УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАК ИДЕОЛОГИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СТРУКТУРНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИКЕ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

«*Все-таки в науке есть что-то захватывающее. Дело пустяковое – количество фактов, а берешь колоссальный дивиденд в виде умозаключений*».

Марк Твен «*Жизнь на Миссисипи*»

Теория принятия решений (ТПР), зародившись в недрах кибернетики, давно уже превратилась в самостоятельную науку, востребованную во многих областях человеческой деятельности (см., например, [1, 2]). Одним из ее основных понятий является понятие операции. «Под словом «операция» следует понимать организованную деятельность в любой области жизни, объединенную единым замыслом, направленную к достижению определенной цели и имеющую характер повторяемости, т. е. многократности … . В данном определении подчеркиваются две особенности операции: ее целевая направленность и повторяемость» [1, с. 226].

Занимаясь много лет решением математических задач, я, наконец-то, понял, что ТРЗ (мой авторский проект) [3] есть наука, изучающая способы принятия решений в условиях структурно-информационной неопределенности, т. е. когда известна часть всей структуры (остальную часть придется создать) и неполная информация, которую и придется дополнить (воссоздать). Поскольку в ТРЗ речь идет, в первую очередь, о математических задачах, то приведем несколько примеров решения математических задач с анализом моментов принятия решений. Для дальнейшего нам потребуется совершить еще один экскурс в [1, с. 272]: «Задача принятия решений (ЗПР) в условиях неопределенности определялась нами ранее как задача выбора оптимальной стратегии в операции, исход которой помимо стратегий оперирующей стороны и ряда фиксированных факторов (детерминированных или стохастических, или тех и других вместе) зависит также от некоторых неопределенных факторов, неподвластных оперирующей стороне и *неизвестных ей в момент принятия решения*».

Приведем также некоторые сведения из ТРЗ [3]. В качестве первичных (неопределяемых) понятий ТРЗ мы принимаем: объект, субъект, связь, действие. *Операцией* будем называть некоторую последовательность действий (в частности, она может состоять из одного действия). *Ситуацией* будем называть любое множество объектов и связей между ними. Минимальная ситуация содержит два объекта и одну связь. Назовем ее *связной парой*. Под *задачей* будем понимать упорядоченную четверку (Ω, A, B, X), где Ω – носитель задачи, A – условие (множество посылок), B − заключение (множество следствий), X – решение задачи как процесс добычи информации. Подчеркнем, что A, B – это информационные компоненты задачи, в которых речь идет о свойствах Ω, а X – неизвестное, которое надо найти (создать). Ну, а теперь к примерам задач.

Задача 1. Найти количество целых решений неравенства

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \le 5. \tag{1}$$

Несмотря на то, что я уже добросовестно вычитал теорию квадратного трехчлена, подчеркнув особенную важность процедуры выделения полного квадрата, у учащихся примеры такого типа вызывают некоторую оторопь: знаем, что что-то надо делать, но не знаем как. Начинаются действия методом проб и ошибок: а) приведем к общему знаменателю и раскроем скобки; б) введем замену $x + 2 = t$ и далее по предыдущему сценарию (и опять – тупик); в) дополним левую часть (1) до полного квадрата суммы (– бесполезно) и, наконец; г) дополним правую часть до полного квадрата разности:

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=\left(x^2-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2\right)+\frac{4x^2}{x+2}=$$

$$=\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}\le 5.$$

Здесь уже над принятием решения думать особо не придется: $\frac{x^2}{x+2}=t$ и далее имеем стандартное квадратное неравенство.

Примечание – Многочисленные примеры на применение указанной процедуры имеются в [4, с. 143–146]. Там также приведен пример № 87, вполне аналогичный (1).

Задача 2. Найти произведение корней уравнения

$$x-\sqrt{x^2-100}=\frac{(x-10)^2}{2x+20}. \tag{2}$$

Решение

Первый шаг абсолютно стандартный: находим ОДЗ

$$\begin{cases}x^2-100\ge 0\\ x\ne -10\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty;-10)\cup[10;+\infty).$$

А вот теперь предстоит принять решение, что же делать дальше? Поскольку область определения состоит из двух частей, то естественно попытаться разбить решение тоже на две части (интервала).

I. $x\in[10;+\infty)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 10$ не является корнем уравнения (2). Следовательно, $x\in(10;+\infty)$. Хотя, по-видимому, это лишнее. А вот теперь ключевой момент в ЗПР – и здесь не обойтись без догадки. Введем замену:

$$\sqrt{x-10}-\sqrt{x+10}=z. \tag{3}$$

Именно по этому поводу Ричард Беллман (Bellman), американский математик, профессор математики, электротехники и медицины в Южнокалифорнийском университете утверждал: «В математике изобретательность никогда не будет вытеснена аксиоматикой». Равенство (3) не является непосредственным следствием (2), но два его радикала в (2) все же имеются.

Возводя обе части (3) в квадрат, получаем очень продуктивную связь:

$$2x-2\sqrt{x^2-100}=z^2. \tag{4}$$

Дальнейшее не требует больших умственных усилий, ибо (3) с точностью до двойки, совпадает с левой частью (2).

$$2\left(x-\sqrt{x^2-100}\right)=\frac{(x-10)^2}{x+10} \Rightarrow \left(\sqrt{x-10}-\sqrt{x+10}\right)^2=\frac{(x-10)^2}{x+10}.$$

Откуда

$$\left|\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}\right|=\frac{|x-10|}{\sqrt{x+10}}.$$

Учитывая, что $x\in(10;+\infty)$, получаем

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=\frac{x-10}{\sqrt{x+10}} \Rightarrow x+10-\sqrt{x^2-100}=x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-100}=20 \Rightarrow x^2=500 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{500} \\ x>10 \end{cases} \Rightarrow x_1=\sqrt{500}.$$

II. $x\in(-\infty;-10)$. Опять перед нами ЗПР и опять придется чего-то придумывать. Введем замену:

$$x=-t. \tag{5}$$

Имеем

$$x<-10 \Rightarrow -t<-10 \Rightarrow t>10.$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$-t-\sqrt{t^2-100}=\frac{(-t-10)^2}{2(-t)+20} \Rightarrow t+\sqrt{t^2-100}=\frac{(t+10)^2}{2(t-10)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(t+\sqrt{t^2-100}\right)=\frac{(t+10)^2}{t-10} \Rightarrow \left(\sqrt{t+10}+\sqrt{t-10}\right)^2=\frac{(t+10)^2}{t-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t+10}+\sqrt{t-10}=\frac{t+10}{\sqrt{t-10}} \Rightarrow \sqrt{t^2-100}+t-10=t+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2-100}=20 \Rightarrow t^2=500 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{500} \\ t=-x \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=\sqrt{500} \Rightarrow x_2=-\sqrt{500}.$$

Ответ: $x_1x_2=\sqrt{500}\cdot(-\sqrt{500})=-500.$

Замечания

1. При решении задачи 2 можно обойтись и без изобретательства, если в левой части уравнения использовать формулу сложного радикала.

2. В заключение хочется еще раз подчеркнуть, что ТРЗ можно рассматривать как ТПР в математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория прогнозирования и принятия решений: учебное пособие / С. А. Саркисян [и др.]; под ред. С. А. Саркисяна. – Москва: Высшая школа, 1977. – 351 с.: ил.

2. **Лиоба Верт.** Экономическая психология. Теоретическое и практическое применение: пер. с нем. / Лиоба Верт. – Харьков: Гуманитарный центр, 2013. – 432 с.

3. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач : новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – Москва: БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

4. **Великович, Л. Л.** Подготовка к экзаменам по математике: учебное пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 классов / Л. Л. Великович. – Москва: Народное образование, 2006. – 610 с.