МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2024

УДК 336.2
ББК 65. 261.4
Ф59

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «6» декабря 2023 г., протокол № 4

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Рецензент канд. экон. наук, доц. Т. Г. Нечаева

Методические рекомендации предназначены для приобретения студентами навыков финансовых расчетов. Представлены задачи к каждой лабораторной работе.

Учебное издание

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск А. В. Александров

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. .Уч.- изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов аналитического мышления путем усвоения математических моделей финансовых операций, необходимых в практической деятельности.

Задачей учебной дисциплины является формирование необходимых компетенций у студентов бакалавриата в рамках данного курса, а также других курсов, связанных с методами количественного анализа.

Методические указания способствуют формированию у студентов умения обобщать и систематизировать простейшие финансовые операции, идентифицировать и классифицировать процентные ставки, а также оценивать эффективность финансовых операций с учетом инфляции, применяя современные офисные средства.

Порядок выполнения каждой лабораторной работы.

1 Изучить теоретические сведения.

2 Решить в EXCEL задачи, представленные к решению, составив шаблон решения для задач с другими исходными данными.

3 Сделать выводы по результатам решения задач.

4 Подготовить ответы на контрольные вопросы, предполагающие проверку знаний теоретических сведений по изучаемой тематике.

5 Оформить отчет в формате WORD и загрузить его в систему электронного обучения и тестирования Moodle.

Содержание отчета.

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Описание методов решения.

4 Выводы по результатам решения.

5 Ответы на контрольные вопросы.

Лабораторная работа № 1. Решение задач на процентные вычисления

Цель работы – научиться распознавать и решать четыре типа задач на процентные вычисления, решать разобранные *типы задач* в Excel.

Методические указания

Процентом некоторой величины называется сотая доля этой величины. Такой величиной может быть месячный доход семьи, годовая прибыль фирмы, сумма государственного бюджета. Чтобы указать, что величина выражена в процентах, используется специальное обозначение «%». Термин «процент» произошёл от латинского *pRo centum* – на сотню, или за сто. Выражать доли величин в процентах принято в финансовых и статистических расчётах, а также во многих других областях.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить число, которое составляет n % от числа A.

Обозначим искомое число через x, воспользуемся определением процента:

$$x = \frac{n}{100} \cdot A .$$

Задача 2. Определить число, n % которого равны B.

Обозначим искомое число через x, воспользуемся определением процента:

$$B = \frac{n}{100} \cdot x,$$

откуда находим

$$x = \frac{100}{n} \cdot B.$$

Задача 3. Определить, сколько процентов от числа A составляет число B.

Обозначим искомое число процентов через x и запишем условие задачи следующем виде:

$$\frac{A}{B} = \frac{100}{x},$$

откуда находим

$$x = \frac{100}{A} \cdot B.$$

Задача 4. Определить, сколько процентов от некоторого числа составляет число B, если n % этого числа равны A.

Обозначим искомое число процентов через X и запишем условие задачи следующем виде:

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{x},$$

откуда находим

$$x = \frac{n}{A} \cdot B.$$

Задачи к решению

Задача 1. В США применяется налог с продаж, величина которого меняется от штата к штату. В Калифорнии этот налог, как правило, составляет 8,75 %. Сумма налога не указывается в продажной цене товара, а начисляется при оплате покупок. Покупатель выбрал в «ВолМАРТ» товары на сумму 39,53 долл. без учета налога с продаж. Какую сумму он заплатил в кассе?

Задача 2. В Республике Беларусь в продажную цену товара включается налог на добавленную стоимость (НДС). Его величина для большинства товаров составляет 20 %. Иногда он указывается отдельной строкой в кассовом чеке (это актуально для предпринимателей). При покупке товаров сумма НДС составила 48,66 р. Какова стоимость товара без НДС?

Задача 3. Покупатель приобрел в магазине «Евроопт» товары на сумму 110,90 р. По дисконтной карте ему была предоставлена скидка, равная 7,50 р. Чему равна величина скидки в процентах от суммы покупки?

Задача 4. Господин Н. сначала владел 1000 акциями компании «К», что составляло 2,5 % от общего числа акций этой компании. Чему стала равна его доля после покупки ещё 200 акций?

Задача 5. Господин Н., получив в наследство 65 000 долл., купил на них две квартиры: однокомнатную за 25 000 долл. и двухкомнатную за 40 000 долл. Через год он продал эти квартиры, получив от продажи однокомнатной квартиры 40 % прибыли, а от продажи двухкомнатной квартиры 30 % прибыли. Сколько процентов прибыли господин Н. получил от продажи двух квартир?

Задача 6. Вычислить, на сколько процентов прибыль, полученная от продажи двухкомнатной квартиры господином Н. из задачи 5, больше, чем прибыль, полученная им от продажи однокомнатной квартиры.

Задача *7*. В Великобритании НДС для большинства товаров составляет 17,5 %. НДС входит в продажную цену товара. Какой процент составляет налог на добавленную стоимость в продажной цене?

Задача 8. Некоторый товар подорожал в январе на 10 % и в феврале еще на 10 %. На сколько процентов подорожал товар за два месяца?

Контрольные вопросы

1 Перечислите основные задачи финансовой математики.
2 В чем выражается денежная оценка отсроченного потребления?
3 Какова обычная связь между риском и доходностью вложений?
4 Что такое процентная ставка?
5 Как найти процент от числа?
6 Как найти число по известному значению процента от числа?

Лабораторная работа № 2. Простые проценты. Декурсивный метод начисления процентов в среде EXCEL

Цель работы – изучить сущность простых процентов и методики их начисления.

Методические указания

Простые проценты – это проценты, начисляемые на первоначальную сумму сделки; в этом случае начальная сумма долга не меняется.

В зависимости от вида базы начисления процентов и выбора начала отсчета в периоде начисления процентов различают два метода начисления процентов:

1) декурсивный (последующий);

2) антисипативный (предварительный).

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P.

Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т. е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S дисконтируется или учитывается, а сам процесс начисления процентов и их удержание называют дисконтированием или учетом, а удержанные проценты – дисконтом (*Discount*) или сидкой.

Декурсивный способ начисления процентов – способ, при котором проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала. Соответственно, декурсивная процентная ставка представляет собой выраженное в процентах отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала.

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при декурсивном способе начислении простых процентов, представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Модели наращения при декурсивном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Простой процент	$I = P \cdot n \cdot i$	P – текущая стоимость
Итоговая сумма	$S = P \cdot (1 + n \cdot i)$	i – простая ставка наращения
Множитель наращения	$\nu = 1 + n \cdot i$	n – время (в годах)

Таблица 2 – Модели наращения при декурсивном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Текущая стоимость	$P = S / (1 + n \cdot i)$	S – итоговая стоимость
Дисконт	$D = S - P$	i – простая ставка наращения
Множитель дисконтирования	$\nu = 1 / (1 + n \cdot i)$	n – время (в годах)

Если ссуда предоставлена на d дней, то

$$n = \frac{d}{K},$$

где K – число дней в году.

Тогда наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \cdot (1 + i \cdot \frac{d}{K}).$$

В зависимости от способа определения d и K применяют следующие методики.

1 Точные проценты с точным числом дней ссуды (английская практика, ACT/ACT, 365/365). Точное количество дней определяется по календарю или специальным таблицам. При этом день выдачи кредита и возврата считается как один день. Число дней в году K = 365 или K = 366 дней для високосного года.

2 Банковский метод (французская практика, ACT/360, 360/360). В этом методе D определяется снова, как точное количество дней. Число дней в году принимается K = 360 дней. Метод дает финансовые преимущества банкам при выдаче кредита на срок более 360 дней.

3 Обыкновенные проценты с приближенным числом дней (германская практика, 365/360). В этом методе число дней в месяце принимается равным 30 дней. Количество дней в году K = 360. Применяется при частичном погашении ссуды.

В случае переменной процентной ставки наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \cdot (1 + \sum i_k \cdot n_k).$$

При начислении процентов при изменении величины депозита во времени проценты рассчитываются по формуле

$$I = R_j \cdot n_j \cdot i,$$

где R_j – остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств;

n_j – срок хранения денег до нового изменения остатка средств на счете.

Для коммерческих расчетов иногда требуется определить срок ссуды и процентную ставку.

Срок ссуды определяется по следующим формулам:

– в годах

$$n = (S - P) / (P \cdot i);$$

– в днях

$$d = (S - P) / (P \cdot i) \cdot K.$$

Величина процентной ставки определяется по формулам:
– в годах

$$i = (S - P) / (P \cdot n);$$

– в днях

$$i = (S - P) / (P \cdot d) \cdot K.$$

При декурсивном способе проценты начисляются по ставке i в конце периода начисления, базой начисления процентов служит текущая стоимость P. Процент I определяется выражением

$$I = P \cdot i /100.$$

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования – математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. В первом случае применяется ставка наращения, во втором – учетная ставка.

Задача к решению

Задача. Банк выдал клиенту ссуду в размере P тыс. р. сроком на 3; 6 и 9 месяцев, по ставке i простых процентов.

Определить наращенную сумму, если проценты начислялись по процентной ставке.

Через какой срок величина ссуды увеличится на 10 %, 20 %, 30 %, а также в 2 раза. Выполнить расчет декурсивным способом. Исходные данные для расчета представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	283	284	288	334	300	314	348	294	288	299
i	7	4	6	7	2	7	4	5	6	3

Контрольные вопросы

1 Какие существуют модели наращения по простым процентным ставкам при декурсивном методе начисления процентов ?

2 Напишите формулу для вычисления наращенной суммы при начислении простых процентов.

3 Чем отличаются точные проценты от обыкновенных?

4 Назовите способы начисления простых процентов в зависимости от числа дней финансовой операции.

Лабораторная работа № 3. Простые проценты. Антисипативный метод начисления процентов в среде EXCEL

Цель работы – изучить сущность простых процентов антисипативным методом.

Методические указания

При банковском учете банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т. е. покупает (учитывает) его с дисконтом.

При учете векселя применяется банковский или коммерческий учет. Согласно этому методу, проценты D за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка $d_{уч}$. Модели наращения и дисконтирования при антисипативном способе начисления простых процентов представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4 – Модели наращения при антисипативном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Итоговая сумма	$S = \dfrac{P}{1 - d_{уч} n}$	P – текущая стоимость d – простая учетная ставка n – время (в годах)
Процент	$D = S - P$	
Множитель наращения	$\nu = \dfrac{1}{1 - d_{уч} n}$	

Таблица 5 – Модели дисконтирования при антисипативном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Текущая стоимость	$P = S - S \cdot n \cdot d_{уч} = S \cdot (1 - n \cdot d_{уч})$	S – итоговая сумма $d_{уч}$ – простая учетная ставка n – время (в годах)
Дисконт	$D = S \cdot n \cdot d_{уч}$	
Множитель дисконтирования	$v = 1 - n \cdot d_{уч}$	

Задача к решению. По исходным данным, предложенным в лабораторной работе № 2, выполнить расчет антисипативным способом по учетной ставке. Сравнить результаты и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1 Какие существуют модели наращения по простым процентным ставкам при антисипативном методе начисления процентов ?

2 Напишите формулу для вычисления множителя наращения при переменных простых ставках процентов.

3 Что такое процентные деньги? Какова формула расчета процентных денег?

4 Что такое дисконт? Какова формула расчета дисконта?

5 Что называется множителем роста и какова его расчетная формула?

6 Какова формула расчета конечной суммы по переменной простой процентной ставке?

Лабораторная работа № 4. Декурсивный метод начисления сложных процентов в среде EXCEL

Цель работы – изучить сущность сложных процентов и методики их начисления.

Методические указания

База для начисления сложных процентов, в отличие от простых, не остается постоянной – она увеличивается с каждым шагом во времени. Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют капитализацией процентов. Модели наращения при при декурсивном способе начисления сложных процентов представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Модели наращения при декурсивном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Итоговая сумма	$S = P \cdot (1+j)^n$ $S = P \cdot (1+\frac{j}{m})^{mn}$	P – текущая стоимость j – процентная ставка наращения за период начисления процентов m – число периодов начисления процентов в году n – число периодов начисления процентов
Процент	$I = S - P$	
Множитель наращения	$K = (1+j)^n$ $Kн = (1+\frac{j}{m})^{mn}$	

Пусть процентная ставка меняется по годам. Первые n_1 лет она равна j_1, n_2 равна j_2 и т. д. Тогда

$$Kн = (1+j_1)^{n_1} \cdot (1+j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+j_k)^{n_k};$$

$$Kн = (1+\frac{j_1}{m})^{mn_1} \cdot (1+\frac{j_2}{m})^{mn_2} \cdot \ldots \cdot (1+\frac{j_k}{m})^{mn_k}.$$

Среди предложений банков по кредитным операциям со сложными процентами можно ориентироваться, если их пересчитать на эффективную годовую ставку.

При номинальной ставке j, начислении процентов m раз в году и сроке кредита n лет наращенная сумма

$$S = P \cdot (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Срок кредита для случая сложных процентов определяется по формуле

$$n = \frac{lg\frac{S}{P}}{m \cdot lg\left(1+\frac{j}{m}\right)}.$$

Номинальная процентная ставка вычисляется по формуле

$$j = m \cdot \left[\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right].$$

При дисконтировании по сложной учетной ставке используется следующая формула:

$$P = S \cdot (1 - d_{уч})^{n}.$$

Если дисконтирование происходит m раз в году, то расчет ведется по формуле

$$P = S \cdot (1 - \frac{d_{уч}}{m})^{mn}.$$

Задача к решению. Клиент имеет в коммерческом банке первоначальную сумму P тыс. р. Годовая сложная процентная ставка составляет i процентов. Определить наращенную сумму, если периоды наращения составляют:

а) 60 дней, 90 дней;

б) 5 месяцев, 9 месяцев;

в) один год; два года; пять лет.

Задачу решить при условии, что начисление процентов производилось:

а) один раз в году;

б) ежеквартально;

в) каждые два месяца;

г) ежемесячно.

Определить, через какой срок первоначальная сумма денег клиента удвоится; увеличится в 3 раза. Использовать декурсивный метод расчета. Исходные данные представлены в таблице 3.

Контрольные вопросы

1 Какие существуют модели наращения по сложным процентным ставкам при декурсивном методе начисления процентов?

2 Какова связь средней процентной ставки и средневзвешенной геометрической величины?

3 Какова формула роста по переменной сложной процентной ставке?

4 Какие существуют модели дисконтирования по декурсивному методу начисления сложных процентов?

Лабораторная работа № 5. Антисипативный метод начисления сложных процентов в среде EXCEL

Цель работы – изучить сущность сложных процентов и методики их начисления.

Методические указания

В таблицах 7 и 8 представлены модели финансовых операций при антисипативном способе начисления процентов

Таблица 7 – Модели наращения при антисипативном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Итоговая сумма	$S = \dfrac{P}{(1-d_{уч})^n}$	P – текущая стоимость $d_{уч}$ – сложная учетная ставка за период начисления процентов n – число периодов начисления процентов
Процент	$I = S - P$	
Множитель наращения	$K = \dfrac{1}{(1-d)^n}$	

Таблица 8 – Модели дисконтирования при антисипативном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Текущая стоимость	$P = S \cdot (1 - d_{уч})^n$	S – итоговая сумма $d_{уч}$ – простая учетная ставка n – время (в годах)
Если дисконтирование происходит m раз в году, то расчет ведется по формуле	$P = S \cdot (1 - \frac{d_{уч}}{m})^{mn}$	
Дисконт	$D = S - P$	
Множитель дисконтирования	$v = (1 -\cdot d_{уч})^n$	

Задачи к решению

Задача 1. Владелец векселя номинальной стоимостью P р., срок обращения которого один год, предъявил его банку-эмитенту для учета за 30 дней до даты погашения; 90 дней до даты погашения; 120 дней до даты погашения. Банк учел его по учетной ставке d % годовых. Определить дисконтированную величину, т. е. сумму P', полученную владельцем векселя, и величину дисконта D.

Задача 2. Долговое обязательство на сумму S тыс. р. должно быть погашено через n лет. Владелец долгового обязательства учел его в банке по сложной учетной ставке d % годовых. Найти сумму дисконта, полученную банком.

Задачу решить также при условии, что долговое обязательство учтено в банке по сложной процентной ставке (равной учетной ставке). Сравнить полученные результаты. Данные для анализа представлены в таблице 9.

Таблица 9 – Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	283	284	288	334	300	314	348	294	288	299
S	674	676	682	752	700	721	774	684	691	682
n	5	6	2	3	5	2	9	7	3	2
d	7	4	6	7	2	7	4	5	6	3

Контрольные вопросы

1 Какие существуют модели наращения по сложным процентным ставкам при антисипативном методе начисления процентов?

2 Какова формула роста по переменной сложной процентной ставке?

3 Какие существуют модели дисконтирования по антисипативному методу начисления сложных процентов?

4 Как соотносятся друг с другом рост по простым и по сложным процентам?

Лабораторная работа № 6. Определение годовых номинальных эквивалентных ставок. Определение годовой эффективной ставки

Цель работы – изучить методики расчета средних процентных ставок, сущности эквивалентных финансовых операций, порядок расчета эквивалентных ставок.

Методические указания

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней. Замена всех усредняемых значений ставок на среднюю процентную ставку по определению не изменяет результатов наращения или дисконтирования.

Простые проценты. Пусть за последовательные периоды n_1, n_2, …, n_k начисляются простые проценты по ставкам i_1, i_2, …, i_k. Искомые средние получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$1+N\cdot i_{cp}=1+\sum n_k\cdot i_k\,.$$

Отсюда

$$i_{cp}=\frac{\sum n_k\cdot i_k}{N},$$

где N – общий срок наращения процентов, $N=\sum n_k$.

Найденный показатель представляет собой среднюю арифметическую взвешенную с весами, равными продолжительности отдельных периодов.

При расчете по сложным процентам средняя процентная ставка также получается посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$(1+j_{ср})^{N} = (1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+j_k)^{n_k}.$$

Отсюда

$$1+j_{ср} = \sqrt[N]{(1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+j_k)^{n_k}};$$

$$j_{ср} = \sqrt[N]{(1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+j_k)^{n_k}} - 1.$$

Достаточно часто в практике возникает ситуация, когда необходимо произвести между собой сравнение по выгодности условий различных финансовых операций и коммерческих сделок. Условия финансово-коммерческих операций могут быть весьма разнообразными и напрямую несопоставимыми. Для сопоставления альтернативных вариантов ставки, используемые в условиях контрактов, приводят к единообразному показателю.

Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату.

Эквивалентная процентная ставка – это ставка, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат (наращенную сумму), что и применяемая в этой операции ставка.

Две ставки называют эквивалентными, если две соответствующие им финансовые операции характеризуются одинаковыми значениями начальной и конечной сумм и имеют одинаковую продолжительность.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получаются исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

Если S и P одинаковы, то при одинаковом n и процентной ставке j, обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году,

$$S = P\cdot(1+j_{эф})^{n}.$$

Тогда

$$P\cdot(1+\frac{j}{m})^{mn} = P\cdot(1+j_{эф})^{n};$$

$$(1 + \frac{j}{m})^{m} = 1 + j_{эф};$$

$$j_{эф} = (1 + \frac{j}{m})^{m} - 1.$$

Задачи к решению

Задача 1. Контракт предусматривает переменную по периодам ставку простых процентов 20 %, 22 % и 25 %. Продолжительность последовательных периодов начисления процентов: два, три и пять месяцев. Найти среднюю процентную ставку, проверить результаты традиционным методом.

Задача 2. Для первых двух лет кредита применяется ставка, равная 15 %, для следующих трех лет она составляет 20 %. Определить среднюю ставку кредита при расчете по сложным процентам, проверить результаты традиционным методом.

Задача 3. По условиям договора первый год наращения суммы идет по ставке 8 % в месяц, затем еще полгода по ставке 6 % в месяц, а потом еще полгода по ставке 4 % в месяц. Определить, до какой суммы за два года вырастет первоначальный вклад размером 200 тыс. р.

Задача 4. Ставка процента за период 3,5 месяца равна 20 %. Найти эквивалентную ей ставку за период 6 месяцев.

Задача 5. Номинальная годовая ставка равна 40 %. Определить коэффициент наращения для промежутка времени, равного полугодию, на основе относительных ставок для разных периодов начисления.

Задача 6. Определить соотношение эквивалентности между простой учетной ставкой $d_{уч}$ и сложной ставкой наращения j. Вывести формулы расчета $d_{уч}$ и j исходя из равенства множителей наращения:

$$\frac{P}{1 - n \cdot d_{уч}} = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{mn}.$$

Задача 7. Определить соотношение эквивалентности между сложной учетной ставкой $d_{уч}$ и сложной ставкой наращения j. Вывести формулы расчета $d_{уч}$ и j исходя из равенства множителей наращения

$$\frac{P}{(1-d_{уч})^n} = P\cdot(1+i)^n .$$

Задача 8. Найти величину учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 40 % (K = 365) при условии, что срок учета равен 255 дням.

Задача 9. Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18 % (K = 365), не изменяя условий финансовых обязательств? Срок операции 580 дней.

Задача 10. При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24 % годовых. Какой должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?

Контрольные вопросы

1 Что такое годовая номинальная процентная ставка?

2 Как определить доходность финансовой операции с начислением сложных процентов?

3 Что такое эффективная процентная ставка?

4 Как определить годовую эффективную ставку, эквивалентную данной годовой номинальной ставке?

5 В чем различие между уравновешенными и относительными процентными ставками?

Лабораторная работа № 7. Конверсия платежей в среде EXCEL

Цель работы – изучить понятийный и категориальный аппарат финансовых операций с потоками платежей в случае реструктуризации.

Методические указания

Консолидация платежей. Консолидация, т. е. объединение, платежей является одним из самых распространенных видов изменения условий контрактов. Пусть платежи S_1, S_2, …, S_m со сроками n_1, n_2, …, n_m заменяются одним платежом в сумме S_0 со сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задан срок n_0, то находится сумма S_0, и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа, то определяется срок.

Определение размера консолидированного платежа. При решении этой задачи величину S_0 находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей. Если применяются простые процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + \Delta n_j \cdot i) + \sum_k S_k (1 + \Delta n_k \cdot i)^{-1} ,$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$;

S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$;

$\Delta n_j = n_0 - n_j$;

$\Delta n_k = n_k - n_0$.

Если применяются сложные процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + i)^{\Delta n_j} + \sum_k S_k (1 + i)^{-\Delta n_k} .$$

Определение срока консолидированного платежа. В случае простых процентных ставок уравнение эквивалентности запишется в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей. Из него несложно получить выражение для определения срока n_0:

$$n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{S_0}{\sum_j S_j (1 + \Delta n_j \cdot i)^{-1}} - 1 \right).$$

Очевидно, что решение может быть получено только при условии

$$S_0 > \sum_j S_j (1 + \Delta n_j \cdot i)^{-1} ,$$

т. е. размер заменяющего платежа не может быть меньше суммы современных стоимостей заменяемых платежей.

При использовании сложной процентной ставки из уравнения эквивалентности может быть получено выражение для определения срока n_0 по формуле

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)};$$

$$Q = \sum_j S_j (1+i)^{-n_j};$$

$$S_0 > Q.$$

Для частного случая, когда $S_0 = \sum S_j$, при определении срока консолидированного платежа, используют средний взвешенный срок:

$$n_0 = \frac{\sum S_j n_j}{S_0}.$$

Эта формула не требует задания уровня процентной ставки. Однако она дает приближенный результат, который больше точного. Погрешность тем больше, чем выше процентная ставка i.

Задачи к решению

Задача 1. Предположим, что одно лицо несколько раз брало в долг деньги у другого лица. В настоящее время долг состоит из трех сумм: S_1 р., S_2 р. и S_3 р., которые по условию следует выплатить в рамках одного года соответственно 10 марта, 1 апреля и 10 июня. Предположим, что обе стороны договорились объединить три долга в один с общей суммой S_0 р. Как определить справедливый день уплаты этого консолидированного долга?

Задача 2. Рассмотрим условия приведенного выше примера. Согласно проведенным расчетам, общую сумму S_0 р. по трем долговым обязательствам следует уплатить 19 апреля. Предположим, что обе стороны договариваются сместить срок уплаты с 19 апреля на 1 июля. В связи с этим должна увеличиться ся и выплачиваемая сумма. Следует определить новую величину этой суммы, исходя из годовой ставки i %.

Задача 3. Рассмотрим другую ситуацию. Предположим, что должник вместо S_0 готов уплатить (S_0 +Δ) р., но в более поздний срок. Определите новую дату уплаты.

Задача 4. Три платежа: S_1 тыс. р. (срок 4 месяца), S_2 тыс. р. (срок 5 месяцев) и S_3 тыс. р. (срок 8 месяцев) заменяются одним платежом S_0 тыс. р. ($S_0 = S_1 + S_2 + S_3$). Определить срок уплаты этого объединенного платежа при месячной ставке сложного процента, равной i %.

Задача 5. Внесем в условие задачи 4 другое изменение. Предположим, что общий платеж имеет величину $S_0 < S_1 + S_2 + S_3$. Это, разумеется, означает, что срок уплаты должен быть приближен. Требуется рассчитать этот срок.

Задача 6. Внесем в рассматриваемые условия еще одно изменение. Предположим, что общий платеж имеет не величину $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$ тыс. р., а некоторую величину S', срок уплаты которой наступает немедленно. Требуется вычислить величину S'.

Исходные данные для решения задач представлены в таблице 10.

Таблица 10 – Исходные данные для расчетов

Вариант	*S*0	*S*1	*S*2	*S*3	*i*
1	497	209	189	202	0,07
2	498	190	190	219	0,01
3	493	183	193	196	0,01
4	532	185	204	199	0,05
5	494	199	212	182	0,03
6	477	204	224	195	0,03

Контрольные вопросы

1 Что такое датированная сумма?
2 Определите понятие потока платежей.
3 Что такое конверсия платежей?
4 Что такое уравнение эквивалентности?

Лабораторная работа № 8. Инфляция. Начисление процентов с учетом инфляции

Цель работы – изучить методику учета инфляции в финансовых операциях.

Методические указания

Пусть r_n – ставка процента, учитывающая инфляцию (номинальная ставка процента); r – реальная ставка банковского процента (реальная процентная ставка); i – ставка темпа инфляции.

Пусть $S(0)$ – капитал в начале года. Тогда капитал в конце года, с одной стороны, должен быть равен

$$S(1) = (1 + r_n)\, S(0),$$

с другой стороны, – он равен $S(1) = (1 + i)\,(1 + r)\, S(0)$.

Приравнивая капиталы в конце года, вычисленные по разным формулам, получим формулу Фишера, связывающую номинальную r_n и реальную r ставку процента с темпом инфляции i:

$$r_n = r + i + i \quad r = r(1 + i) + i.$$

Величина $i\ r$ называется инфляционной премией.

Задачи к решению

Задача 1. Банк принимает депозиты на три месяца по ставке 6 % годовых. Определить реальные результаты операции (сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с учетом влияния инфляции, реальный доход) для вклада 1 млн р. при месячном уровне инфляции 6 %. Начисление производится по схеме простых процентов.

Задача 2. Вклад в сумме 35 000 р. положен в банк на 1 год с ежемесячным начислением сложных процентов, годовая ставка по вкладам составляет 6 %, уровень инфляции за месяц – 10 %. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с учетом действия инфляции, реальный доход вкладчика.

Задача 3. Банк принимает депозиты на 12 месяцев по ставке 5 % годовых. Определить реальные результаты вкладной операции (сумму вклада с процентами, суму вклада с процентами с учетом покупательной способности, реальный доход вкладчика) для депозита 5 млн р. при месячном уровне инфляции 7 %.

Задача 4. Вклад в сумме 50 000 р. положен в банк на 4 месяца с ежемесячным начислением сложных процентов. Годовая ставка по вкладам – 12 %. Уровень инфляции – 4 % в месяц. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с точки зрения покупательной способности, реальный доход вкладчика с точки зрения покупательской способности.

Задача 5. Вклад в сумме 350 000 р. положен в банк на полгода с ежемесячным начислением сложных процентов. Годовая ставка по вкладам – 35 %. Уровень инфляции за месяц – 10 %. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с точки зрения покупательной способности, реальный доход вкладчика с точки зрения покупательной способности.

Задача 6. Банк принимает депозиты на шесть месяца по ставке 12 % годовых. Определить реальные результаты операции (сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с учетом влияния инфляции, реальный доход) для вклада 1,5 млн. р. при месячном уровне инфляции 7 %. Начисление производится по схеме простых процентов.

Задача 7. Вклад в сумме 55 000 р. положен в банк на 1 год с ежемесячным начислением сложных процентов, годовая ставка по вкладам составляет 12 %, уровень инфляции за месяц – 5 %. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с учетом действия инфляции, реальный доход вкладчика.

Задача 8. Банк принимает депозиты на 6 месяцев по ставке 15 % годовых. Определить реальные результаты вкладной операции (сумму вклада с процентами, суму вклада с процентами с учетом покупательной способности, реальный доход вкладчика) для депозита 3,5 млн р. при месячном уровне инфляции 20 %.

Задача 9. Вклад в сумме 150 000 р. положен в банк на 7 месяцев с ежемесячным начислением сложных процентов. Годовая ставка по вкладам – 15 %. Уровень инфляции – 6 % в месяц. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с точки зрения покупательной способности, реальный доход вкладчика с точки зрения покупательной способности.

Задача 10. Вклад в сумме 750 000 р. положен в банк на полгода с ежемесячным начислением сложных процентов. Годовая ставка по вкладам – 12,5 %. Уровень инфляции за месяц – 11 %. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с точки зрения покупательной способности, реальный доход вкладчика с точки зрения покупательной способности.

Задача 11. В таблице 11 представлены цепные темпы прироста цен за 1 год (в числовом формате). Рассчитать основные характеристики инфляции по этим данным.

Таблица 11 – Месячные темпы прироста цен

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Темп прироста	0,150	0,100	0,079	0,087	0,085	0,080	0,075	0,050	0,078	0,090	0,095	0,100

Задача 12. Вклад в сумме 20 000 р. положен в банк на шесть месяцев. Ставка по вкладу – 10 % годовых. Уровень инфляции – 5 % в месяц. Определить сумму вклада с процентами, сумму вклада с процентами с точки зрения покупательной способности, реальный доход вкладчика, если:

а) начисление производилось по схеме простых процентов;

б) начисление производилось по схеме сложных процентов (ежемесячно).

Контрольные вопросы

1 Как связаны друг с другом темп и индекс инфляции?

2 Как по месячным темпам инфляции рассчитать квартальный и годовой темп?

3 Как по годовому темпу инфляции рассчитать среднемесячный темп инфляции?

4 Как по отдельным месячным темпам рассчитать среднемесячный темп инфляции?

Лабораторная работа № 9. Доходность ссудных и учетных операций с удержанием комиссионных

Цель работы – изучить понятие полной доходности финансово-банковских операций, методик измерения доходности купли-продажи отдельных финансовых инструментов.

Методические указания

За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые заметно повышают доходность операций, т. к. сумма фактически выданного кредита сокращается.

Пусть кредит в размере D выдан на срок n. При его выдаче удерживаются комиссионные в размере G. Фактически выданный кредит равен $D – G$.

Рассмотрим вариант начисления простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $j_э$ исходят из того, что наращение величины $D – G$ по данной ставке должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке i.

По определению уравнение эквивалентности можно записать как

$$(D-G) \cdot (1+j_э)^n = D \cdot (1+n \cdot i).$$

Пусть

$$(D-G)=D \cdot (1-g),$$

где g – относительная величина комиссионных в сумме кредита.

Тогда

$$j_э = \sqrt[n]{\frac{1+n\cdot i}{1-g}}-1.$$

Если ссуда выдается под сложные проценты по ставке j, то исходное уравнение для определения $j_э$ имеет вид

$$(D-G) \cdot (1+j_э)^n = D \cdot (1+i)^n.$$

Тогда

$$j_э = \frac{1+j}{\sqrt[n]{1-g}} - 1.$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке, то эффективность сделки без удержания комиссионных определяется по формуле эквивалентной ставки.

При удержании комиссионных и дисконта заемщик получает сумму

$$D - Dd_{уч} - G \text{ или } D \cdot (1 - nd_{уч} - G).$$

Уравнение эквивалентности в данном случае имеет вид

$$D \cdot (1 - n \cdot d_{уч} - g) \cdot (1 + j_э)^n = D.$$

Тогда

$$j_э = \sqrt[n]{\frac{1}{1 - n \cdot d_{уч} - g}} - 1.$$

Задачи к решению

Задача 1. При выдаче кредита на X дней под 8 % годовых (простые проценты) кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5 % суммы кредита. Методика 365/365. Какова эффективность кредитной операции в виде годовой ставки сложных процентов? Исходные данные представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	90	110	125	130	140	145	150	155

Задача 2. В какой мере удержание комиссионных из расчета 1 % от суммы кредита увеличивает эффективность данного кредита для кредитора при пяти- и десятилетнем сроке?

Задача 3. Вексель учтен по ставке 10 % за *X* дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5 %. Определить доходность данной операции. Исходные данные представлены в таблице 13.

Таблица 13 – Исходные данные

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	190	110	125	130	140	145	150	155

Задача 4. При вложении капитала в мероприятие *А* в 20 случаях из 200 была получена прибыль в 25 тыс. р., в 80 случаях – 30 тыс. р., в 100 случаях – 40 тыс. р. При вложении капитала в мероприятие *Б* в 144 случаях из 240 была получена прибыль 30 тыс. р., в 72 случаях – 35 тыс. р., в 24 случаях – 45 тыс. р. Выбрать вариант вложения капитала:

а) по критерию средней прибыли;

б) по критерию колеблемости прибыли.

Задача 5. Инвестор выбирает между двумя акциями *А* и *Б*. Каждая из них по-своему откликается на возможные рыночные ситуации, достигая с известными вероятностями определенных значений доходности. Исходные данные представлены в таблице 14.

Таблица 14 – Исходные данные

Акция	Вероятность	Доходность, %
А	0,2	5
	0,8	6
Б	0,2	–1
	0,8	9

Определить:

а) ожидаемые доходности и риски (стандартные отклонения) этих акций;

б) коэффициент корреляции между доходностями;

в) какую акцию выберет инвестор, максимизирующий вероятность неразорения, учитывая, что инвестируемые заемные средства взяты под ставку 1,5 %;

г) как распределить вложения, чтобы получить безрисковую комбинацию этих акций – портфель с независящей от исхода эффективностью.

Контрольные вопросы

1 Что понимается под полной доходностью финансовой операции?

2 Из какого уравнения выводится показатель доходности учетных операций?

3 Что такое комиссионные?

4 Что такое ставка комиссионных?

5 Как влияет на доходность ссудной операции для кредитора удержание комиссионных?

Список литературы

1 **Чуйко, А. С.** Финансовая математика: учебное пособие / А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 160 с.

2 **Мелкумов, Я. С.** Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие / Я. С. Мелкумов. – 2-е изд. – Москва : ИНФРА-М, 2017. – 408 с.

3 **Малыхин, В. И.** Финансовая математика: учебное пособие / В. И. Малыхин. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. – 237 с.

4 **Копнова, Е. Д.** Основы финансовой математики: учебное пособие / Е. Д. Копнова. – Москва: Моск. финансово-промышленный ун-т «Синергия», 2012. – 250 с.