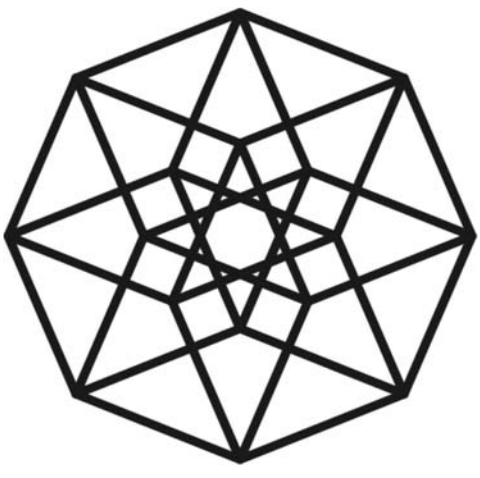
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Могилев 2024

УДК 517.91
ББК 22.161.6
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» ноября 2023 г., протокол № 3

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Дифференциальные уравнения» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. Приведены необходимые теоретические сведения, разобраны примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы на практических занятиях и задания для домашней работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Теоретические сведения

Общие сведения.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или дифференциалы).

ДУ называется ***обыкновенным***, если неизвестная функция, входящая в уравнение, зависит только от одной независимой переменной.

Порядком ДУ называется порядок входящей в уравнение старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Обыкновенное ДУ первого порядка (ДУ-1) имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1), разрешенное относительно производной, называют ДУ в ***нормальной форме***. Оно имеет вид

$$y' = f\left(x, y\right), \tag{1.2}$$

где функция $f\left(x, y\right)$ задана в некоторой области D плоскости xOy.

Решением **(*частным решением*)** уравнения (1.1) (или (1.2)) называется функция

$$y = \varphi\left(x\right), \tag{1.3}$$

определенная на некотором промежутке σ действительной оси и дифференцируемая на этом промежутке, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Решение ДУ, заданное неявно соотношением

$$\Phi\left(x, y\right) = 0, \tag{1.4}$$

называется ***интегралом*** этого уравнения.

График решения ДУ называется ***интегральной кривой ДУ.***

Решение (1.3) (или (1.4)) дифференциального уравнения (1.1) (или (1.2)), удовлетворяющее условию $y\left(x_0\right) = y_0$, называется ***частным решением*** (или ***частным интегралом***) ДУ, удовлетворяющим начальному условию.

Функция $y = \varphi\left(x, C\right)$, зависящая от x и постоянной C, называется ***общим решением*** уравнения (1.1) (или (1.2)), если она является решением этого уравнения при любом фиксированном значении C; каково бы ни было начальное условие $y\left(x_0\right) = y_0$, можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Равенство $\Phi(x,y,C)=0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом*** уравнения (1.1) (или (1.2)) в области σ.

Решение ДУ, которое не может быть получено из общего ни при каком значении $C\in\mathbb{R}$, называют его ***особым решением***.

Процесс нахождения решения ДУ (1.1) (или (1.2)) называется ***интегрированием*** этого уравнения.

Основная задача интегрирования ДУ состоит в нахождении всех решений ДУ и изучении их свойств.

Задача отыскания решения (1.3) ДУ (1.2), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется ***задачей Коши***.

Теорема Коши. Если $f(x,y)$ и $f'_y(x;y)$ непрерывны в окрестности точки $(x_0,y_0)\in D$, то существует единственное решение (1.3) этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Уравнения с разделяющимися переменными.

ДУ первого порядка с ***разделенными переменными*** называется уравнение вида

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \tag{1.5}$$

где при dx стоит функция, зависящая только от x, а при dy – функция, зависящая только от $y=y(x)$.

Общий интеграл ДУ (1.5) имеет вид

$$\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=C,$$

где C – произвольная постоянная.

ДУ первого порядка с ***разделяющимися переменными*** называется уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0. \tag{1.6}$$

Если $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$, то, разделив обе части уравнения (1.6) на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0.$$

Следовательно, общий интеграл последнего уравнения, а значит, и уравнения (1.6), имеет вид

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C. \qquad (1.7)$$

Если же $f_2(x)=0$ при некотором $x=\alpha$ или $\varphi_1(y)=0$ при некотором $y=\beta$, то уравнение (1.6), наряду с общим интегралом, имеет также решения $x=\alpha$ или $y=\beta$. Если эти решения не могут быть получены из (1.7) при каком-то значении C, то они будут называться ***особыми решениями***.

ДУ вида $y'=f(ax+by+c)$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, сводится к ДУ с разделяющимися переменными (1.6) при помощи замены $z=ax+by,$ где $z=z(x)$ – новая искомая функция.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти общий и частный интегралы ДУ $(1+e^x)yy'=e^x$, удовлетворяющие начальному условию $y(0)=1$.

Решение

Так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то, разделяя переменные, получим

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x; \qquad ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

Проинтегрировав, найдем общий интеграл ДУ:

$$\int y\,dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx+C; \qquad \frac{y^2}{2}=\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}+C;$$

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C.$$

Так как $1+e^x\neq 0\ \forall x$, то особых решений уравнение не имеет.

Полагая в общем интеграле $x=0,\ y=1$, находим $C=\dfrac{1}{2}-\ln 2=\ln\dfrac{\sqrt{e}}{2}$. Подставляя найденное значение C в общий интеграл, получим для ДУ частный интеграл

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+\ln\frac{\sqrt{e}}{2},$$

удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$.

Пример 2 – Найти общий интеграл ДУ $\left(xy^2+y^2\right)dx+\left(x^2-x^2y\right)dy=0$.

Решение

Преобразуем левую часть уравнения:

$$y^2\left(x+1\right)dx+x^2\left(1-y\right)dy=0.$$

Разделив уравнение на $x^2y^2\neq 0$, имеем

$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0.$$

Проинтегрировав, получим общий интеграл ДУ:

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx=-\int\frac{1-y}{y^2}dy+C; \qquad \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy+C;$$

$$\ln|x|-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\ln|y|+C.$$

Разделяя переменные в уравнении, делили на $x^2y^2\neq 0$. Если же $x^2y^2=0$, то имеем $x=0$, $y=0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=0$ и $y=0$ являются решениями данного ДУ. Но они не получаются из общего интеграла ни при каком значении C. Следовательно, $x=0$ и $y=0$ – особые решения данного уравнения.

Пример 3 – Найти общий интеграл ДУ $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0$ и частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y\left(\sqrt{8}\right)=1$.

Решение

Разделив обе части уравнения на $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$, получим

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0.$$

Интегрируя данное уравнение, получим общий интеграл ДУ:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{1+y^2}{y}dy=C; \qquad \int\frac{d\left(1+x^2\right)}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}+\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=C;$$

$$\sqrt{1+x^2}+\frac{y^2}{2}+\ln|y|=C.$$

Полагая в общем интеграле $x=\sqrt{8}$, $y=1$, находим $C=\sqrt{9}+\frac{1}{2}+\ln 1=\frac{7}{2}$. Подставляя это значение C в общий интеграл, получаем частный интеграл ДУ:

$$\sqrt{1+x^2}+\frac{y^2}{2}+\ln|y|=\frac{7}{2}.$$

Пример 4 – Найти общий интеграл ДУ $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

Решение

Запишем уравнение в виде

$$y'=-\frac{2x+3y-1}{2(2x+3y)-5}.$$

Введем замену $z=2x+3y$, откуда

$$y=\frac{z-2x}{3}; \qquad y'=\frac{1}{3}z'-\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{1}{3}z'-\frac{2}{3}=-\frac{z-1}{2z-5}; \qquad z'=2-\frac{3z-3}{2z-5}; \qquad z'=\frac{z-7}{2z-5}; \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{z-7}{2z-5};$$

$$\frac{2z-5}{z-7}dz=dx; \qquad \int\frac{2(z-7)+9}{z-7}dz=\int dx+C; \qquad \int\left(2+\frac{9}{z-7}\right)dz=x+C;$$

$$2z+9\ln|z-7|=x+C.$$

Так как $z=2x+3y$, получаем общий интеграл исходного ДУ:

$$4x+6y+9\ln|2x+3y-7|=x+C.$$

1.3 Задания для самостоятельной работы

Проинтегрировать уравнения:

1) $(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0$. *Ответ*: $y=C(x^2+1)-3$;

2) $y\cdot y'+x=1$. *Ответ*: $y^2=2x-x^2+C$;

3) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; $y(\sqrt{3})=0$. *Ответ*: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3$;

4) $y'\sin x - y\cos x = 0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. *Ответ*: $y = \sin x$;

5) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1+x^2}} = 0$. *Ответ*: $\arcsin y = C - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$;

6) $(1+2y)xdx - \left(1+x^2\right)dy = 0$. *Ответ*: $1 + x^2 = C(2y+1)$;

7) $\left(y^2 + xy^2\right)y' + x^2 - yx^2 = 0$. *Ответ*: $\dfrac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$;

8) $3e^x \operatorname{tg} ydx + \dfrac{1-e^x}{\cos^2 y}dy = 0$. *Ответ*: $\left(e^x - 1\right)^3 = C\cdot \operatorname{tg} y$;

9) $y' = \cos(x+y)$. *Ответ*: $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = x + C$;

10) $y' = (4x+y+1)^2$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{4x+y+1}{2} = x + C$.

1.4 Домашнее задание

Проинтегрировать уравнения:

1) $ydx + \operatorname{ctg} xdy = 0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. *Ответ*: $y = -2\cos x$;

2) $y^2 + y'\cdot x^2 = 0;\quad y(-1) = 1$. *Ответ*: $y = -x$;

3) $\sin x\cdot \sin ydx + \cos x\cdot \cos ydy = 0$. *Ответ*: $\cos x = C\cdot \sin y$;

4) $\left(1-x^2\right)y' + xy = 2x$. *Ответ*: $y = C\cdot\sqrt{x^2-1} + 2$;

5) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy\left(1+x^2\right)}$. *Ответ*: $y^2 + 1 = \dfrac{Cx^2}{x^2+1}$;

6) $y'\sin x = y\ln y;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. *Ответ*: $y = 1$;

7) $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$. *Ответ*: $x + 2y + 3\ln|x+y-2| = C$.

2 Однородные, линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли

2.1 Теоретические сведения

Однородные дифференциальные уравнения.

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной n-го измерения*** $(n\in\mathbb{N})$ относительно своих аргументов x и y, если для любого значения t, кроме, может быть, $t=0$, имеет место тождество $f(tx,ty) = t^n\cdot f(x,y)$.

Например, $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$ – однородная функция третьего измерения относительно аргументов, т. к.

$$f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)^2\cdot(ty)=t^3\left(x^3+3x^2y\right)=t^3\cdot f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Однородное ДУ $y'=f(x,y)$ преобразуется к виду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.1}$$

с помощью подстановки $\frac{y}{x}=u$, откуда $y=ux$, $y'=u'x+u$. В результате получаем уравнение с разделяющимися переменными $u'x+u=\varphi(u)$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

ДУ первого порядка называется ***линейным***, если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'.

Общий вид линейного ДУ первого порядка имеет вид

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{2.2}$$

Если правая часть уравнения (2.2) $Q(x)\equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Линейное однородное ДУ имеет вид

$$y'+P(x)y=0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим два метода решения линейных ДУ первого порядка: метод Бернулли (метод подстановки) и метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Метод Бернулли. Произведём в уравнении (2.2) замену переменной, положив $y=u\cdot v$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$. Тогда $y'=u'v+uv'$ и уравнение (2.2) примет вид

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x);$$

$$u'v+u\left(v'+P(x)\cdot v\right)=Q(x). \tag{2.4}$$

Одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно взять произвольной, другая определяется на основании уравнения (2.4). В качестве функции $v(x)$ выбираем частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Тогда $v = e^{-\int P(x)dx}$. Подставив выражение v в уравнение (2.4), найдём $u = u(x,C)$. Затем находим общее решение уравнения (2.2) в виде $y = u(x,C) \cdot v(x)$.

Метод Лагранжа. Сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (2.3), т. е. соотношение $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$. Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем общее решение неоднородного уравнения (2.2) в виде $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$. Функцию $C(x)$ находим из уравнения (2.2), подставив в него выражение для y и $y' = \left(C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\right)' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x)$.

Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$. Оно сводится к линейному при помощи подстановки $u = y^{1-\alpha}$. Уравнение Бернулли можно решать теми же способами, что и линейное уравнение, не производя замену $u = y^{1-\alpha}$.

2.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти общее решение ДУ $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.

Решение

Приводим ДУ к виду (2.1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}; \qquad y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Применяем подстановку $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Следовательно,

$$u'x + u = u - u^2; \qquad u'x = -u^2; \qquad \frac{du}{dx} \cdot x = -u^2; \qquad -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл ДУ:

$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C; \qquad \frac{1}{u} = \ln|x| + C; \qquad \frac{x}{y} = \ln|x| + C.$$

Пример 2 – Найти общее решение ДУ $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$, а также частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=1$.

Решение

Это уравнение однородное (убедиться самостоятельно). Приводим его к виду (2.1):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}; \qquad y'=\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Применяем подстановку $\frac{y}{x}=u$, тогда $y=ux$, $y'=u'x+u$. Следовательно,

$$u'x+u=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2u}; \qquad \frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^2-1}{2u}; \qquad \frac{2u\,du}{u^2-1}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл ДУ:

$$\int\frac{2u\,du}{u^2-1}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C| \;\; (C\neq 0); \qquad \ln\left|u^2-1\right|=\ln|x|+\ln|C|; \qquad u^2-1=Cx;$$

$$\frac{y^2}{x^2}=1+Cx; \qquad y^2=x^2(1+Cx).$$

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=1$. Подставив $x=2$, $y=1$ в общий интеграл, находим значение C: $1=4(1+2C)$, $C=-\frac{3}{8}$. Тогда частным решением ДУ при условии $y(2)=1$ будет

$$y=\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{8}x\right)}.$$

Пример 3 – Проинтегрировать уравнение $y'-y\cdot\operatorname{ctg}x=\sin x$.

Решение

Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y=u\cdot v$. Тогда $y'=u'v+uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид

$$u'v+uv'-uv\cdot\operatorname{ctg}x=\sin x; \qquad u'v+u\left(v'-v\cdot\operatorname{ctg}x\right)=\sin x.$$

Для нахождения функций u и v получаем систему

$$\begin{cases} v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0; \\ u'v = \sin x. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$$v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0; \qquad \frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{ctg} x; \qquad \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x\, dx; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x\, dx;$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x|; \qquad v = \sin x.$$

Находим u как общий интеграл второго уравнения системы, подставив в него найденное v:

$$u' \cdot \sin x = \sin x; \qquad u' = 1; \qquad u = x + C.$$

Таким образом, общим решением исходного ДУ будет

$$y = u \cdot v = \left(x + C\right) \cdot \sin x.$$

Пример 4 – Найти частное решение ДУ $y' - y = 2e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(0\right) = 1$.

Решение

Применим метод вариации произвольной постоянной. Линейное однородное ДУ, соответствующее заданному уравнению, имеет вид $y' - y = 0$. Его общим решением будет $y = C \cdot e^x$, где C – произвольная постоянная.

Будем искать общее решение исходного уравнения в виде $y = C\left(x\right) \cdot e^x$, где $C\left(x\right)$ – неизвестная функция от x. Так как $y' = C'\left(x\right) \cdot e^x + C\left(x\right) \cdot e^x$, то, подставляя выражения для y и y' в линейное неоднородное уравнение, получим

$$C'\left(x\right) \cdot e^x + C\left(x\right) \cdot e^x - C\left(x\right) \cdot e^x = 2e^x; \qquad C'\left(x\right) = 2; \qquad C\left(x\right) = 2x + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Итак, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left(2x + C_1\right)e^x.$$

Полагая $y = 1$, $x = 0$, из этого уравнения находим $C_1 = 1$. Тогда частное решение исходного ДУ имеет вид

$$y = \left(2x + 1\right)e^x.$$

Пример 5 – Проинтегрировать уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решение

Имеем уравнение Бернулли $y'+\frac{y}{x}=y^2\cdot\frac{\ln x}{x}$. Полагаем $y=u\cdot v$, тогда $y'=u'v+uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=u^2v^2\cdot\frac{\ln x}{x};\qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=u^2v^2\cdot\frac{\ln x}{x}.$$

Для нахождения функций u и v получаем систему

$$\begin{cases}v'+\dfrac{v}{x}=0;\\ u'v=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}.\end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$$v'+\frac{v}{x}=0;\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x};\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\qquad \ln|v|=-\ln|x|;\qquad v=\frac{1}{x}.$$

С учётом найденного v интегрируем второе уравнение системы:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=u^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln x}{x};\qquad \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=u^2\cdot\frac{\ln x}{x^3};\qquad \frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx;$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx-C.$$

Интеграл справа найдем с помощью метода интегрирования по частям.

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{bmatrix}u_1=\ln x,\, du_1=\dfrac{dx}{x}\\ dv_1=\dfrac{dx}{x^2},\, v_1=-\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{\ln x+1}{x}.$$

Тогда

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x+1}{x}-C;\qquad \frac{1}{u}=\frac{\ln x+1+Cx}{x};\qquad u=\frac{x}{\ln x+1+Cx}.$$

Таким образом, общим решением исходного ДУ будет

$$y=u\cdot v=\frac{x}{\ln x+1+Cx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln x+1+Cx}.$$

2.3 Задания для самостоятельной работы

1 Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}; \quad y(1) = 1$. *Ответ*: $y^2 = 2x^2 \ln|x| + x^2$;

2) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$. *Ответ*: $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$;

3) $\left(x^2 + y^2\right)dx = 2xydy$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{x^2 - y^2} = Cx$;

4) $(x - y)ydx - x^2dy = 0; \quad y(1) = \dfrac{1}{3}$. *Ответ*: $y = \dfrac{x}{3 + \ln|x|}$.

2 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^4}{4} + C\right)$;

2) $xy' - y = x^2 \cos x$. *Ответ*: $y = x(\sin x + C)$;

3) $x' + x\cos y = \cos y; \quad x(0) = 1$. *Ответ*: $x = 1$;

4) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. *Ответ*: $y = e^{x^2}\left(x^2 + C\right)$.

3 Решить уравнения Бернулли:

1) $y'x + y = -xy^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x\left(\ln|x| + C\right)}$;

2) $x^2y^2y' + xy^3 = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2} + C}$;

3) $2xyy' - y^2 + x = 0$. *Ответ*: $y^2 = x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

4) $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$. *Ответ*: $x^2 = \dfrac{C}{y(C + y)}$.

2.4 Домашнее задание

1 Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}; \quad y(-1) = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{1 - 3x^2}{2x}$;

2) $xdy + \left(x \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x} - 1} - y\right)dx = 0; \quad y(1) = 1$. *Ответ*: $2\sqrt{\dfrac{y}{x} - 1} = \ln|x|$.

2 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $x^2 + xy' = y$; $\quad y(1) = 0$. *Ответ*: $y = x(1-x)$;

2) $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$. *Ответ*: $y = e^{-x}\left(C - \ln|1-x|\right)$.

3 Решить уравнения Бернулли:

1) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x^2 + Cx}$;

2) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$; $\quad y(0) = -1$. *Ответ*: $y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{2x+1}$.

3 ДУ высших порядков

3.1 Теоретические сведения

Общие сведения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{3.1}$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция переменной x;

$y', ..., y^{(n)}$ – её производные.

При этом функция F может явно не зависеть от $x, y, y', ..., y^{n-1}$, но обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$.

Уравнение (3.1), разрешенное относительно $y^{(n)}$, т. е. записанное в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{3.2}$$

называется ***ДУ в нормальной форме***.

Функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется ***общим решением уравнения*** (3.2), если она является решением этого уравнения для любых значений $C_1, C_2, ..., C_n$ и каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, существуют единственные значения постоянных $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, такие, что функция $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ удовлетворяет начальным условиям.

Неявно заданное общее или частное решение ДУ называется соответственно ***общим*** или ***частным интегралом ДУ*** соответственно.

Задача Коши и теорема Коши для ДУ высшего порядка формулируются аналогично их формулировкам для ДУ первого порядка.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим ДУ $y^{(n)}=f(x)$, $F(x,y',y'')=0$, $F(y,y',y'')=0$.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается n-кратным интегрированием ДУ.

Уравнение вида $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение первого порядка посредством подстановки $y'=p(x)$, откуда $y''=\dfrac{dp}{dx}$.

Уравнение вида $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумента x, преобразуется в уравнение первого порядка посредством подстановки $y'=p(y)$, откуда $y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot p$.

3.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти общее решение ДУ $y'''=\dfrac{1}{x^3}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=2$, $y'(1)=\dfrac{1}{2}$, $y''(1)=\dfrac{3}{2}$.

Решение

Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем общее решение ДУ:

$$y''=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C_1;$$

$$y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+C_1\right)dx=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2;$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2x}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Подставляя $x=1$, $y=2$, $y'=\dfrac{1}{2}$, $y''=\dfrac{3}{2}$ в выражения для y, y', y'', найдем значения C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases}2=\dfrac{1}{2}\cdot\ln 1+C_1\cdot\dfrac{1}{2}+C_2+C_3;\\[2mm] \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+C_1+C_2;\\[2mm] \dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}+C_1\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}C_1=2;\\ C_2=-2;\\ C_3=3.\end{cases}$$

Искомое частное решение получаем из общего решения, подставляя найденные значения произвольных постоянных:

$$y=\frac{1}{2}\ln|x|+x^2-2x+3.$$

Пример 2 – Проинтегрировать уравнение $y''=2\left(y'-1\right)\operatorname{ctg}x$.

Решение

Имеем уравнение вида $F\left(x,y',y''\right)=0$. Полагаем $y'=p,\ p=p\left(x\right)$. Тогда $y''=\frac{dp}{dx}$. После подстановки получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, интегрируя которое, находим $p\left(x\right)$.

$$\frac{dp}{dx}=2\left(p-1\right)\operatorname{ctg}x; \qquad \frac{dp}{p-1}=2\operatorname{ctg}x dx; \qquad \int\frac{dp}{p-1}=2\int\operatorname{ctg}x dx;$$

$$\ln|p-1|=2\ln|\sin x|+\ln|C_1|\ \ (C_1\neq 0); \qquad p-1=C_1\sin^2 x; \qquad p=1+C_1\sin^2 x.$$

Заменяя переменную p на $\frac{dy}{dx}$, получим уравнение $\frac{dy}{dx}=1+C_1\sin^2 x$, откуда $dy=\left(1+C_1\sin^2 x\right)dx$. Интегрируя, найдём общее решение исходного ДУ:

$$y=\int\left(1+C_1\sin^2 x\right)dx=x+\frac{C_1}{2}\int\left(1-\cos 2x\right)dx=x+\frac{C_1}{2}x-\frac{C_1}{4}\sin 2x+C_2.$$

Пример 3 – Найти частное решение уравнения $yy''-\left(y'\right)^2=y^2y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(1\right)=1,\ y'\left(1\right)=2$.

Решение

Имеем уравнение вида $F\left(y,y',y''\right)=0$. Полагаем $y'=p,\quad p=p\left(y\right)$. Тогда $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$. Имеем

$$y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}-p^2=y^2\cdot p; \qquad p\cdot\left(y\frac{dp}{dy}-p-y^2\right)=0.$$

Приравнивая первый множитель к нулю, получаем простейшее уравнение $p=0$, т. е. $y'=0$. Его решение $y=C$.

Приравнивая второй множитель к нулю, получаем линейное ДУ относительно $p\left(y\right)$:

$$yp' - p - y^2 = 0; \qquad p' - \frac{1}{y}p = y.$$

Его решение ищем в виде $p = uv$, тогда $p' = u'v + uv'$ и имеем

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = y; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = y; \qquad v' - \frac{v}{y} = 0;$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}; \qquad v = y.$$

Так как $v = y$, то $u'v = y$ или $\frac{du}{dy}y = y$, откуда $\frac{du}{dy} = 1$ или $u = y + C_1$. Тогда

$$p = uv = y(y + C_1); \qquad y' = y(y + C_1).$$

Из начальных условий найдем C_1. Так как $y(1) = 1,\ y'(1) = 2$, то $2 = 1(1 + C_1)$, откуда $C_1 = 1$. Следовательно,

$$y' = y(y+1); \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 + y; \qquad \frac{dy}{y^2 + y} = dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int dx + C_2; \qquad \int \frac{d\left(y + \frac{1}{2}\right)}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = x + C_2;$$

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \ln\left|\frac{y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = x + C_2; \qquad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_2.$$

Найдем C_2: $\ln\frac{1}{2} = 1 + C_2$, $C_2 = -1 - \ln 2$.

Таким образом, частным решением исходного ДУ будет

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x - 1 - \ln 2.$$

3.3 Задания для самостоятельной работы

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1) $y''' = \cos 2x$. *Ответ*: $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$;

2) $y'' = 3x^2$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \frac{x^4}{4} + x + 2$;

3) $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$; $y''(0) = -\frac{5}{8}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$;

4) $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$. *Ответ*: $y = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2$;

5) $x(y''+1) + y' = 0$. *Ответ*: $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$;

6) $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right)$; $y(1) = \frac{1}{2}$; $y'(1) = 1$. *Ответ*: $y = \frac{1}{2}x^2$;

7) $y^{IV} = \frac{y'''}{x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$; $y''(1) = 0$; $y'''(1) = 1$.

Ответ: $y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{7}{3}x - \frac{9}{8}$;

8) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. *Ответ*: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x\ln x - x) + C_2 x + C_3$;

9) $1 + (y')^2 = 2yy''$. *Ответ*: $\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$;

10) $2(y')^2 = (y-1)y''$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$; $y = \frac{x}{x+1}$.

3.4 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1) $y''' = 8e^{-2x} + 3x^2$. *Ответ*: $y = -e^{-2x} + \frac{x^5}{20} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$;

2) $y''' = \frac{6}{x^3}$; $y(1) = 2$; $y'(1) = 1$; $y''(1) = 1$. *Ответ*: $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$;

3) $y'' - \frac{y'}{x} = 0$. *Ответ*: $y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$;

4) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$. *Ответ*: $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$;

5) $y'' - 2yy' = 0;\quad y(0) = 1;\; y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{1-x}$;

6) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = \pm x + C_2$.

4 Линейные однородные ДУ высших порядков

4.1 Теоретические сведения

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = 0$, где $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$ – непрерывные на некотором интервале (a,b) функции, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением*** **(*ЛОДУ*) *n-го порядка.***

Система функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется ***линейно независимой*** на интервале (a,b), если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Всякая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ ЛОДУ *n*-го порядка называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Структура общего решения ЛОДУ n-го порядка. Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – фундаментальная система решений ЛОДУ *n*-го порядка, то общее решение y_{oo} этого уравнения имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0, \tag{4.1}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – некоторые действительные числа, называется ***линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.***

Уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n = 0 \tag{4.2}$$

называется ***характеристическим уравнением*** ЛОДУ (4.1).

Уравнение (4.2) по основной теореме алгебры имеет n корней: $k_1, k_2, ..., k_n$. Каждому из этих корней соответствует частное решение y_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ ЛОДУ (4.1), которые находятся по правилу из таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Частные решения ЛОДУ n-го порядка

Корень характеристического уравнения	Частное решение ЛОДУ
$k \in \mathbb{R}$ – однократный корень	e^{kx}
$k \in \mathbb{R}$ – r-кратный корень	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, ..., x^{r-1}e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – однократные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – r-кратные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Частным случаем ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами является ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \qquad (4.3)$$

где $p, q \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение ЛОДУ (4.3) имеет вид

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Общее решение ЛОДУ (4.3) в зависимости от корней характеристического уравнения находится по правилу из таблицы 4.2.

Таблица 4.2 – Частные и общее решения ЛОДУ второго порядка

Корень характеристического уравнения	Фундаментальная система решений ЛОДУ	Общее решение ЛОДУ
$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}$	$y_{oo} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$	$y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2x)$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

4.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 12y = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 - k - 12 = 0$. Его корни $k_1 = 4$, $k_2 = -3$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{4x}; \qquad y_2 = e^{-3x}.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}.$$

Пример 2 – Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Его корни $k_{1,2} = 2$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{2x}; \qquad y_2 = xe^{2x}.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 + 4k + 20 = 0$. Его корни $k_{1,2} = -2 \pm 4i$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{-2x}\cos 4x; \qquad y_2 = e^{-2x}\sin 4x.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right).$$

Пример 4 – Проинтегрировать уравнение $y'' - 5y' - 6y = 0$ и найти частное решение при начальных условиях $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 - 5k - 6 = 0$. Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 6$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{-x}; \qquad y_2 = e^{6x}.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}.$$

Используя начальные условия, получим систему двух линейных уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2; \\ 4 = -C_1 + 6C_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, искомое частное решение примет вид

$$y_ч = 2e^{-x} + e^{6x}.$$

Пример 5 – Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - 8y' = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^3 - 2k^2 - 8k = 0$. Его корни $k_1 = 0,\ k_2 = -2,\ k_3 = 4$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{0x} = 1; \qquad y_2 = e^{-2x}; \qquad y_3 = e^{4x}.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x}.$$

Пример 6 – Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0$. Его корни $k_{1,2,3} = 0$, $k_{4,5} = -1 \pm i$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = 1; \qquad y_2 = x; \qquad y_3 = x^2; \qquad y_4 = e^{-x}\cos x; \qquad y_5 = e^{-x}\sin x.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-x}\left(C_4 \cos x + C_5 \sin x\right).$$

4.3 Задания для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$;

2) $y'' + 8y' + 16y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$;

3) $y'' - 6y' + 34y = 0$. *Ответ*: $y = e^{3x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right)$;

4) $y'' - 4y' + 3y = 0;\quad y(0) = 6;\ y'(0) = 10$. *Ответ*: $y = 2e^{3x} + 4e^{x}$;

5) $y'' + 4y = 0;\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 2$. *Ответ*: $y = \sin 2x$;

6) $y'' - 4y' + 4y = 0;\quad y(0) = 3;\ y'(0) = -1$. *Ответ*: $y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$;

7) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 x e^{5x}$;

8) $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 13y^{(4)} = 0$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{3x}\cos 2x + C_6 e^{3x}\sin 2x$;

9) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{3x}$;

10) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0;\quad y(0) = -1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -6$.

Ответ: $y = -2e^{x} + \cos 2x + \sin 2x$.

4.4 Домашнее задание

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

1) $y''-6y'+9y=0$. *Ответ*: $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$;

2) $4y''-8y'+5y=0$. *Ответ*: $y=e^{x}\left(C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

3) $y''-2y'-15y=0$. *Ответ*: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{5x}$;

4) $y^{IV}+4y''+3y=0$. *Ответ*: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$;

5) $y^{IV}+2y'''+y''=0$. *Ответ*: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$;

6) $3y''+7y'+4y=0;\quad y(0)=1;\ y'(0)=-\dfrac{2}{3}$. *Ответ*: $y=2e^{-x}-e^{-\frac{4}{3}x}$;

7) $4y''+4y'+y=0;\quad y(0)=2;\ y'(0)=0$. *Ответ*: $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

5 Линейные неоднородные ДУ высших порядков

5.1 Теоретические сведения

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{5.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа, $f(x)$ – непрерывная на некотором интервале (a,b) функция, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами.*** Действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – коэффициенты ЛНДУ, $f(x)$ – правая часть ЛНДУ.

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0 \tag{5.2}$$

называется ***однородным уравнением, соответствующим*** ЛНДУ (5.1).

Структура общего решения ЛНДУ *n*-го порядка. Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ (5.1) есть сумма его произвольного частного решения $y_{чн}$ и общего решения $y_{оо}$ соответствующего ЛОДУ (5.2), т. е.

$$y_{он}=y_{чн}+y_{оо}. \tag{5.3}$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Для решения ЛНДУ *n*-го порядка рекомендуется:

– найти фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего ЛОДУ;

– записать вид общего решения ЛОДУ:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные;

– записать общее решение ЛНДУ, считая $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функциями от x:

$$y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n; \qquad (5.4)$$

– для определения $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ составить систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n{}' = 0; \\ \ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

– найти функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ и подставить их в формулу (5.4).

Метод Лагранжа для ЛНДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$:

– для соответствующего ЛОДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ записываем общее решение $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$;

– общее решение ЛНДУ ищем в виде $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$;

– для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

ЛНДУ высших порядков со специальной правой частью.

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами (5.1) с правой частью $f(x)$ вида

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Правая часть такого вида называется ***специальной правой частью***.

Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ определяется формулой (5.3). Частное решение $y_{чн}$ для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью ищется в виде

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(M_l\left(x\right)\cos\beta x + N_l\left(x\right)\sin\beta x\right),$$

где r – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического уравнения;

$M_l\left(x\right)$, $N_l\left(x\right)$ – многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, $l = \max\{n, m\}$.

В частности, если правая часть $f\left(x\right)$ имеет вид $f\left(x\right) = P_n\left(x\right)e^{\alpha x}$, где $P_n\left(x\right)$ – многочлен степени n, то частное решение $y_{чн}$ ищется в виде

$$y_{чн} = x^r Q_n\left(x\right)e^{\alpha x},$$

где r – кратность корня α характеристического уравнения;

$Q_n\left(x\right)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Замечание. Многочлены с неопределенными коэффициентами имеют следующий вид:

$P_0\left(x\right) = A$ – многочлен нулевой степени;

$P_1\left(x\right) = Ax + B$ – многочлен первой степени;

$P_2\left(x\right) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен второй степени;

$P_3\left(x\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ – многочлен третьей степени и т. д.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов надо выражение $y_{чн}$ подставить в данное ЛНДУ и после сокращения на $e^{\alpha x}$ приравнять коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x или при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Из полученной при этом системы уравнений определяются коэффициенты.

При нахождении частных решений ЛНДУ полезна следующая теорема.

Теорема (о наложении решений). Если правая часть ЛНДУ представляет собой сумму двух функций: $f\left(x\right) = f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right)$, а $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$ – частные решения уравнений $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_1\left(x\right)$ и $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_2\left(x\right)$ соответственно, то функция $y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$ является решением данного ЛНДУ.

5.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение

Рассмотрим вначале соответствующее ЛОДУ

$$y'' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 + 4 = 0$. Его корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = \cos 2x; \qquad y_2 = \sin 2x.$$

Общим решением соответствующего ЛОДУ будет

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y_{он} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x .$$

Система уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0; \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 2x}{2\cos 2x}; \qquad C_2'(x) = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y_{он} = \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2\right)\sin 2x$$

или

$$y_{он} = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Пример 2 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = e^x$.

Решение

Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ определяется формулой (5.3). Рассмотрим вначале соответствующее ЛОДУ

$$y'' + 4y = 0 .$$

В примере 1 показано, что общим решением этого ЛОДУ будет

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Функции e^x в правой части уравнения соответствует $\alpha = 1,\ \beta = 0$. Число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения (кратность $r = 0$), коэффициент при e^x равен 1 (многочлен нулевой степени). Следовательно, частное решение ищем в виде

$$y_{чн} = A x^0 e^x = Ae^x .$$

Тогда

$$y'_{чн} = Ae^x ; \qquad y''_{чн} = Ae^x .$$

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, получим

$$Ae^x + 4Ae^x = e^x ; \qquad 5Ae^x = e^x ;$$

$$e^x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0,2.$$

Таким образом, $y_{чн} = 0,2e^x$, а значит,

$$y_{он} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0,2e^x .$$

Пример 3 – Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 8y = 85 \cos x$.

Решение

Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ определяется формулой (5.3). Рассмотрим вначале соответствующее ЛОДУ

$$y'' - 2y' - 8y = 0 .$$

Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ: $k^2 - 2k - 8 = 0$. Его корни $k_1 = -2$, $k_2 = 4$. Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^{-2x} ; \qquad y_2 = e^{4x} .$$

Общим решением соответствующего ЛОДУ будет

$$y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} .$$

Функции $\cos x$ в правой части уравнения соответствует $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Число i не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение находим в виде

$$y_{чн} = A \cos x + B \sin x.$$

Тогда

$$y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x; \qquad y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x - 8A\cos x - 8B\sin x = 85\cos x;$$

$$(-A - 2B - 8A)\cos x + (-B + 2A - 8B)\sin x = 85\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ слева и справа от знака равенства, получаем

$$\begin{cases} -9A - 2B = 85; \\ 2A - 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -9; \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow y_{чн} = -9\cos x - 2\sin x.$$

Таким образом,

$$y_{он} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - 9\cos x - 2\sin x.$$

5.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. *Ответ*: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$;

2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$. *Ответ*: $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x + \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{3}{4}x^2\right)$;

3) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right)$.

2 Найти общие и частные решения уравнения (там, где заданы начальные условия) методом подбора частного решения:

1) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. *Ответ*: $y_{он} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + \dfrac{1}{9}e^{2x}$;

2) $y'' - 8y' + 7y = 14$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + 2$;

3) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 0{,}4\cos 2x - 1{,}2\sin 2x$;

4) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$. *Ответ*: $y_{чн} = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$;

5) $y'' + y' = 5x + 2e^x$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$;

6) $y'' + y' = \sin^2 x$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{20}\sin 2x$.

5.4 Домашнее задание

1 Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\dfrac{1}{2}x\sin x$;

2) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$. *Ответ*: $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2x}\right)$.

2 Найти общие и частные решения уравнения (там, где заданы начальные условия) методом подбора частного решения:

1) $y''-5y'+6y=e^x$; $y(0)=0,\ y'(0)=0$. *Ответ*: $y_{чн}=\dfrac{1}{2}e^{3x}-e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^x$;

2) $y''+4y=x\sin 2x$. *Ответ*: $y_{он}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{x^2}{8}\cos 2x+\dfrac{x}{16}\sin 2x$;

3) $y''-3y'+2y=3x+5\sin 2x$.

Ответ: $y_{он}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{4}\sin 2x$.

6 Линейные однородные системы ДУ

6.1 Теоретические сведения

Нормальной системой ДУ называется система вида

$$\begin{cases} y_1'=\varphi_1\left(x,y_1,\ldots,y_n\right); \\ \ldots \\ y_n'=\varphi_n\left(x,y_1,\ldots,y_n\right). \end{cases} \tag{6.1}$$

Теорема Коши. Если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ в системе (6.1) и их частные производные по $y_1,\ldots,y_n$ определены и непрерывны в некоторой области D пространства переменных $\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, то какова бы ни была внутренняя точка $\left(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0}\right)$ области D, в некоторой её окрестности существует единственное решение системы (6.1), удовлетворяющее начальным условиям $y_1\left(x_0\right)=y_{10},\ldots y_n\left(x_0\right)=y_{n0}$.

Нормальная система называется ***линейной*** (ЛСДУ), если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ являются линейными относительно $y_1,\ldots,y_n$. В противном случае система ***нелинейна***.

ЛСДУ имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

или кратко

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (6.2)$$

Систему (6.2) можно записать в матричной форме:

$$Y' = AY + F, \qquad (6.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Система (6.3) называется ***линейной однородной*** (ЛОСДУ), если $F \equiv 0$, иначе система ***неоднородная***.

Одним из основных методов решения нормальных систем является ***метод исключения***, который заключается в следующем: дифференцированием одного из уравнений системы (6.1) и исключением неизвестных функций удается свести систему к одному уравнению n-го порядка относительно одной функции.

Рассмотрим теперь ЛОСДУ

$$Y' = AY, \qquad (6.4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Общее решение ЛОСДУ (6.4) имеет вид

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i,$$

где Y_i – фундаментальная система решений (6.4).

Систему Y_i было предложено (Эйлером) искать в виде

$$Y_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \dots \\ \alpha_n e^{kx} \end{pmatrix} = e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Требуется подобрать α_i так, чтобы Y_i удовлетворяло системе (6.4).

$$Y_i' = ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{kx} \cdot (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно, СЛАУ является однородной относительно α_i. Она имеет ненулевое решение, если $\det(A - kE) = 0$. Получаем характеристическое уравнение

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{6.5}$$

Частные решения системы (6.4) в зависимости от корней характеристического уравнения (6.5) представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Частные решения системы

Корень характеристического уравнения	Частное решение системы
$k_i \in \mathbb{R}$, кратность $r = 1$	$Y_i = e^{k_i x} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Окончание таблицы 6

Корень характеристического уравнения	Частное решение системы
$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i\in\mathbb{C}$, кратность $r=1$	$Y_i^1=\operatorname{Re}Y^*;\quad Y_i^2=\operatorname{Im}Y^*;\quad Y^*=e^{(\alpha+\beta i)x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$
$k_i\in\mathbb{R}$, кратность $r\geq 2$	$Y_i=e^{k_ix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}x+\ldots+\alpha_{1r}x^{r-1}\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}x+\ldots+\alpha_{2r}x^{r-1}\\ \dots\\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}x+\ldots+\alpha_{nr}x^{r-1}\end{pmatrix}$, где $\alpha_{ij}\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,r}\right)$ определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в результате подстановки Y_i в исходную систему (6.5)

6.2 Примеры решения задач

Пример 1 – Решить методом исключения систему $\begin{cases}y_1'=4y_1-3y_2;\\ y_2'=3y_1+4y_2.\end{cases}$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы. Получим

$$\begin{cases}y_1''=4y_1'-3y_2';\\ y_2'=3y_1+4y_2;\\ y_2=\dfrac{1}{3}\left(4y_1-y_1'\right).\end{cases}$$

Подставим в первое уравнение второе и третье уравнения системы, исключив переменную y_2 и ее производную y_2'. Имеем уравнение $y_1''-8y_1'+25y_1=0$, решив которое, получим $y_1=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Найдем y_2 из третьего уравнения системы:

$$y_1'=4e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+e^{4x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)=$$

$$=e^{4x}\left(\left(4C_1+3C_2\right)\cos 3x+\left(4C_2-3C_1\right)\sin 3x\right);$$

$$y_2=\frac{1}{3}\Big(4e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)-e^{4x}\left(\left(4C_1+3C_2\right)\cos 3x+\left(4C_2-3C_1\right)\sin 3x\right)\Big)=$$

$$=e^{4x}\left(C_1\sin 3x-C_2\cos 3x\right).$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right); \\ y_2 = e^{4x}\left(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x\right). \end{cases}$

Пример 2 – Решить методом Эйлера систему $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2; \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Решение

Записываем матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 - 5k + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 4;\, k_2 = 1.$$

Имеем $Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$; $Y_2 = e^{x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

Общее решение ищем в виде $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$.

$$k_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$k_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \beta_1 = -2\beta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \beta_2 = 1, \\ \beta_1 = -2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Y_2 = e^{x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Y = C_1e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} y_1 = C_1e^{4x} - 2C_2e^{x}; \\ y_2 = C_1e^{4x} + C_2e^{x}. \end{cases}$

Пример 3 – Решить методом Эйлера систему $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2; \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

Решение

Записываем матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}4-k & -3\\ 3 & 4-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}4-k & -3\\ 3 & 4-k\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (4-k)^2=-9 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=4\pm 3i.$$

Имеем $Y_1=\operatorname{Re}Y^*$; $Y_2=\operatorname{Im}Y^*$.

Общее решение ищем в виде $Y=C_1Y_1+C_2Y_2$.

$$k_1=4+3i: \quad \begin{pmatrix}-3i & -3\\ 3 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 3\alpha_1-3i\alpha_2=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \alpha_1=i\alpha_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha_2=1,\\ \alpha_1=i\end{cases} \quad\Rightarrow Y^*=e^{(4+3i)x}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=e^{4x}\left(\cos 3x+i\sin 3x\right)\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}i\cos 3x-\sin 3x\\ \cos 3x+i\sin 3x\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin 3x\\ \cos 3x\end{pmatrix}+ie^{4x}\begin{pmatrix}\cos 3x\\ \sin 3x\end{pmatrix}.$$

Имеем $Y_1=e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin 3x\\ \cos 3x\end{pmatrix}$; $Y_2=e^{4x}\begin{pmatrix}\cos 3x\\ \sin 3x\end{pmatrix}$.

Ответ: $Y=C_1e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin 3x\\ \cos 3x\end{pmatrix}+C_2e^{4x}\begin{pmatrix}\cos 3x\\ \sin 3x\end{pmatrix}$ или

$$\begin{cases}y_1=e^{4x}\left(-C_1\sin 3x+C_2\cos 3x\right);\\ y_2=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right).\end{cases}$$

Пример 4 – Решить методом Эйлера систему $\begin{cases}y_1'=2y_1-y_2;\\ y_2'=4y_1+6y_2.\end{cases}$

Решение

Записываем матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}2-k & -1\\ 4 & 6-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 8k + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1;2} = 4.$$

Имеем $Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$; $Y_2 = xe^{x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

Общее решение ищем в виде $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$:

1) $Y' = AY \quad \Rightarrow \quad 4e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4\alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2; \\ 4\alpha_2 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -2\alpha_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

2) $Y' = AY \quad \Rightarrow \quad 4xe^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + e^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} xe^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4x\beta_1 + \beta_1 = 2x\beta_1 - x\beta_2; \\ 4x\beta_2 + \beta_2 = 4x\beta_1 + 6x\beta_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = -2\beta_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \beta_1 = 1; \\ \beta_2 = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y_2 = xe^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Y = e^{4x}\begin{pmatrix} C_1 + C_2x \\ -2C_1 - 2C_2x \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1 + C_2x\right); \\ y_2 = e^{4x}\left(-2C_1 - 2C_2x\right). \end{cases}$

6.3 Задания для самостоятельной работы

1 Решить системы дифференциальных уравнений методом исключений:

1) $\begin{cases} y'_x = z; \\ z'_x = -y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = C_1\cos x + C_2\sin x; \\ z = -C_1\sin x + C_2\cos x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'_x = y + 5z; \\ z'_x + y + 3z = 0. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right); \\ z = \dfrac{e^{-x}}{5}\left(\left(C_2 - 2C_1\right)\cos x - \left(C_1 + 2C_2\right)\sin x\right); \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'_x = -3y - z; \\ z'_x = y - z. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = e^{-2x}\left(C_2 - C_1 - C_2 x\right); \\ z = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right). \end{cases}$

2 Решить системы дифференциальных уравнений методом Эйлера:

1) $\begin{cases} x'_t = 6x - y; \\ y'_t = 3x + 2y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

2) $\begin{cases} x'_t = 2x + y; \\ y'_t = -6x - 3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$

3) $\begin{cases} x'_t = -7x + y; \\ y'_t = -2x - 5y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-6t}\begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ \left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t \end{pmatrix};$

4) $\begin{cases} x'_t = 2x - y + z; \\ y'_t = x + 2y - z; \\ z'_t = x - y + 2z. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{C}_3\, e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6.4 Домашнее задание

Решить системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x'_t = 8x - 3y; \\ y'_t = 2x + y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{7t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

2) $\begin{cases} x'_t = x + y; \\ y'_t = -2x + 3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ \left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t \end{pmatrix};$

3) $\begin{cases} x'_t = -y + z; \\ y'_t = z; \\ z'_t = -x + z \end{cases}$ при $\begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = \dfrac{1}{2}; \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t; \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\cos t + \sin t\right); \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\cos t - \sin t\right). \end{cases}$

Дополнительные задания по теме «ДУ первого порядка»

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$. *Ответ*: $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$;

2) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$. *Ответ*: $y = x\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$;

3) $\left(y - x^2 y\right)xdy + dx = 0$. *Ответ*: $y^2 = \ln\left|\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right| + C$;

4) $\dfrac{dy}{dx} - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \cdot \sin x$. *Ответ*: $y = \sin x\left(x^2 + C\right)$;

5) $\left(xy + 1\right)ydx = xdy$. *Ответ*: $y = -\dfrac{2x}{x^2 + C}$;

6) $\operatorname{tg} ydx + \operatorname{tg} xdy = 0$. *Ответ*: $\sin x = \dfrac{C}{\sin y}$;

7) $\left(x + y\right) - \left(y - x\right)y' = 0$. *Ответ*: $x^2 + 2xy - y^2 = C$;

8) $\left(\ln y + 4x^3 y + \dfrac{3}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + x^4 - \dfrac{3x}{y^2}\right)dy = 0$. *Ответ*: $x\ln y + x^4 y + \dfrac{3x}{y} = C$;

9) $y' = e^{x+y}$. *Ответ*: $e^x + e^{-y} = C$;

10) $y' = \left(x + y\right)^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\left(x + y\right) = x + C$;

11) $\dfrac{dx}{dy} + 3x = e^{2y}$. *Ответ*: $x = e^{-3y}\left(\dfrac{1}{5}e^{5y} + C\right)$;

12) $\dfrac{dx}{x} = \operatorname{tg} ydy$. *Ответ*: $x\cos y = C$;

13) $x\left(\ln x - \ln y\right)dy - ydx = 0$. *Ответ*: $y = C\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$;

14) $y'\cos x + y\sin x = 1$. *Ответ*: $y = \cos x\left(\operatorname{tg} x + C\right)$;

15) $ydx - xdy = xydx$. *Ответ*: $x + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$;

16) $y' - 2y = e^x - x$. *Ответ*: $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + C \cdot e^{2x} - e^x$;

17) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. *Ответ*: $y = \dfrac{\left(x \cdot \operatorname{tg} x + \ln\left|\cos x\right| + C\right)^2}{x^2}$;

18) $\left(x + xy^2\right) - \left(y + yx^2\right)y' = 0$. *Ответ*: $x^2 + 1 = C\left(y^2 + 1\right)$;

19) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. *Ответ*: $\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = Cx$;

20) $\left(\cos x \cdot \cos y - 3x^2 y^2 + 2xy + 5\right)dy - \left(\sin x \cdot \sin y + 2xy^3 - y^2 + 4\right)dx = 0$.
Ответ: $\cos x \cdot \sin y - x^2 y^3 + xy^2 + 5y - 4x = C$.

Дополнительные задания по теме «ДУ высших порядков»

Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 e^x + C_2 x e^x - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x$;

2) $y'' = \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}$; $\quad y(0) = \dfrac{1}{2}$; $y'(0) = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x - x + 1)$;

3) $(1 - x^2)y'' - xy = 2$. *Ответ*: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$;

4) $y'' - 5y' + 4y = \sin x - 7\cos x$.

Ответ: $y_{он} = C_1 e^x + C_2 x e^{4x} + \dfrac{19}{17}\sin x - \dfrac{8}{17}\cos x$;

5) $y''\,\mathrm{tg}\,x = y' + 1$. *Ответ*: $y = -x - C_1\cos x + C_2$;

6) $xy'' - y' = 2x^2 e^x$. *Ответ*: $y = 2xe^x - 2e^x + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$;

7) $y'' + 4y' = \cos 2x$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{10}\sin 2x - \dfrac{1}{20}\cos 2x - \dfrac{C_1 e^{-4x}}{4} + C_2$;

8) $yy'' + y'^2 = 0$; $\quad y(0) = 1$; $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \sqrt{2x+1}$;

9) $y'' = 2 - y$; $\quad y(0) = 2$; $y'(0) = 2$. *Ответ*: $\arcsin\dfrac{y-2}{2} = x$;

10) $y'' + 4y' + 20y = 0$. *Ответ*: $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x)$;

11) $y'' - 3y' - 10y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$;

12) $9y'' + 6y' + y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}}$;

13) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$; $\quad y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 133$.

Ответ: $y = 10 - 11e^x + e^{12x}$;

14) $y'' + y' = 2x - 1$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 - 3x$;

15) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. *Ответ*: $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}$;

16) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$. *Ответ*: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6\cos x + \sin x$;

17) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$. *Ответ*: $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^{2x}$;

18) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

Ответ: $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 3\cos 4x - \sin 4x$;

19) $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$; $\quad y(0) = 0$; $y'(0) = 5$.

Ответ: $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x\cos 4x$;

20) $y'' - y' = e^{2x}\sin e^x$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$;

21) $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-x} + +C_2 e^x + e^x \ln\left|\dfrac{e^x - 1}{e^x}\right| - e^{-x}\ln\left|e^x - 1\right| - 1$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – Москва: Высшая школа, 1999. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 2. – 221 с.

4 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа: учебник: в 2 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

5 **Лунгу, К. Н.** Высшая математика. Руководство к решению задач: учебное пособие: в 2 ч. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – 2-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – Ч. 2. – 384 с.

6 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – Москва: Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

7 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – Москва: АЙРИС-пресс, 2019. – 608 с.

8 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд. – Москва: Высшая школа, 1973. – 576 с.

9 Сборник задач по математике для втузов: учебное пособие для втузов: в 2 ч. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1986. – 368 с.

10 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 479 с.