3. **Шушкевич, Г. Ч.** Об опыте применения системы MathCAD в компьютерном моделировании / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы IV Междунар. науч. конф., Гродно, 17–20 дек. 2019 г. – Гродно: ГрГУ, 2019. – С. 131–132.
4. **Мироновский, Л. А.** Моделирование разностных уравнений / Л. А. Мироновский. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2004. – 108 с.

УДК 004.421.2:06:519.67

ПРИМЕНЕНИЕ SYMPY ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Использование систем компьютерной математики [1–3] является важным фактором повышения качества образования и обуславливает изменение не только способов преподавания и изучения вузовских дисциплин, но и отношение студентов к учебе. При таком подходе преодолеваются математические трудности, сокращается количество преобразований, больше внимания уделяется качеству анализа результатов, расширяется круг доступных для решения задач, обеспечивается возможность представления результатов вычислений в графической форме.

Рассмотрим применение операторного исчисления [4] для аналитического решения волнового уравнения, используя Python-библиотеку символьных вычислений Sympy. Приведем алгоритм решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = A\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + B\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + C\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Du(x,t) + f(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le \ell; \qquad (2)$$

$$u\left(0,t\right) = \mu_1(t), \quad u\left(\ell,t\right) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \qquad (3)$$

Обозначим через $U\left(x,p\right)$, $F\left(x,p\right)$ изображения функций $u\left(x,t\right)$, $f(x,t)$:

$$U\left(x,p\right) = \int_0^\infty u(x,t)\exp(-pt)\,dt, \quad F\left(x,p\right) = \int_0^\infty f(x,t)\exp(-pt)\,dt.$$

Считая переменную x параметром, применяя правило дифференцирования оригинала и учитывая условия (2), получим следующие соотношения, выражающие частные производные по переменной t через изображение $U\left(x,p\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)=pU(x,p)-\varphi_1(x), \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u\left(x,t\right)=p^2\cdot U\left(x,p\right)-p\cdot\varphi_1(x)-\varphi_2(x).$$

Частные производные функции $u(x,t)$ по переменной x представляются через изображение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}u\left(x,t\right)=\frac{\partial}{\partial x}U(x,p) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u\left(x,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U\left(x,p\right).$$

На основании сделанных преобразований частных производных переходим от исходного уравнения в частных производных (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно изображения $U\left(x,p\right)$ (дифференцирование выполняется только по переменной x):

$$A\frac{d^2}{dx^2}U(x,p)+B\frac{d}{dx}U(x,p)+\left(Cp+D-p^2\right)U(x,p)=\left(C-p\right)\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-F(x,p).$$

Находим общее решение данного уравнения с помощью функции dsolve.

Затем выполняем граничные условия (3) и находим аналитическое решение поставленной задачи с помощью функции inverse_laplace_transform.

Задача. Найти аналитическое решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\sin\pi x, \qquad \frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)\Bigg|_{t=0}=-\sin\pi x, \quad 0\le x\le 1;$$

$$u\left(0,t\right)=0, \quad u\left(1,t\right)=0, \quad t\ge 0.$$

Построить графики функции $u(x,t)$ при некоторых значениях переменной t.

Python-документ (рис. 1).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.plotting import plot
from sympy import *
t=symbols('t', positive=True);  x,l,s,p =symbols("x, l, s, p")
eqn=Eq(u(x).diff(x,2) - p*p*u(x), -p*sin(pi*x)+sin(pi*x))
print('***** Исходное дифференциальное уравнение')
pprint(eqn); print('***** Общее решение дифференциального уравнения')
zk=dsolve(eqn, u(x));  pprint((zk.rhs))
# Выполнение граничных условий и нахождение решения
eq1 = zk.rhs.subs(x, 0);  eq2 = zk.rhs.subs(x, 1); var(' C1 C2 ')
var(' C1 C2 ');  seq = solve([eq1, eq2], C1, C2)
rez = zk.rhs.subs([(C1, seq[C1]), (C2, seq[C2])])
print('****** Решение дифференциального уравнения \
с учетом нулевых граничных условий ',"\n");  pprint(rez)
print('****** Решение исходного дифференциального уравнения',"\n")
L_ = inverse_laplace_transform(rez, p, t); pprint(L_)
L3 = lambdify((x,t), L_, 'numpy');  x1 = np.linspace(0, 1,25)
plt.title('Графики функции u(x,t)', fontsize=14)
plt.xlabel('Переменная x',fontsize=12); plt.ylabel('Функция u(x,t)',fontsize=12)
plt.plot(x1, L3(x1,0.1), 'r--', linewidth=2, label = 't = 0.1');
plt.plot(x1, L3(x1,0.2),'c-',linewidth=2,label= 't = 0.2');
plt.plot(x1, L3(x1,0.3),'b:',linewidth=2,label= 't = 0.3');
plt.plot(x1, L3(x1,0.35),'y-.',linewidth=2,label= 't = 0.35');
plt.legend ();  plt.grid(True)
```

Рис. 1

Результат вычисления (рис. 2).

```
***** Исходное дифференциальное уравнение
                 2
    2           d
- p  ·u(x) +  ───(u(x)) = -p·sin(π·x) + sin(π·x)
                 2
               dx

***** Общее решение дифференциального уравнения
     -p·x         p·x    p·sin(π·x)    sin(π·x)
C₁·e      + C₂·e     +  ──────────── - ─────────
                           2    2        2    2
                          p  + π        p  + π
```

Рис. 2

```
****** Решение дифференциального уравнения с учетом нулевых граничных условий

p·sin(π·x)   sin(π·x)
────────── - ────────
  2    2       2    2
 p  + π       p  + π
****** Решение исходного дифференциального уравнения

-(sin(π·t) - π·cos(π·t))·sin(π·x)
─────────────────────────────────
                π
```

Окончание рис. 2

График функции $u(x, t)$ для некоторых значений переменой t (рис. 3).

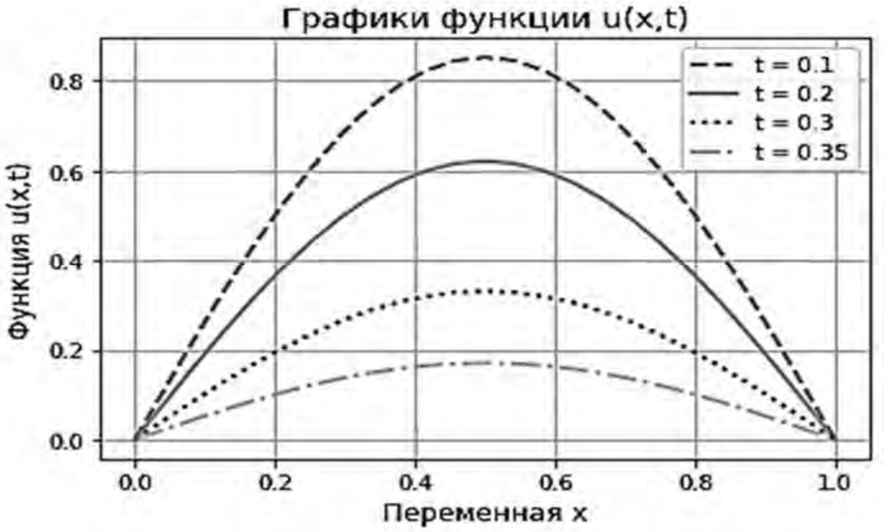

Рис. 3

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Computer Algebra in Education [Electronic resource]. – Mode of access: https://math.unm.edu/~aca/ACA/2023/education.html.

2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система MathCAD 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.

3. **Шушкевич, Г. Ч.** Аналитическое решение дифференциальных уравнений с использованием библиотеки Sympy / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 109–112.

4. **Корзников, А. Д.** Операторное исчисление / А. Д. Корзников, О. М. Королева. – Минск: БНТУ, 2021. – 85 с.