3\cdot(5x^2+30x-59)}{(x+5)^3}$; 4) $y'=\dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

6 Найти дифференциалы функции:

1) $y=(x^2+1)\cdot\operatorname{arctg}x$; 2) $y=e^{\sin 4x}$.

Ответы: 1) $dy=(2x\cdot\operatorname{arctg}x+1)dx$; 2) $dy=4\cos 4x\cdot e^{\sin 4x}dx$.

1.4 Домашнее задание

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

1) $y=\left(x^2+5x+4\right)\cdot\ln x$, $y'(1)$;

2) $y=\dfrac{x^5-1}{x^5+1}$, $y'(1)$;

3) $y=\sqrt{x^3-4}$, $y'(2)$;

4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$, $y'(2)$.

Ответы: 1) 10; 2) $\dfrac{5}{2}$; 3) 3; 4) $-\dfrac{1}{5}$.

2 Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $x^2+y^2-xy+x=1$, в точке $M(1;1)$.

Ответ: -2.

3 Найти y'_x функций:

1) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin^2 t; \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y'_x=2t^2\cos t-t^3\sin t; \\ x=\ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'_x=-1; \\ x=\sin^2 t. \end{cases}$

4 Найти производные следующих функций:

1) $y=\left(\cos 3x\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; 2) $y=\left(\ln(x+3)\right)^{\sin\frac{1}{x}}$.

Ответы: 1) $y'=\left(\cos 3x\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln\cos 3x}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}-3\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)$;

2) $y'=\left(\ln(x+3)\right)^{\sin\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(\ln(x+3)\right)+\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{(x+3)\cdot\ln(x+3)}\right)$.

2 Производная и дифференциал функции высших порядков

2.1 Теоретические сведения

Производной второго порядка, или ***второй производной***, функции $y=f(x)$ называется производная от её первой производной $y'=f'(x)$. Она обозначается символами

$$y''=(y')', \text{ или } f''(x)=\left[f'(x)\right]', \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}.$$

Механический смысл второй производной: если $S=S(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки, то $S' = \dfrac{dS}{dt}$ – скорость, а $S'' = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ – ускорение этой точки.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции. Её обозначают следующими символами:

$$y^{(n)}, \text{ или } f^{(n)}(x), \text{ или } \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Таким образом, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$, причем функция $y^{(n-1)}$ должна быть дифференцируемой.

Пусть функция $y(x)$ задается неявно соотношением $F(x, y) = 0$. Для определения второй производной от неявной функции вначале находят её первую производную. Далее дифференцируют равенство $y' = f(x, y)$, рассматривая y как функцию от x. Затем в правой части заменяют y' её выражением из равенства $y' = f(x, y)$.

Пусть функция $y(x)$ задана при помощи параметрических соотношений $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$. Вторую производную от y по x находят по формуле

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично находят производные более высоких порядков.

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x – независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' dx^2; \qquad d^3 y = y''' dx^3; \qquad \ldots; \qquad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то $d^2 y = y''(dy)^2 + y' \cdot d^2 u$, где дифференцирование функции y выполняется по переменной u.

2.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти производную второго порядка функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+1\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

Пример 2 – Найти производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 3 – Задана функция $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$. Найти y''.

Решение

Дифференцируем заданное соотношение и находим y':

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0;$$

$$y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0;$$

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Отсюда

$$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}.$$

Пример 4 – Найти производную второго порядка функции $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение

Дифференцируем исходные соотношения:

$$x'_t = \cos t; \qquad y'_t = -\sin t.$$

Отсюда

$$y'_x = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t; \qquad \left(y'_x\right)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Таким образом,

$$y''_{xx} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}.$$

Пример 5 – Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln\left(1+x^2\right)$.

Решение

Имеем

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}; \qquad y'' = \frac{2\left(1+x^2\right) - 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 y = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} dx^2.$$

2.3 Задания для самостоятельной работы

1 Для данных функций найти производные второго порядка:

1) $y = \left(1+4x^2\right) \cdot \operatorname{arctg} 2x$; 2) $y = \left(x^2+1\right) \cdot \ln\left(1+x^2\right)$.

Ответы: 1) $y'' = 8\operatorname{arctg} 2x + \dfrac{16x}{1+4x^2}$; 2) $y'' = \dfrac{4x^2}{1+x^2} + 2\ln\left(1+x^2\right) + 2$.

2 Найти y'' от неявно заданных функций:

1) $x + y + \operatorname{arcctg} y = 0$; 2) $\operatorname{arctg}(x+y) = x$.

Ответы: 1) $y'' = -2\left(y^{-3} + y^{-5}\right)$; 2) $y'' = 2(x+y)\left(1+(x+y)^2\right)$.

3 Найти y''_{xx} от следующих функций:

1) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln\cos t; \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y''_{xx} = 4t^2; \\ x = \ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y''_{xx} = -\dfrac{2\cos^2 t}{\sin^4 t}; \\ x = \ln\cos t. \end{cases}$

4 Найти d^2y и d^3y функции:

1) $y = \ln x^{10}$; 2) $y = e^{-3x} \cdot \cos 2x$.

Ответы: 1) $d^2y = -\dfrac{10}{x^2}dx^2$, $d^3y = \dfrac{20}{x^3}dx^3$;

2) $d^2y = e^{-3x} \cdot \left(5\cos 2x + 12\sin 2x\right)dx^2$, $d^3y = e^{-3x} \cdot \left(9\cos 2x - 46\sin 2x\right)dx^3$.

2.4 Домашнее задание

1 Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = -\dfrac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$; 2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Ответы: 1) $y'' = x \cdot \sin 3x$; 2) $y'' = \dfrac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3}$.

2 Вычислить значение производной функции, заданной неявно уравнением $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$, в точке $M(1;-1)$.

Ответ: 1.

3 Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = (2t+1)\cdot\cos t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y''_{xx} = \left(2t - t^2 - 2t^3\right)\cdot\cos t - \left(t + 6t^2\right)\cdot\sin t; \\ x = \ln t. \end{cases}$

4 Найти дифференциалы второго порядка функции $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$.

Ответ: $d^2y = \left(80x^3 - 14\right)dx^2$.

3 Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя

3.1 Теоретические сведения

Теорема 1 (Ферма). Если функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$, дифференцируема внутри этого отрезка и достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке $c \in \left[a;b\right]$, то $f'\left(c\right) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). Если функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$, дифференцируема внутри этого отрезка и $f\left(a\right) = f\left(b\right)$, то существует по крайней мере одна точка $x = c\ \left(a < c < b\right)$ такая, что $f'\left(c\right) = 0$.

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует по крайней мере одна точка $x = c\ \left(a < c < b\right)$ такая, что $f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(c\right)\left(b - a\right)$.

Теорема 4 (Коши). Если функции $y = f\left(x\right)$ и $y = \varphi\left(x\right)$ непрерывны на отрезке $\left[a;b\right]$ и дифференцируемы внутри него, причём $\varphi'\left(x\right) \neq 0$ при $a < x < b$, то найдется хотя бы одна точка $x = c\ \left(a < c < b\right)$ такая, что $\dfrac{f\left(b\right) - f\left(a\right)}{\varphi\left(b\right) - \varphi\left(a\right)} = \dfrac{f'\left(c\right)}{\varphi'\left(c\right)}$.

Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если функции $y = f\left(x\right)$ и $y = \varphi\left(x\right)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки $x = x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \to x_0$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'\left(x\right)}{\varphi'\left(x\right)}$, то существует также $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)}$ и эти пределы равны, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'\left(x\right)}{\varphi'\left(x\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)}.$$

Это правило справедливо и при $x \to \pm\infty$.

Если частное $\dfrac{f'\left(x\right)}{\varphi'\left(x\right)}$ в точке $x = x_0$ вновь дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

Раскрытие неопределённостей вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

1 Для раскрытия неопределенности типа $0\cdot\infty$ необходимо преобразовать произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, в частное

$$\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}\ \left(\text{вид}\ \frac{0}{0}\right)\quad \text{или}\quad \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\ \left(\text{вид}\ \frac{\infty}{\infty}\right).$$

2 В случае неопределенности $\infty-\infty$ предел $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-\varphi(x)\big)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, необходимо свести к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ с помощью преобразования

$$f(x)-\varphi(x)=\left(\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right):\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}.$$

3 Неопределенности 0^0, 1^∞, ∞^0 раскрываются при помощи преобразования функции

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}.$$

3.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}$.

Решение

Имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$, следовательно, можно применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\cdot e^x-5x\right)'}{\left(4x^2+7x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-5}{8x+7}=-\frac{4}{7}.$$

Пример 2 – Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{(\operatorname{tg}3x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}:\frac{3}{\cos^2 3x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 3x)'}{(3\cos^2 x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 6x)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=\frac{6}{2}=3.$$

Пример 3 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение

При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведём дроби к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0}=0.$$

Пример 4 – Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x$.

Решение

При $x\to\dfrac{\pi}{2}$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем функцию

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1.$$

Пример 5 – Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

Решение

Имеем неопределённость вида 0^0.

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1-\cos x)^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln(1-\cos x)}=(0\cdot\infty)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1-\cos x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\cos x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin x\right)'}{(\cos x-1)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x+x^2\cos x}{-\sin x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)'}{(-\sin x)'}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}{-\cos x}}=e^{\frac{0}{1}}=e^0=1.$$

3.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}$.

Ответы: 1) $-\frac{2}{5}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) ∞.

2 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\pi-2x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Ответы: 1) ∞; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) ∞.

3 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Ответы: 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) $e^{-\frac{1}{3}}$.

4 Расстояние, пройденное материальной точкой за время t, равно $S=\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{3}t^3+2t+1$ (в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t_1=0$ с, $t_2=1$ с, $t_3=2$ с.

Ответ: $v_1=2$ м/с, $v_2=2$ м/с, $v_3=6$ м/с.

5 Составить уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

1) $y=x^2+4x-3$, $A(1;2)$;

2) $y=1-e^x$, точка пересечения с осью Oy;

3) $y=\ln x$, точка пересечения с осью Ox.

Ответы: 1) $y=6x-4$, $x=-6y+13$; 2) $y=-x$, $y=x$; 3) $y=x-1$, $y=-x+1$.

6 Определить, под каким углом парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс.

Ответ: $\alpha_1=135°$, $\alpha_2=45°$.

7 Дано уравнение движения точки по оси Ox $x=100+5t-0{,}001t^3$. Найти скорость v и ускорение a этой точки в моменты времени $t_1=0$ с, $t_2=1$ с, $t_3=10$ с.

Ответ: $v_1=5$, $v_2=4{,}997$, $v_3=4{,}7$; $a_1=0$, $a_2=0{,}006$, $a_3=0{,}06$.

3.4 Домашнее задание

1 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\cdot\sin 7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ответы: 1) 2; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0; 5) $\frac{2}{\pi}$; 6) e^{-1}; 7) 1; 8) e^{-2}.

2 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Ответ: $y = 5x - 4$, $x = -5y + 6$.

4 Исследование функций с помощью производных. Построение графиков

4.1 Теоретические сведения

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) ***на интервале*** (a,b), если для $x_1 > x_2$, где $x_1, x_2 \in (a,b)$, выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Теорема 1 (достаточное условие возрастания и убывания функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a,b)$, то $f(x)$ возрастает на (a,b); если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a,b)$, то $f(x)$ убывает на (a,b).

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$. Число $f(x_0)$ при этом называется ***минимумом*** (***максимумом***) ***функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума***.

Теорема 2 (необходимое условие существования экстремума). Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются ***критическими***. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Теорема 3 (достаточные условия существования экстремума).

1 Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки. Если $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка максимума. Если же $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка минимума. Если $f'(x)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2 Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

3 Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, то в точке x_0 экстремума нет. Если же $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, то в точке x_0 будет максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего ***наименьшего*** и ***наибольшего значений***. Для нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции на отрезке необходимо вычислить значения функции на концах этого отрезка и в критических точках, принадлежащих ему, а затем из всех полученных значений выбрать наименьшее (наибольшее).

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым* (*вогнутым*) *на интервале*** (a,b), если на этом интервале дуга кривой расположена ниже (выше) касательной, проведенной к графику функции в любой точке (a,b).

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если функция $y=f(x)$ на интервале (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x)<0$ для любого $x\in(a,b)$, то график функции на интервале (a,b) выпуклый; если же $f''(x)>0$ для любого $x\in(a,b)$, то график функции на интервале (a,b) вогнутый.

Точка $(x_0,f(x_0))$ графика непрерывной функции $y=f(x)$, отделяющая его выпуклую (вогнутую) часть от вогнутой (выпуклой), называется ***точкой перегиба***.

Теорема 5 (необходимое условие существования точки перегиба графика функции). Если x_0 – точка перегиба графика функции $y=f(x)$, то $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 6 (достаточное условие существования точки перегиба). Если x_0 – критическая точка второго рода функции $y=f(x)$ и при $\delta>0$ выполняются неравенства $f''(x_0-\delta)<0$, $f''(x_0+\delta)>0$ или неравенства $f''(x_0-\delta)>0$, $f''(x_0+\delta)<0$, то точка x_0 является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$.

Прямая L называется ***асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $M(x,y)$ кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от $O(0;0)$ (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Для нахождения асимптот пользуются следующими утверждениями.

1 Если при $x=a$ кривая $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=a$ является её ***вертикальной асимптотой***. Отметим, что непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

2 ***Наклонные асимптоты*** кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения $y=kx+b$, где k и b определяются формулами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если $k = 0$, то получаем ***горизонтальную асимптоту*** $y = b$.

Отметим, что если пределы в формулах для k и b не существуют или бесконечны, то наклонных асимптот нет.

Полное исследование функций проводится по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на непрерывность и определить характер точек разрыва;

3) исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность;

4) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

5) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

7) найти асимптоты графика функции;

8) по полученным данным построить график функции.

4.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы функции $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$.

Решение

Находим производную функции

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3\left(x^2 - x - 2\right).$$

Находим критические точки, приравняв производную к нулю:

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2 \text{ – критические точки.}$$

Нанесём эти точки на координатную прямую. На каждом интервале определим знак производной и применим достаточное условие возрастания (убывания) функции (рисунок 4.1).

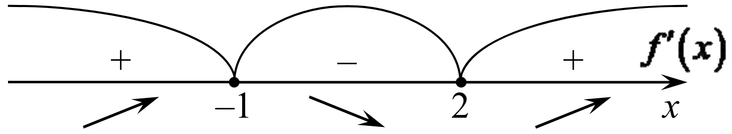

Рисунок 4.1

Итак, функция возрастает на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$, а убывает на промежутке $(-1;2)$. Точками экстремума функции являются $x_{\min} = 2$ и $x_{\max} = -1$.

Экстремумы функции

$$f_{\min} = f(2) = -6; \qquad f_{\max} = f(-1) = 7{,}5.$$

Пример 2 – Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Решение

Находим критические точки функции, входящие в данный отрезок:

$$f'(x) = 6x^2 - 6; \qquad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 6;$$

$$x_1 = -1 \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]; \qquad x_2 = 1 \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Теперь находим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-1) = 9; \qquad f(1) = 1; \qquad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{45}{4}; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{4}.$$

Таким образом, наибольшим значением функции на данном отрезке является $f(-1) = 9$, а наименьшим – $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{45}{4}$.

Пример 3 – Найти интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графика функции $y = x^3$.

Решение

Находим первую и вторую производные функции:

$$y' = 3x^2; \qquad y'' = 6x.$$

Приравняв вторую производную к нулю, получим критическую точку второго рода $x = 0$.

Так как $y'' > 0$ при $x > 0$, то на интервале $(0; +\infty)$ график функции вогнутый. Так как $y'' < 0$ при $x < 0$, то на интервале $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый. Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

Пример 4 – Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}=\infty$, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

Найдём наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Таким образом, $y=x$ является наклонной асимптотой.

4.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функций:

1) $y=6-3x^2-x^3$; 2) $y=x\cdot\ln x$;

Ответы: 1) $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$ – убывает, $(-2;0)$ – возрастает, $y_{\max}=y(0)=6$, $y_{\min}=y(-2)=2$; 2) $\left(0;e^{-1}\right)$ – убывает, $\left(e^{-1};+\infty\right)$ – возрастает, $y_{\min}=y\left(e^{-1}\right)=-e^{-1}$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном отрезке:

1) $y=x+3\sqrt[3]{x}$, $[-1;1]$; 2) $y=\dfrac{x}{x^3+2}$, $[0;3]$.

Ответы: 1) $y_{\text{наим}}(-1)=-4$, $y_{\text{наиб}}(1)=4$; 2) $y_{\text{наим}}(0)=0$, $y_{\text{наиб}}(1)=\dfrac{1}{3}$.

3 Найти наибольший объём цилиндра, у которого площадь полной поверхности равна S.

Ответ: $\dfrac{S}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

4 Найти интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графиков функций:

1) $y=x^4-4x^3-48x^2+6x-9$; 2) $y=\left(1+x^2\right)\cdot e^x$.

Ответы: 1) $x=-2$ и $x=4$ – точки перегиба, выпуклый на $(-2;4)$, вогнутый на $(-\infty;-2)$ и $(4;+\infty)$; 2) $x=-3$ и $x=-1$ – точки перегиба, вогнутый на $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$, выпуклый на $(-3;-1)$.

5 Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

Ответы: 1) $x=-1$, $y=x+2$; 2) $x=0$, $y=0$ $(x>0)$.

6 Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$.

4.4 Домашнее задание

1 Найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функций:

1) $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$; 2) $y=(2x+1)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Ответы: 1) $y_{\min}(-2)=-\dfrac{8}{3}$, $y_{\min}(1)=-\dfrac{13}{12}$, $y_{\max}(0)=0$, возрастает на $(-2;0)$ и $(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;1)$; 2) $y_{\max}\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{-\frac{3}{4}}$; возрастает на $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$, убывает на $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-1;5]$.

Ответ: $y_{\text{наим}}(1)=-6$, $y_{\text{наиб}}(5)=266$.

3 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

1) $y=x^6-6x^5+\dfrac{15}{2}x^4+3x$; 2) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Ответы: 1) $x=1$ и $x=3$ – точки перегиба, выпуклый на $(1;3)$, вогнутый на $(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$; 2) $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ – точки перегиба, выпуклый на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, вогнутый на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4 Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$; 2) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Ответы: 1) $x=\pm2$, $y=x$; 2) $x=0$, $y=0$.

5 Провести полное исследование и построить график функции $y=x^2+\dfrac{2}{x}$.

5 Функции многих переменных. Производные и дифференциал ФМП

5.1 Теоретические сведения

Понятие функции нескольких (многих) переменных.

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Зависимость f, при которой каждой паре чисел $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x, y)$. При этом x и y называются ***независимыми переменными*** (***аргументами***), а z – ***зависимой переменной*** (***функцией***).

Множество $D = D(f)$ называется ***областью определения*** функции. Если D не указано, то областью определения называется множество всех пар чисел (x, y), при которых функция имеет смысл. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется ***областью значений*** (областью изменения) этой функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции двух переменных является поверхность, образованная множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$. Область определения функции D обычно представляет собой часть плоскости xOy, ограниченную некоторыми линиями, которые могут принадлежать (замкнутая область) или не принадлежать (незамкнутая область) этой области.

Величина u называется ***функцией*** n ***переменных*** x_1, x_2, …, x_n, если каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ переменных x_1, x_2, …, x_n из некоторой области n-мерного пространства ставится в соответствие определенное значение u. Функция n независимых переменных записывается в виде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Частные производные функции нескольких переменных (ФНП).

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Придадим переменной x в точке $M(x, y)$ произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным. Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

называемое ***частным приращением*** функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M(x, y)$.

Аналогично, если придать переменной y произвольное приращение Δy, а переменную x оставить постоянной, то получим частное приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

функции $z = f(x, y)$ по переменной y.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется ***частной производной*** функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M(x, y)$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким же образом определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Из определения следует, что частная производная ФНП представляет собой производную функции одной переменной при фиксированном значении остальных. Поэтому частные производные находятся по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

Геометрический смысл частных производных ФНП.

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Её графиком является некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$ (рисунок 5.1). $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на графике, $M_0(x_0, y_0)$ – проекция точки P_0 на плоскость xOy, $z_0 = M_0P_0$. Через прямую M_0P_0 проведём плоскости $p_1: y = y_0$ и $p_2: x = x_0$. Сечения поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями p_1 и p_2 представляют собой кривые $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ и $z = f(x_0, y) = g(y)$ соответственно. Тогда

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta,$$

где α, β – углы, образованные касательными, проведёнными к кривым $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ и $z = f(x_0, y) = g(y)$в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с положительными направлениями осей Ox и Oy соответственно.

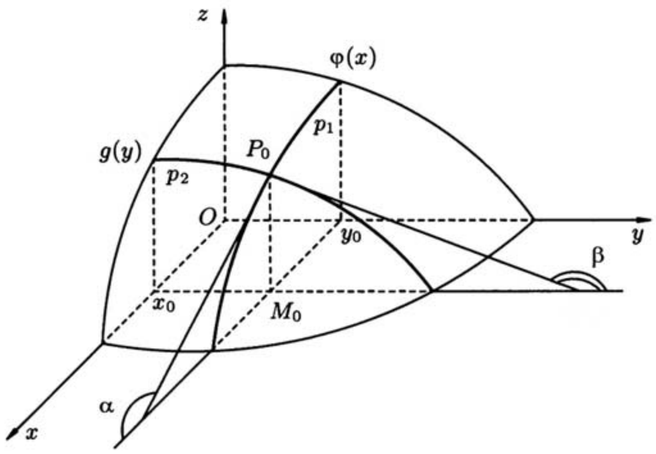

Рисунок 5.1

Дифференцируемость и полный дифференциал функции.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Составим полное приращение функции в точке $M(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве называется ***главной частью*** приращения функции.

Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

Необходимое условие дифференцируемости функции: если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Достаточное условие дифференцируемости функции: если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

Так как приращения независимых переменных совпадают с их дифференциалами, т. е. $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Для функции n переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется равенством

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{5.1}$$

Производные неявных функций.

Пусть уравнение $f(x, y) = 0$, где f – дифференцируемая функция двух переменных x, y, определяет ***неявную*** функцию $y = y(x)$. Тогда производную этой функции можно найти по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \tag{5.2}$$

при условии, что $f'_y(x, y) \neq 0$.

Пусть уравнение $F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0$, где F – дифференцируемая функция n переменных x_1, x_2, …, x_n, определяет ***неявную*** функцию $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда частные производные этой функции можно найти по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \quad i = \overline{1, n},$$

при условии, что $F'_u \neq 0$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется плоскость, в которой содержатся все касательные, проведённые через эту точку к всевозможным кривым, лежащим на поверхности $z = f(x, y)$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то касательная плоскость в этой точке существует и имеет уравнение

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

В какой-либо точке поверхность имеет либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно касательной плоскости в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0. \tag{5.3}$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение нормали в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{5.4}$$

5.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти область определения функции $z=\ln\left(y-x^2+2x\right)$.

Решение

Область определения функции $D(z)$ есть множество точек плоскости xOy, в которых $y-x^2+2x>0$ или $y>x^2-2x$. Границей области D является парабола $y=x^2-2x$. Поскольку точки параболы не принадлежат области D, то она изображается штриховой линией. Далее непосредственной проверкой определяется, что точки, удовлетворяющие неравенству $y>x^2-2x$, расположены выше параболы (рисунок 5.2).

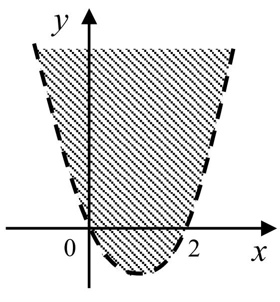

Рисунок 5.2

Пример 2 – Найти частные производные функции $z=2x^3y^2-3xy^3+4x-y$.

Решение

При вычислении частной производной функции z по x считаем, что $y=\mathrm{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2y^2-3y^3+4.$$

При вычислении частной производной функции z по y считаем, что $x=\mathrm{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4x^3y-9xy^2-1.$$

Пример 3 – Найти полный дифференциал функции $u=\ln^2\left(x^2+y^2-z^2\right)$.

Решение

Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2x=\frac{4x\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2y=\frac{4y\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot(-2z)=-\frac{4z\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2}.$$

Полный дифференциал найдем по формуле (5.1):

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\frac{4\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2}\cdot\left(xdx+ydy-zdz\right).$$

Пример 4 – Найти производную функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $2+xy^2-\ln\left(e^x-e^y\right)=0$.

Решение

Воспользуемся формулой (5.2). Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=2+xy^2-\ln(e^x-e^y).$$

Найдём её частные производные:

$$f'_x=y^2-\frac{e^x}{e^x-e^y}=\frac{y^2e^x-y^2e^y-e^x}{e^x-e^y};$$
$$f'_y=2xy-\frac{-e^y}{e^x-e^y}=\frac{2xye^x-2xye^y+e^y}{e^x-e^y}.$$

Получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2e^x-y^2e^y-e^x}{2xye^x-2xye^y+e^y}.$$

Пример 5 – Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\cos(xy)+\frac{xz}{y}-x^2z+z^2-2xyz+\sin z+1=0$ в точке $M_0(\pi;1;0)$.

Решение

Поверхность задана неявно, поэтому воспользуемся формулами (5.3) и (5.4). Составим функцию

$$F(x,y,z)=\cos(xy)+\frac{xz}{y}-x^2z+z^2-2xyz+\sin z+1.$$

Тогда

$$F'_x=-y\sin(xy)+\frac{z}{y}-2xz-2yz, \qquad F'_x(\pi;1;0)=0;$$

$$F'_y=-x\sin(xy)-\frac{xz}{y^2}-2xz, \qquad F'_y(\pi;1;0)=0;$$

$$F'_z=\frac{x}{y}-x^2+2z-2xy+\cos z, \qquad F'_z(\pi;1;0)=1-\pi-\pi^2.$$

Уравнение касательной плоскости

$$0\cdot(x-\pi)+0\cdot(y-1)+\left(1-\pi-\pi^2\right)(z-0)=0;$$

$$z=0.$$

Уравнение нормали

$$\frac{x-\pi}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1-\pi-\pi^2}.$$

5.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти области определения следующих функций:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

2) $z=\ln(x+y)$;

3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

4) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

2 Найти частные производные функций:

1) $z=x^3y^2-x^2+4y-2$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 4$;

2) $z = \ln\left(x^2 - 3xy + 2y\right)$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3y}{x^2 - 3xy + 2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x + 2}{x^2 - 3xy + 2y}$;

3) $u = \sin\frac{y}{xz}$.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2z}\cos\frac{y}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xz}\cos\frac{y}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{xz^2}\cos\frac{y}{xz}$.

3 Найти полные дифференциалы функций:

1) $z = yx^y$.

Ответ: $dz = y^2x^{y-1}dx + \left(x^y + yx^y\ln x\right)dy$;

2) $z = x^2y\cos x - 3y^2$.

Ответ: $dz = \left(2xy\cos x - x^2y\sin x\right)dx + \left(x^2\cos x - 6y\right)dy$.

4 Найти $\frac{dy}{dx}$, если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением:

1) $x^2 - 4y^2 = 4$; 2) $2\cos\left(x - 2y\right) = 2y - x$.

5 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением:

1) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$; 2) $z\ln\left(x + y\right) - \frac{xy}{z} = 0$.

6 Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в указанных точках:

1) $z = x^2 + y^2$ в точке $(1;-2)$;

2) $z = e^{x\cos y}$ в точке $(1;\pi)$;

3) $xy + x^2z - z^2 + 4x - y - 2 = 0$ в точке $(1;-1;2)$.

5.4 Домашнее задание

1 Найти области определения следующих функций:

1) $z = \ln\left(9 - x^2 + y^2\right)$; 2) $z = \sqrt{4 - x^2 + y}$.

2 Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

1) $z = x^5 + 2y^4 - 5x^3y^2$.

Ответ: $dz=\left(5x^4-15x^2y^3\right)dx+\left(8y^3-10x^3y\right)dy$;

2) $z=\dfrac{\cos^2 y}{x}$.

Ответ: $dz=-\dfrac{\cos^2 y}{x^2}dx-\dfrac{2\cos y\sin y}{x}dy$;

3) $u=x^2y\sin z$.

Ответ: $du=2xy\sin z dx+x^2\sin z dy+x^2y\cos z dz$.

3 Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\dfrac{xy}{\sin x}+\ln\dfrac{y}{x}+e^{xy}=0$.

4 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3y+2y^3z^2+4xz^3-3xy^2z-2xy+z-23=0$.

5 Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в указанных точках:

1) $z=x^3+2xy^2$ в точке $(1;-2)$;

2) $\dfrac{z}{xy}+\dfrac{x^2z}{y}-xz^2+2y-2=0$ в точке $(-1;1;0)$;

3) $\sin(xz)-\cos(yz)+x^2=1$ в точке $(0;\pi;1)$.

6 Частные производные высших порядков

6.1 Теоретические сведения

Частные производные высших порядков.

Частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка (если они существуют), т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков.

Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются ***смешанными частными производными.***

Непрерывные смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой. Так, например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала функции

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков:

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Пусть x, y – независимые переменные функции $z = f(x, y)$. Тогда

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{6.1}$$

Символически это записывается $d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$.

Аналогично

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

В общем случае

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Производные и дифференциалы высших порядков функции большего числа переменных определяются таким же образом.

Производная по направлению. Градиент.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta)$. Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпало с направлением $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Обозначим расстояние между точками M и M_1 через $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (или $\Delta l = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$). Функция $z = f(x,y)$ получит при этом приращение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Предел отношения приращения функции к расстоянию между точками M и M_1 при стремлении последнего к нулю (если он существует) называется ***производной функции*** $z = f(x,y)$ ***в точке*** $M(x,y)$ ***по направлению вектора*** $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta. \tag{6.2}$$

Если $\alpha = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$; если $\beta = 0 \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, то $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Следовательно, частные производные функции $z = f(x,y)$ являются частными случаями производной по направлению, т. е. если направление $\vec{l}$ совпадает с осями координат.

Если задана функция $u = f(x,y,z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}. \tag{6.3}$$

Производная по направлению будет принимать максимальное значение, если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением $\operatorname{grad} z$. При этом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} z\right|. \tag{6.4}$$

Таким образом, $\operatorname{grad} z$ в точке $M(x,y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания функции z в данной точке.

Антиградиент, т. е. $-\text{grad}\, z$, характеризует направление наибыстрейшего убывания функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

Если задана функция $u = f(x, y, z)$, то градиент находят по формуле

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}\,. \qquad (6.5)$$

6.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти все частные производные второго порядка для функции $z = x^3 + 2x^2 y + y^2$.

Решение

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 2y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3x^2 + 4xy\right)'_x = 6x + 4y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(3x^2 + 4xy\right)'_y = 4x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x^2 + 2y\right)'_y = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2x^2 + 2y\right)'_x = 4x.$$

Пример 2 – Найти дифференциал второго порядка функции $z = 3x^2 y - 2xy + y^2 - 1$.

Решение

Находим первые и вторые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Следовательно, по формуле (6.1) имеем

$$d^2 z = 6y dx^2 + 2\left(6x - 2\right) dx dy + 2dy^2.$$

Пример 3 – Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ и градиент функции в этой точке, если $B(3;0)$.

Решение

Для нахождения производной по направлению воспользуемся формулой (6.2). Вектор $\overrightarrow{AB} = (3-1; 0-2) = (2; -2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Находим частные производные функции $z = x^2 + xy^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx; \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial x} = 6, \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial y} = 4.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Для нахождения градиента функции в точке A воспользуемся формулой (6.3). Получим

$$\operatorname{grad} z = 6\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Пример 4 – Найти направление наибыстрейшего возрастания функции $u = x^2 y + \dfrac{xy^2}{z} - z^2$ в точке $P(3; 2; -1)$ и значение производной в этом направлении.

Решение

Направление наибыстрейшего возрастания функции задает градиент. Воспользуемся формулой (6.5). Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \frac{y^2}{z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{2xy}{z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy^2}{z^2} - 2z;$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = 8, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial y} = -3, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial z} = -10.$$

Имеем

$$\operatorname{grad} u = 8\vec{i} - 3\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Производная в направлении градиента принимает максимальное значение, которое проще найти по формуле (6.4). Получим

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(P)\right| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{173}.$$

6.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти производные второго порядка и проверить равенство смешанных производных:

1) $z = 2x^4y^3 - 3xy^2 + 5x^2 - y + 1$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x^2y^3 + 10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24x^3y^2 - 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^4y - 6x$;

2) $z = x^y$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$.

2 Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z = x^2y - xy^2 + 7$.

Ответ: $d^2z = 2ydx^2 + 4(x-y)dxdy - 2xdy^2$;

2) $z = xy - \frac{y}{x}$.

Ответ: $d^2z = -\frac{2y}{x^3}dx^2 + 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dxdy$.

3 Найти производную функции $z = x^2 - 4xy - 3y^2$ в точке $P(2;1)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в $60°$.

Ответ: $-7\sqrt{3}$.

4 Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $M(1;2)$ в направлении, идущем от точки M к точке $N(4;6)$.

Ответ: 1.

5 Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $M(5;3)$, если $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

6 Найти направление быстрейшего возрастания функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1;2;-1)$ и вычислить значение производной в этом направлении.

Ответ: $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{6}{7}\right)$; 7.

6.4 Домашнее задание

1 Найти требуемую частную производную или дифференциал:

1) $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, d^2z.

Ответ: $(24x+6y)dx^2+12(x+y)dxdy+(6x-6y)dy^2$;

2) $z=x^2\ln(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Ответ: $\dfrac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$;

3) $z=x\ln\dfrac{y}{x}$, d^2z.

Ответ: $-\dfrac{dx^2}{x}+\dfrac{2dxdy}{y}-\dfrac{xdy^2}{y^2}$;

4) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Ответ: 0.

2 Найти производную функции $z=x^2y-2xy+3y^2+4$ в точке $A(-1;3)$ в направлении, идущем от точки $B(-4;7)$ к точке A. Найти градиент функции $z=x^2y-2xy+3y^2+4$ в точке $B(-4;7)$.

Ответ: -24, $(-16;66)$.

3 Найти направление быстрейшего возрастания функции $u=\dfrac{x^2}{z}-yz+x^2$ в точке $P(0;2;1)$ и вычислить значение производной в этом направлении.

Ответ: $(0;-1;-2)$; $\sqrt{5}$.

7 Условный экстремум ФМП

7.1 Теоретические сведения

Локальный экстремум.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D. Точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ называется ***точкой максимума*** (***минимума***) функции $z=f(x,y)$, если существует такая δ-окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$, что для каждой точки $M(x,y)$ из этой окрестности, отличной от $M_0(x_0,y_0)$, выполняется неравенство $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $\left(f(x,y)>f(x_0,y_0)\right)$.

Значения функции в точках максимума и минимума называются ***максимумом*** и ***минимумом функции*** соответственно. Максимумы и минимумы функции называют ***экстремумами функции***.

***Необходимые условия экстремума*: **если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то её частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Точки, в которой частные производные первого порядка равны нулю, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ также может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Такие точки и стационарные точки называются ***критическими точками***.

***Достаточные условия экстремума*:** пусть в критической точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой её окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}; \qquad B = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}; \qquad C = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta < 0$, то M_0 не является точкой экстремума;

2) если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то M_0 является точкой максимума;

3) если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то M_0 является точкой минимума;

4) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Глобальный экстремум.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в некоторых точках области D своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. имеет так называемый ***глобальный экстремум***. Эти значения могут достигаться функцией как в точках, расположенных внутри области D, так и в точках, лежащих на границе области D.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, необходимо:

1) найти все критические точки функции, расположенные в области D, и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области D;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Условный экстремум.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, причём переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, которое называется ***уравнением связи***.

Экстремум функции $z = f(x,y)$, достигаемый при условии $\varphi(x,y) = 0$, называется ***условным экстремумом*** функции.

В определённых случаях задача отыскания условного экстремума может быть решена методом подстановки. Для этого надо из уравнения связи выразить одну переменную через другую и подставить в заданную функцию. В результате получим функцию одной независимой переменной, которую следует исследовать на экстремум.

В случаях, когда применить метод подстановки не представляется возможным, отыскание условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум ***функции Лагранжа***

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y), \tag{7.2}$$

где λ – неопределённый постоянный множитель.

Функция Лагранжа является функцией трёх переменных. Необходимым условием существования экстремума данной функции является равенство нулю частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Система уравнений (7.3) является ***необходимым условием условного экстремума***. Решения системы определяют критические точки функции Лагранжа.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа для найденных решений системы при условии $d\varphi(x_0, y_0) = 0$ и $dx^2 + dy^2 \neq 0$. Пусть

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2,$$

тогда при $d^2L < 0$ функция $z = f(x,y)$ будет иметь условный максимум, а при $d^2L > 0$ – условный минимум.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции $z = f(x,y)$ называется ***методом множителей Лагранжа***.

7.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти экстремум функции $z = x^3 + 6xy + y^2 - 3x - 6y$.

Решение

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y - 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y - 6.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида (7.1):

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y - 3 = 0; \\ 6x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили критические точки $M_1(5;-12)$ и $M_2(1;0)$. Далее находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6; \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Вычисляем значения частных производных второго порядка и составляем определитель Δ для каждой из критических точек.

Для точки M_1

$$A = 30,\ B = 6,\ C = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 30 \cdot 2 - 6^2 = 24.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то M_1 является точкой локального минимума. При этом $z_{\min} = z(5;-12) = -34$.

Для точки M_2

$$A = 6,\ B = 6,\ C = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 6 \cdot 2 - 6^2 = -24.$$

Так как $\Delta < 0$, то M_2 не является точкой экстремума.

Пример 2 – Для функции $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + 1$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Решение

Построим область D (рисунок 7.1).

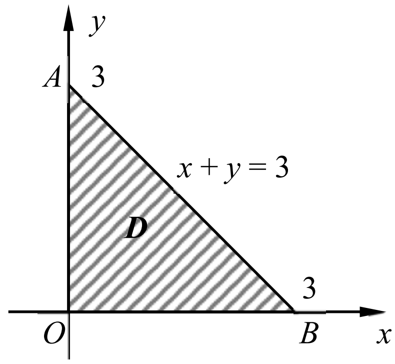

Рисунок 7.1

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 4.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида (7.1):

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0; \\ -4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Получили критическую точку $M_0(1;1)$, лежащую внутри области D. Вычислим значение функции в точке M_0: $z(1;1) = 2$.

Исследуем функцию на границах области D. Рассмотрим сторону OA:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2y^2 + 4y + 1,\ y \in [0;3];$$
$$z' = -4y + 4, \quad -4y + 4 = 0, \quad y = 1 \in [0;3];$$
$$z(0) = 1, \quad z(1) = 3, \quad z(3) = -5.$$

Рассмотрим сторону OB:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x^2 - 2x + 1,\ x \in [0;3];$$
$$z' = 2x - 2, \quad 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \in [0;3];$$
$$z(0) = 1, \quad z(1) = 0, \quad z(3) = 4.$$

Рассмотрим сторону AB:

$$y = 3 - x \quad \Rightarrow \quad z = -x^2 + 6x - 5,\ x \in [0;3];$$
$$z' = -2x + 6, \quad -2x + 6 = 0, \quad x = 3 \in [0;3];$$
$$z(0) = -5, \quad z(3) = 4.$$

Сравнивая найденные значения, получаем

$$\max_D z = \max\{2;1;3;-5;0;4\} = 4 = z(3;0);$$
$$\min_D z = \min\{2;1;3;-5;0;4\} = -5 = z(0;3).$$

Пример 3 – Найти экстремум функции $z = x\,y$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение

Составляем функцию Лагранжа (7.2):

$$L = xy + \lambda \cdot (2x + 3y - 5).$$

Найдём частные производные первого порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda.$$

Необходимые условия экстремума (7.3) примут вид

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0; \\ x + 3\lambda = 0; \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является точка $M_0\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6};-\frac{5}{12}\right)$.

Найдём частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциалом второго порядка функции Лагранжа будет

$$d^2 L = 2dxdy.$$

Выразим x через y из уравнения связи и найдём его дифференциал:

$$dx = -\frac{3}{2}dy.$$

Отсюда получаем, что $d^2 L = -3dy^2 < 0$. Следовательно, в точке M_0 функция имеет условный максимум, причём

$$z_{\max} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$$

7.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти экстремум функции $z=-x^2+xy-y^2-9y+6x-35$.
Ответ: $z_{\max}=z(1;-4)=-14$.

2 Найти экстремум функции $z=(x-1)^2-2y^2$.
Ответ: экстремума нет.

3 Найти экстремум функции $z=14x^3+27xy^2-69x-54y$.
Ответ: $z_{\max}=z(-1;-1)=82$, $z_{\min}=z(1;1)=-82$.

4 Найти экстремум функции $z=e^{xy}$ при условии $x+y=1$.

Ответ: $z_{\max}=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{4}}$.

5 Найти экстремум функции $z=x+2y$ при условии $x^2+y^2=5$.
Ответ: $z_{\max}=z(1;2)=5$, $z_{\min}=z(-1;-2)=-5$.

6 Для функции $z=1+x+2y$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x-y-1=0$.
Ответ: $\max\limits_{D} z=z(1;0)=2$, $\min\limits_{D} z=z(0;-1)=-1$.

7 Для функции $z=x^2-y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линией $x^2+y^2=1$.
Ответ: $\max\limits_{D} z=z(1;0)=z(-1;0)=1$, $\min\limits_{D} z=z(0;1)=z(0;-1)=-1$.

7.4 Домашнее задание

1 Найти экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-12x-3y$.
Ответ: $z_{\min}=z(7;-2)=-39$.

2 Найти экстремум функции $z=xy$ при условии $x+y=1$.

Ответ: $z_{\max}=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

3 Для функции $z=x^3+y^3-3xy$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=2$.
Ответ: $\max\limits_{D} z=z(2;-1)=13$, $\min\limits_{D} z=z(1;1)=z(0;-1)=-1$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – Москва: Высшая школа, 1996. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 383 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

6 Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.

7 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1988. – 576 с.

8 Сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.

9 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 479 с.