УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Для работы со студентами, интересующимися математикой, в Белорусско-Российском университете организован математический кружок.

Ранее были рассмотрены системы упражнений для математического кружка по темам «Матрицы» [1], «Производная» [2], «Интегрирование» [3], «Векторы» [4], «Пределы» [5]. Продолжая тему работы математического кружка, приведем подборку задач по теме «Ряды».

На лекционных и практических занятиях по теме «Ряды» зачастую мало времени уделяется вопросу нахождения суммы числового ряда. Единого подхода для решения этого вопроса нет. Поэтому на кружке ему можно уделить особое внимание. Рассмотрим некоторые приемы.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}$ [6].

Данный ряд сходится, поэтому его сумма $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+1)-3}{(n+1)!}=$ $=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$. Известно, что $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \forall x\in\mathbb{R}$.

При $x=1$ имеем $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$.

Аналогично $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=e-2$.

Получаем $S=2(e-1)-3(e-2)=4-e$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}$.

Данный ряд сходится, поэтому его сумма $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}-$ $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1}$. Предварительно найдем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Он сходится при $|x|<1$. Известно, что $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1$. Проинтегрировав этот ряд, получим $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln|1-x|, |x|<1$.

Используя полученный результат, найдем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}=-\ln\left|1-\frac{3}{4}\right|=\ln 4$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n+1}=\frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\left(-\ln\left|1-\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\ln 4-1.$$

Получаем $S=\ln 4-\left(\frac{4}{3}\ln 4-1\right)=1-\frac{1}{3}\ln 4$.

На занятии по данной теме, кроме разобранных выше, можно рассмотреть со студентами следующие задачи [6].

1. Вычислить $3^{1/3}\cdot 9^{1/9}\cdot 27^{1/27}\cdot\ldots$. Ответ: $\sqrt[4]{27}$.

2. Найти $\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot e^{1/3}\cdot e^{1/5}\cdot\ldots\cdot e^{1/(2n-1)}}{e^{1/2}\cdot e^{1/2}\cdot\ldots\cdot e^{1/(2n)}}$. Ответ: 2.

3. Найти значение выражения $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)+\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$, если $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. Ответ: 1.

4. Найти $f^{(1998)}(-1)$, если $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+5}$. Ответ: $-\frac{1998!}{2^{2000}}$.

5. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\cos^2\frac{\pi n}{4}$. Ответ: $D_{cx}=\mathbb{R},\ S(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-2+x+\cos x\right)$.

6. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^n}{n+1}$. Ответ: $D_{cx}=\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right],\ S(x\neq\pm1)=\frac{\ln x^2}{x^2-1},\ S(\pm1)=0$.

7. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n)-$ количество цифр в числе $n, n\in\mathbb{N}$. Ответ: $D_{cx}=(-0{,}1;\,0{,}1),\ S(x)=\frac{9x}{1-10x}$.

8. Решить уравнение $4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}$. Ответ: 1.

9. Решить уравнение $4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}$. Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\geq 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Матрицы» / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 58–62.

2. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Производная» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 73–76.

3. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Интегрирование» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 80–83.

4. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Векторы» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными

студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 76–79.

5. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Пределы» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 83–85.

6. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2008. – 171 с.