СЕКЦИЯ № 3
МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.927.4

К двухточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова (двусторонняя регуляризация)

И. И. Маковецкий

Получены эффективно проверяемые по исходным данным достаточные условия существования и единственности решения двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова. Предложен алгоритм построения решения с вычислительной схемой классического типа, при этом все приближения удовлетворяют краевому условию.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, двухточечная краевая задача, однозначная разрешимость, построение решения.

On a two-point boundary value problem for the Lyapunov matrix equation (two-sided regularization)

I. I. Makovetsky

Efficiently verifiable sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to a two-point boundary value problem for the nonlinear Lyapunov equation are obtained. An algorithm for constructing a solution with a computational scheme of the classical type is proposed, with all approximations satisfying the boundary condition.

Keywords: matrix differential equation, two-point boundary value problem, unique solvability, solution construction.

Рассмотрим обобщение краевой задачи [1]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + C_1(t)XC_2(t) + D_1(t)XD_2(t) + F(t,X),\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (1)$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \quad (2)$$

где $A, B, C_i, D_i\ (i=1,2) \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, M, N – вещественные $(n\times n)$-матрицы, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X): t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $0 < \tilde\rho \le \infty$; нелинейная функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

Эту задачу изучаем в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [2, с. 21].

Предлагаемая работа является развитием и обобщением [1, 3–5]. С помощью метода регуляризации [6] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах, а также разработан алгоритм построения решения и дана оценка его области локализации.

Приняты обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X): t\in I, \|X\|\le\rho\},\ \lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\ \lambda_2=\max_t\|U^{-1}(t)\|,\ \mu_1=\max_t\|V(t)\|,$$

$$\mu_2=\max_t\|V^{-1}(t)\|,\ c_i=\max_t\|C_i(t)\|, d_i=\max_t\|D_i(t)\|\ (i=1,2),\ P=U^{-1}(\omega)N^{-1}M,$$

$$Q=-V(\omega),\ \gamma=\|\Phi^{-1}\|,\ m=\max\{\|P\|,\|Q\|\},\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$

$$G(t,X(t))=C_1(t)X(t)C_2(t)+D_1(t)X(t)D_2(t)+F(t,X(t)),$$

$$q=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega(c_1c_2+d_1d_2+L),\ p=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega h,$$

где $t\in I$, $0<\rho<\tilde\rho$, $\lambda_0=\lambda_1\lambda_2$, $\mu_0=\mu_1\mu_2$, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi X=PX-XQ$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в D_ρ, $U(t)$, $V(t)$ решения соответственно уравнений $dU/dt=A(t)U$, $dV/dt=VB(t)$.

Установлено, что в случае, когда

1) $\det N\ne 0$,

2) матрицы P,Q не имеют общих характеристических чисел, задача (1), (2) эквивалентна интегральной задаче

$$X(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)G(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)G(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)Q\right]\right\}V(t). \qquad (3)$$

С помощью принципа сжимающих отображений Каччопполи – Банаха [7, с. 605] получена теорема, аналогичная теореме [1]:

Теорема. *Пусть выполнены условия 1), 2), а также неравенства*

3) $q<1$,

4) $p/(1-q)\le\rho$.

Тогда решение задачи (1), (2) существует и единственно в области D_ρ.

Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}}\le p/(1-q)$.

Решение интегрального уравнения (3) строим классическим методом [7, с. 605]

$$X_{k+1}(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t), k=0,1,2,..., \qquad (4)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$. Для приближений справедливы оценки $\|X_i\|_{\mathbb{C}} \le \rho\,(i=1,2,...)$. Это нетрудно установить индукцией по k и на основании условия 4).

Покажем, что все приближения, построенные по алгоритму (4), принадлежат множеству допустимых функций. Под допустимыми функциями понимаем функции класса $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, удовлетворяющие условию (2).

Выполнив дифференцирование по t в обеих частях формулы (4), представим полученное выражение в виде

$$G(\tau,X_k(\tau))dt = dX_{k+1}(t) - \left[A(t)X_{k+1}(t) + B(t)X_{k+1}(t)\right]dt. \tag{5}$$

При $t=\omega$ из (5) имеем

$$X_{k+1}(\omega) = U(\omega)\Phi^{-1}\left\{P\int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right\}V(\omega). \tag{6}$$

Далее запишем соотношение (6) в следующем виде:

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P\int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau. \tag{7}$$

На основании (5), (7) с помощью интегрирования по частям и тождеств $dU^{-1}/dt = -U^{-1}A(t)$, $dV^{-1}/dt = -B(t)V^{-1}$ получим

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P\left[U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) - X_{k+1}(0)\right]. \tag{8}$$

Соотношение (8) эквивалентно следующему равенству:

$$MX_{k+1}(0) + NX_{k+1}(\omega) = 0,\ k = 0,1,2,... \tag{9}$$

Равенство (9) позволяет строить приближенные решения задачи (1), (2) в классе допустимых функций.

На основании (4) для любых $k=1,2...$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| \le \\
&\le \Bigg\| U(t)\Bigg\{\Phi^{-1}\Bigg[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\left[G(\tau,X_k(\tau)) - G(\tau,X_{k-1}(\tau))\right]V^{-1}(\tau)d\tau + \\
&+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)\left[G(\tau,X_k(\tau)) - G(\tau,X_{k-1}(\tau))\right]V^{-1}(\tau)d\tau Q\Bigg]\Bigg\}V(t)\Bigg\| \le \\
&\le \|U(t)\|\Bigg\{\|\Phi^{-1}\|\Bigg[\|P\|\int_0^t \|U^{-1}(\tau)\|\|G(\tau,X_k(\tau)) - G(\tau,X_{k-1}(\tau))\|\|V^{-1}\|d\tau + \\
&+\int_t^{\omega}\|U^{-1}(\tau)\|\|G(\tau,X_k(\tau)) - G(\tau,X_{k-1}(\tau))\|\|V^{-1}(\tau)\|d\tau\|Q\|\Bigg]\Bigg\}\|V(t)\| \le \\
&\le \gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 m\omega(c_1c_2 + d_1d_2 + L)\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\|.
\end{aligned} \tag{10}$$

На основе (10) получим неявную рекуррентную оценку

$$\left\| X_{m+1} - X_m \right\|_{\mathbb{C}} \le q \left\| X_m - X_{m-1} \right\|_{\mathbb{C}},\ m = 1,2,...,$$

а затем и явную

$$\left\| X_{m+1} - X_m \right\|_{\mathbb{C}} \le q^m \left\| X_1 - X_0 \right\|_{\mathbb{C}},\ m = 1,2,... \qquad (11)$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\left\{ X_k(t) \right\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению $X(t) \in D_\rho$ уравнения (3).

Используя оценку (11), получим оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (4),

$$\left\| X_k - X \right\|_{\mathbb{C}} \le q^k \frac{\left\| X_1 - X_0 \right\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, k = 0,1,2,... \qquad (12)$$

Из (12) при $k = 0$, $X_0 = 0$ получим

$$\left\| X \right\|_{\mathbb{C}} \le \frac{\left\| X_1 \right\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \qquad (13)$$

Далее на основе (13) получим оценку для $\left\| X \right\|_{\mathbb{C}}$, выраженную через исходные данные задачи. При $k = 0$, $X_0 = 0$ из (4) имеем

$$X_1(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, 0) V^{-1}(\tau) d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau) F(\tau, 0) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \qquad (14)$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (14), имеем

$$\left\| X_1(t) \right\| \le \left\| U(t) \right\| \left\| \Phi^{-1} \right\| \left[\left\| P \right\| \int_0^t \left\| U^{-1}(\tau) F(\tau, 0) V^{-1}(\tau) \right\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^\omega \left\| U^{-1}(\tau) F(\tau, 0) V^{-1}(\tau) \right\| d\tau \left\| Q \right\| \right] \left\| V(t) \right\| \le \gamma \lambda_0 \mu_0 \omega h = p.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\| X_1 \right\|_{\mathbb{C}} \le p. \qquad (15)$$

Используя (15), получим из (13)

$$\left\| X \right\|_{\mathbb{C}} \le \frac{\left\| X_1 \right\|_{\mathbb{C}}}{1-q} \le \frac{p}{1-q}. \qquad (16)$$

Априорная оценка для $\left\| X \right\|_{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$\left\| X \right\|_{\mathbb{C}} \le \frac{p}{1-q}. \qquad (17)$$

Это можно установить в результате соответствующих оценок в уравнении (3) с использованием условия (3).

Очевидно, оценка (17) грубее оценки (16).

Замечание

В работе [8] краевая задача (1), (2) качественными методами изучается в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Теорема, приведенная в предлагаемой работе, очевидно, эффективнее соответствующей теоремы из [8], поскольку получена для области более общей конфигурации.

Список использованных источников и литературы

1. *Маковецкий, И. И.* Двухточечная краевая задача для матричного уравнения Ляпунова (двусторонняя регуляризация) // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы II Международной научно-технической конференции, посвященной 70-летию ИМИ – ИжГТУ и 60-летию СПИ ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова». Ижевск, 2022. – С. 91–95.

2. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва, 1967. – 472 с.

3. *Лаптинский, В. Н.* Двусторонняя регуляризация нелинейно возмущенной двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік Магілёускага дзяржаунага універсітэту імя А. А. Куляшова. Сер. В. 2019. – № 2 (54). – С. 12–20.

4. *Лаптинский, В. Н.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : БРУ, 2012. – 167 с.

5. *Лаптинский, В. Н.* К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т 56, № 1. – С. 137–141.

6. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.

7. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

8. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. - 1992.- 167. P. 505-515.

Сведения об авторе

Илья Иванович Маковецкий, кандидат физико-математических наук, доцент, декан экономического факультета, МОУ ВО «Белорусско-Российский университет» (Республика Беларусь, г. Могилев), imi.makzi@gmail.com