практ. конф., посвящ. 80-летию ФГОУ ВПО Башкирский ГАУ, Уфа, 30 сент. – 1 окт. 2010 г.: в 2 ч. – Уфа: Башкир. ГАУ, 2010. – Ч. 2. – С. 11–15.

УДК 517.927.4

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

К. ЖАМУРАТОВ, Х. Р. УМАРОВ, Э. М. ТУРДИМУРОДОВ
Гулистанский государственный университет
Гулистан, Узбекистан

Краевая задача, поставленная для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом в области с подвижной (неизвестной) границей с помощью функции Грина, редуцируется к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений [1]:

$$u_1(x,t)=\int_0^{z_0}\varphi_1(\xi)G_1\left(x,\xi;a_1^2t\right)d\xi+a_1^2\int_0^t G_{1\xi}\left(x,0;a_1^2(t-\tau)\right)\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{x+z(\tau)}{4a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left(x+z(\tau)\right)^2}{4a_1^2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\right\}d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{x-z(\tau)}{4a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left(x-z(\tau)\right)^2}{4a_1^2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\right\}d\tau+$$

$$+a_1^2\int_0^t q_0^-(\tau)G_1\left(x,z(\tau);a_1^2(t-\tau)\right)d\tau-$$

$$-\bar{\gamma}\int_0^t d\tau\int_0^{z(\tau)}G_1\left(x,\xi;a_1^2(t-\tau)\right)f\left(u_1(\xi,\tau)-1,\tau\right)d\xi; \qquad (1)$$

$$u_2\left(\overline{y},t\right)=erfc\frac{\overline{y}}{\sqrt{t}}+\int\limits_0^\infty \varphi_2\left(\xi\right)G_1\left(\overline{y},\xi;t\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty z'\left(\tau\right)u_{2\xi}\left(\xi,\tau\right)G_1\left(\overline{y},\xi;t-\tau\right)d\xi; \tag{2}$$

$$u_3\left(\overline{y},t\right)=\int\limits_0^\infty \varphi_2'(\xi)G_2\left(\overline{y},\xi;t\right)d\xi-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty z'\left(\tau\right)u_3\left(\xi,\tau\right)G_{2\xi}\left(\overline{y},\xi;t-\tau\right)d\xi; \tag{3}$$

$$z'\left(t\right)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{F\left(t,z,z',u_1,u_{1x},\varphi\right)\Big|_{t=\tau}}{\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}d\tau. \tag{4}$$

В системе уравнений (1)–(4) неизвестными являются функции u_1, u_2, u_3 и z. $G_1\left(x,\xi;t\right)$ и $G_2\left(x,\xi;t\right)$ так называемые функциями Грина, соответственно, первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности в четверть плоскости определяются формулами

$$G_1\left(x,\xi;t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left\{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t}\right\}-\exp\left\{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4t}\right\}\right];$$

$$G_2\left(x,\xi;t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left\{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t}\right\}-\exp\left\{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4t}\right\}\right];$$

$$\exp z=e^z,\ erfc\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha;\ z\left(t\right)=\frac{l\left(t\right)}{a_2\sqrt{\pi}},$$

где $l\left(t\right)$ – неизвестная подвижная граница; φ_1, φ_2, f, F – данные известные функции; $\overline{y}=\overline{x}-z(t)$, $\overline{x}=\dfrac{x}{a_2\sqrt{T}}$; a_1, a_2 – положительные постоянные, $q_0^-=\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=z(t)-0}$.

Как известно [2], оператор дифференцирования является неограниченным оператором и, следовательно, решение (4) может быть неустойчивым к малым изменениям данных задачи.

Поскольку начальное значение искомой функции $u_1\left(x,t_1-0\right)=\varphi_1\left(x\right)$

и $u_2(x,t_1-0)=\varphi_2(x)$ на отрезке $(t_0,t_1]$ известно лишь приближенно, то функции φ_1 и φ_2 задаются с некоторой погрешностью σ. Учитывая это, будем их в дальнейшем обозначать через φ^σ и систему (1)–(4) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1^\sigma &= A_1(x,t;u_1,u_3,u_4);\\ u_2^\sigma &= A_2(x,t;u_3,u_4);\\ u_3^\sigma &= A_3(x,t;u_3,u_4);\\ u_4^\sigma &= A_4(t,u_1,u_3,u_4), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $u_3=u_{2x}$; $u_4=z'(t)$; $z(t)=z_0+\int\limits_0^t u_4(\tau)d\tau$; A_i $(i=1,2,3,4)$ – правые части уравнений (1)–(4) соответственно.

В силу отмеченного выше относительно уравнения (4) обстоятельства, задача решения системы (1)–(4), вообще говоря, является некорректно поставленной задачей [2].

А. Н. Тихоновым разработан новый подход к решению некорректно поставленных задач, позволяющий строить приближенные решения таких задач. В основе этого метода лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора.

Следует отметить, что если предварительно не исследовать корректность поставленной задачи, в частности устойчивости относительно данных, то нельзя быть уверенным в достоверности полученных результатов. Это особенно важно при численном решении задач.

Пусть φ^σ и φ приближенное и точное значения функции $u(x,t)$ при $t\to t_1-0$ и погрешность в начальных данных удовлетворяет неравенству

$$\left\|\varphi-\varphi^\sigma\right\|_{C^2}=\max\left(\left\|\varphi_1-\varphi_1^\sigma\right\|_{C^2};\left\|\varphi_2-\varphi_2^\sigma\right\|_{C^2}\right)\le\sigma.$$

Осуществим регуляризацию оператора A_4 следующим образом.

Четвертое уравнение системы (5) можно записать в области изображения Лапласа в виде

$$\hat{u}_4=\sqrt{p}\,\hat{F}, \tag{6}$$

где $\hat{u}_4=\int\limits_0^\infty u_4e^{-pt}dt;$ $\hat{F}=\int\limits_0^\infty Fe^{-pt}dt.$

Имея в виду предельное равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}=\sqrt{p},$$

вместо уравнения (6) рассмотрим уравнение

$$\hat{u}_4 = \sqrt{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} \cdot \hat{F}; \quad \alpha > 0, \tag{7}$$

совпадающее с (6) при $\alpha \to 0$.

Числовой параметр σ характеризует погрешность исходных данных системы (5). Параметр регуляризации α надо брать согласованным с погрешностью σ. Эта согласованность должна быть такой, чтобы при $\sigma \to 0$, т. е. при стремлении приближенных исходных данных к точному, приближенные регуляризированные решения $u_i^{\alpha\sigma}$ должны стремиться к точному решению u_i системы (5).

Установлена связь между α и σ в следующем виде:

$$\omega(\alpha) = \lambda \cdot \sigma^{\beta}, \tag{8}$$

где $\beta > 0$; $\lambda = \text{const} > 0$; $\omega(\alpha) = \left|1 - \exp\left\{-\alpha\sqrt{p}\right\}\right|$.

Если параметр регуляризации α брать как решение уравнения (8), очевидно, что при $\sigma \to 0$, то $\omega(\alpha) \to 0$ и тем самым

$$\left\|u_4^{\alpha\sigma} - u_4\right\| \to 0.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жамуратов, К.** К построению математической модели задачи фильтрации с учетом испарения / К. Жамуратов, М. Досанов, Ж. Рахмонов // Современные материалы, техника и технология: материалы 2 Междунар. науч.-теорет. конф. – Курск, 2012.
2. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1979.
3. **Умаров, Х. Р.** Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу / Х. Р. Умаров, К. Жамуратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 3 (8-4). – С. 303–307.
4. Search problem on graphs in the presence of limited information about the search point / X. Narjigitov [et al.] // Modern Science and Research. – 2016. – № 2 (5). – P. 1166–1170.
5. **Жамуратов, К.** К приближенному решению одной задачи теории фильтрации для малых значений времени / К. Жамуратов, Х. Р. Умаров, Ж. Т. Курбонов // Научный альманах. – 2021. – № 1–2. – С. 48–53.