УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XIII ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

XIII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1, 2] состоялась 23 февраля 2023 г. В соревновании приняли участие 40 студентов и аспирантов из 21 вуза Беларуси, Китая, Объединенных Арабских Эмиратов, России и Таджикистана. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчете количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Университета Фудань (Шанхай, Китай) Ху Синцзянь, давший 27 правильных ответов. Второе место занял студент Пекинского университета (Китай) Оуян Минхуэй (20 правильных ответов), третьим стал студент университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия) Захар Яковлев (18 правильных ответов).

Наиболее сложными заданиями тринадцатой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1–3. Задачу 1 решил один участник, а правильные ответы в задачах 2 и 3 смогли дать по два участника.

Задача 1 [3, с. 234]. При каком наибольшем n найдется n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

Решение

Рассмотрим прогрессию, у которой $b_1 = 2^{20}$, а $q = \dfrac{5}{4}$. Поскольку $b_1 > 10^6$, $b_{11} = 56^{10} < 10^7$ и все ее члены от первого до 11-го – целые числа, то 11 первых членов этой прогрессии являются семизначными числами.

Докажем от противного, что прогрессии, содержащей 12 требуемых членов, не существует. Пусть $q = \dfrac{m}{k}$ – знаменатель прогрессии ($\dfrac{m}{k}$ – несократимая дробь), b_1 – ее первый член. Можно считать, что $q > 1$. Иначе рассмотрим 12 этих членов в обратном порядке. Так как $\dfrac{m}{k}$ несократима, а $b_{12} = \dfrac{b_1 m^{11}}{k^{11}}$ – целое число, то b_1 делится на k^{11} и $b_{12} \geq m^{11}$. Если предположить, что $m > 4$, то получим $b_{12} \geq 5^{11} > 10^7$, что противоречит условию. Значит, $m \leq 4$ и наименьшее возможное значение q равно $\dfrac{4}{3}$. Теперь получаем $b_{12} = q^{11} b_1 > 10 b_1 > 10^7$, что противоречит условию.

Ответ: 11.

Задача 2 [4, с. 65]. Найдите сумму решений уравнения

$$\left(\operatorname{tg} x + \sin x\right)^{1/2} + \left(\operatorname{tg} x - \sin x\right)^{1/2} = 2 \operatorname{tg}^{1/2} x \cos x,$$

принадлежащих отрезку $\left[0, 2\pi\right]$.

Решение

Поскольку $\operatorname{tg} x + \sin x = \operatorname{tg} x \left(1 + \cos x\right) = 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \dfrac{x}{2}$, а $\operatorname{tg} x - \sin x = 2 \operatorname{tg} x \sin^2 \dfrac{x}{2}$, данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2} \operatorname{tg}^{1/2} x \left(\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \left|\sin \frac{x}{2}\right| - \sqrt{2} \cos x \right) = 0.$$

Первые решения получим при $\operatorname{tg} x = 0$, $x = k\pi$. Остальные решения нам доставят корни уравнения

$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{2} \cos x,$$

при которых $\operatorname{tg} x > 0$ (случай $\operatorname{tg} x = 0$ уже исследован). Решим вначале последнее уравнение, а затем исключим те решения, которые не удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} x > 0$. Возведем это уравнение в квадрат и, чтобы не нарушить равносильности, добавим ограничение $\cos x \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 1 + \left|\sin x\right| = 2\cos^2 x; \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Так как $2\cos^2 x = 2 - 2\sin^2 x = 2 = 2\left|\sin x\right|^2$, то придем к уравнению

$$2\left|\sin x\right|^2 + \left|\sin x\right| - 1 = 0\,.$$

Решая его, найдем $\left|\sin x\right| = \dfrac{1}{2}$, т. е. $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$. Корнями данного уравнения будут $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$. Если $k = 2n$, то $\cos x = \cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$, если же $k = 2n + 1$, то $\cos x = \cos\left(\pi \pm \dfrac{\pi}{6}\right) < 0\,$.

Остается вспомнить, что $\operatorname{tg} x < 0$.

Таким образом, решениями исходного уравнения являются $x = k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. Отрезку $\left[0{,}2\pi\right]$ принадлежат решения $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$. Их сумма равна $\dfrac{19\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{19\pi}{6}$.

Задача 3 [5, с. 65]. Последовательность $\left(a_n\right)$ задана соотношениями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n \geq 1$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_1 a_2 ... a_n}$.

Решение

Заметим, что

$$a_{n+1}^2 - 4 = \left(a_n^2 - 2\right)^2 - 4 = a_n^2\left(a_n^2 - 4\right) = a_n^2 a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2 - 4\right) = \ldots =$$

$$= \left(a_n a_{n-1} ... a_1\right)^2\left(a_1^2 - 4\right) = 21\left(a_1 a_2 ... a_n\right)^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^2}$$

для всякого натурального n.

Легко установить, что при всех n $a_n > 2$. Действительно, $a_1 > 2$, а $a_{n+1} = a_n^2 - 2 > 2^2 - 2 = 2$, если только $a_n > 2$. Поэтому

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^2} \le \lim_{n\to\infty} 4\cdot 2^{-2n} = 0.$$

Следовательно,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(21 + \frac{4}{\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^2}\right) = 21,$$

т. е. искомый предел равен $\sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

Правильный ответ в задании 1 дал Олег Клименко (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). Правильные ответы в задании 2 дали Ху Синцзянь и Константин Пакульневич (университет ИТМО), в задании 3 – Ху Синцзянь и Артем Скворцов (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 4–6, правильные ответы в которых дали 22, 21 и 19 участников соответственно.

Задача 4 [6, с. 34]. Вычислите сумму

$$\left[\frac{2024}{2}\right] + \left[\frac{2025}{4}\right] + \left[\frac{2027}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{2023+2^n}{2^{n+1}}\right] + \ldots,$$

где $\left[x\right]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ: 2023.

Задача 5 [3, с. 126]. Клетчатая полоска 1×15 занумерована числами 0, 1, …, 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на 1, 2 или 3 поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. При каких начальных положениях фишки при правильной игре выигрывает второй игрок? Запишите в ответ сумму номеров соответствующих клеток.

Ответ: 24.

Задача 6 [7, с. 88]. При каком наименьшем действительном значении λ многочлены $P(x) = x^3 - \lambda x + 2$ и $Q(x) = x^2 + \lambda x + 2$ имеют общий корень?

Ответ: -1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 18–20.

2. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач XII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 48–52.

3. **Горбачев, Н. В.** Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 560 с.

4. **Ваховский, Е. Б.** Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. – Москва: Наука, 1969. – 496 с.

5. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский [и др.]. – Киев: Вища школа, 1984. – 240 с.

6. **Морозова, Е. А.** Международные математические олимпиады. Задания, решения, итоги: пособие для учащихся / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – Москва: Просвещение, 1976. – 288 с.

7. Сборник задач по алгебре: учебное пособие / Под ред. А. И. Кострикина. – Москва: Наука, 1987. – 352 с.