

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хацкевич, Г. А. Эконометрика: учебник / Г. А. Хацкевич, Т. В. Русилко. – Минск: РИВШ, 2021. – 452 с.
2. Матальцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.

УДК 004.421.2:06:519.67

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ИСПОЛЬЗУЯ СИСТЕМУ MATHCAD

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Системы компьютерной математики предлагают современные способы решения разнообразных задач и являются важным фактором повышения качества математического образования [1]. Одной из таких систем является инженерная система MathCAD [2] – это универсальная среда, которую можно использовать как в образовательном процессе, так и для решения прикладных задач в различных областях [2, 3].

Задачи, возникающие при моделировании, например, электрических, биологических, демографических и других процессов, описываются разностными уравнениями вида [4]

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \dots + a_0 y(n) = f(n), \quad k=1, 2, \dots, \quad (1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_k – заданные числа; $f(n)$ – заданная функция, с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad \dots, \quad y(k-1) = y_{k-1}. \quad (2)$$

Построим аналитическое решение задачи Коши (1) и (2) в системе MathCAD, используя преобразование Лорана.

Пусть $\{f(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ – последовательность чисел, удовлетворяющих условию $f(n) \equiv 0, n < 0$; $|f(n)| < Me^{\alpha n}, M > 0, \alpha > 0$.

Преобразованием Лорана (Z -преобразованием) последовательности $\{f(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ называется функция комплексного переменного $F(z)$, определяемая по формуле [4]

$$Z[f(n)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}. \quad (3)$$

Ряд (3) сходится к функции $F(z)$ в области $|z| > R$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(n)|}$.

Последовательность $\{f(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ находится через преобразование $F(z)$ (обратное Z -преобразование) по формуле

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где C – любая окружность радиусом $R_1 > R$, обходимая против часовой стрелки.

Алгоритм решения задачи Коши (1) и (2).

1. Применить преобразование Лорана к левой и правой частям уравнения (1), учитывая (2).

2. Решить полученное линейное алгебраическое уравнение (систему) относительно изображения.

3. Применить обратное Z -преобразование – восстановить решение исходного уравнения $y(n)$ по его изображению $F(z)$.

Пример 1 – Найти аналитическое решение неоднородного разностного уравнения с начальными условиями, используя функции MathCAD:

$$y(n+2) - 3y(n+1) - 10y(n) = n, \quad y(0) = 3, \quad y(1) = -1.$$

Math-документ.

1. Выполним преобразование Лорана левой и правой частей уравнения, учитывая начальные условия, с использованием встроенной функции `ztrans` (рис. 1).

$\text{rs}(y,n) := y(n+2) - 3 \cdot y(n+1) - 10 \cdot y(n)$	$\text{ls}(n) := n$
$\text{rs}(y,n) \left \begin{array}{l} \text{ztrans}, n \\ \text{substitute}, y(0) = 3 \\ \text{substitute}, y(1) = -1 \end{array} \right. \rightarrow 10 \cdot z - 3 \cdot z \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z) - 3 \cdot z^2 + z^2 \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z) - 10 \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z)$	
$\text{zrs}(z) := 10 \cdot z - 3 \cdot z \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z) - 3 \cdot z^2 + z^2 \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z) - 10 \cdot \text{ztrans}(y(n), n, z)$	
$\text{zls}(z) := \text{ls}(n) \text{ ztrans} \rightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$	

Рис. 1

2. Найдем символьное решение полученного линейного уравнения относительно изображения (рис. 2).

$$\text{sol}(z) := \text{zrs}(z) = \text{zls}(z) \left| \begin{array}{l} \text{substitute, ztrans}(y(n), n, z) = p \\ \text{solve, p} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{z \cdot (3 \cdot z^3 - 16 \cdot z^2 + 23 \cdot z - 9)}{(z-1)^2 \cdot (z+2) \cdot (z-5)}$$

Рис. 2

3. Найдем аналитическое решение исходной задачи, используя функцию обратного преобразования Лорана `invztrans`, и выполним проверку (рис. 3).

$$\begin{array}{l} \text{soleq}(n) := \text{sol}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, z} \\ \text{simplify} \\ \text{collect} \end{array} \right. \rightarrow \frac{143 \cdot (-2)^n}{63} + \frac{81 \cdot 5^n}{112} + \frac{1}{144} - \frac{n}{12} \\ \text{rs}(\text{soleq}, n) - \text{ls}(n) \text{ simplify} \rightarrow 0 \quad \boxed{\text{проверка}} \end{array}$$

Рис. 3

Пример 2 – Найти аналитическое решение системы

$$\begin{cases} x(n+1) + x(n) - y(n) = (-2)^n, & x(0) = 1; \\ y(n+1) - 5y(n) + 9x(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Math-документ.

1. Выполнив преобразования Лорана левой и правой частей системы, получим систему линейных алгебраических уравнений. Найдем ее решение (рис. 4).

$$\text{SMat}(z, X, Y) = \text{SRs}(z) \rightarrow \begin{pmatrix} X - Y - z + X \cdot z \\ 9 \cdot X - 5 \cdot Y - z + Y \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z+2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given $\text{SMat}(z, X, Y) = \text{SRs}(z)$

$$\text{Sols}(z) := \text{Find}(X, Y) \text{ simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{z \cdot (-z^2 + z + 13)}{(z-2)^2 \cdot (z+2)} \\ \frac{z \cdot (6 \cdot z - z^2 + 25)}{(z-2)^2 \cdot (z+2)} \end{bmatrix}$$

Рис. 4

2. Найдем аналитическое решение исходной задачи, используя функцию обратного преобразования Лорана `invztrans`, и выполним проверку (рис. 5).

$$\text{S}(n) := \text{Sols}(z) \text{ invztrans}, z \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{23 \cdot 2^n}{16} - \frac{7 \cdot (-2)^n}{16} - \frac{11 \cdot 2^n \cdot n}{8} \\ \frac{25 \cdot 2^n}{16} - \frac{9 \cdot (-2)^n}{16} - \frac{33 \cdot 2^n \cdot n}{8} \end{bmatrix}$$

$$x(n) := \text{S}(n)_0 \rightarrow \frac{23 \cdot 2^n}{16} - \frac{7 \cdot (-2)^n}{16} - \frac{11 \cdot 2^n \cdot n}{8} \quad y(n) := \text{S}(n)_1 \rightarrow \frac{25 \cdot 2^n}{16} - \frac{9 \cdot (-2)^n}{16} - \frac{33 \cdot 2^n \cdot n}{8}$$

$$x(n+1) + x(n) - y(n) - (-2)^n \text{ simplify} \rightarrow 0 \quad y(n+1) - 5 \cdot y(n) + 9 \cdot x(n) \text{ simplify} \rightarrow 0$$

Рис. 5

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.

2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система MathCAD 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.

3. **Шушкевич, Г. Ч.** Об опыте применения системы MathCAD в компьютерном моделировании / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV Междунар. науч. конф., Гродно, 17–20 дек. 2019 г. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 131–132.

4. **Мироновский, Л. А.** Моделирование разностных уравнений / Л. А. Мироновский. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2004. – 108 с.