УДК 517.925

К левосторонней регуляризации периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати

Д. В. Роголев

Выведены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати. Дан алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения и изучены вопросы сходимости, скорости сходимости.

Ключевые слова: матричное уравнение Риккати, периодическая краевая задача, регуляризация.

On left-handed regularization of a periodic boundary value problem for the system of matrix Riccati differential equations

D. V. Rogolev

Coefficient sufficient conditions for the unique solvability of a periodic boundary value problem for the system of matrix Riccati differential equations are obtained. An algorithm with an implicit computational scheme for constructing a solution is given, and the issues of convergence and rate of convergence are studied.

Keywords: matrix Riccati equation, periodic boundary value problem, regularization.

Рассмотрим краевую задачу типа [1–4]

$$\frac{dX}{dt} = G_1(t, X, Y), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{3}$$

$$Y(0) = Y(\omega), \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} G_1(t,X,Y) = A_1(t)X + D_1(t)XB_1(t) + X\big(S_1(t)X + S_2(t)Y\big) + \\ + C_1(t)X^2 + X^2C_2(t) + F_1(t), \\ G_2(t,X,Y) = A_2(t)Y + D_2(t)YB_2(t) + Y\big(P_1(t)X + P_2(t)Y\big) + \\ + Q_1(t)Y^2 + Y^2Q_2(t) + F_2(t); \end{gathered}$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$.

Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения относятся к многомерным системам специального вида. Эти уравнения играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1, 5–8 и др.].

Примем следующие обозначения:

$$D=\{(t,X,Y):0\le t\le\omega,\|X\|\le\rho_1,\|Y\|\le\rho_2\},\ \tilde{A}_i(\omega)=\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\ \gamma_i=\left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i=\max_t\left\|A_i(t)\right\|,\ \beta_i=\max_t\left\|B_i(t)\right\|,\ d_i=\max_t\left\|D_i(t)\right\|,\ \delta_i=\max_t\left\|S_i(t)\right\|,\ \mu_i=\max_t\left\|P_i(t)\right\|,$$

$$\sigma_i=\max_t\left\|C_i(t)\right\|,\ \nu_i=\max_t\left\|Q_i(t)\right\|,\ h_i=\max_t\left\|F_i(t)\right\|,$$

$$q_{11}=\gamma_1\left[\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left(\alpha_1+\beta_1d_1+2(\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1+\delta_2\rho_2\right)+\right.$$

$$\left.+\omega\left(\beta_1d_1+2(\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1+\delta_2\rho_2\right)\right],\ q_{12}=\gamma_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right),$$

$$q_{21}=\gamma_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right),\ q_{22}=\gamma_2\left[\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left(\alpha_2+\beta_2d_2+\mu_1\rho_1+2(\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2\right)+\right.$$

$$\left.+\omega\left(\beta_2d_2+\mu_1\rho_1+2(\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2\right)\right],$$

где $t\in[0,\omega]$, $\rho_1,\rho_2>0$.

Задачу (1)–(4) изучаем с помощью конструктивного метода [9] в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|T\|_C=\max_t\|T(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21], $T\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$. Предлагаемая работа является развитием и обобщением [2–4].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$1)\ \det\tilde{A}_i\ne0\ \ (i=1,2), \tag{5}$$

2)
$$\gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left[(\alpha_1+\beta_1d_1)\rho_1+(\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]+\right.$$
$$\left.+\omega\left(\beta_1d_1\rho_1+(\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right)\right\}\le\rho_1, \tag{6}$$

$$\gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left[(\alpha_2+\beta_2d_2)\rho_2+(\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]+\right.$$
$$\left.+\omega\left(\beta_2d_2\rho_2+(\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right)\right\}\le\rho_2,$$

3)
$$q_{11}<1,\ \det(E-Q)>0, \tag{7}$$

где $E=diag(1,1)$, $Q=(q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(4) *однозначно разрешима в области* D.

Доказательство. Сначала сведем задачу (1)–(4) с помощью регуляризатора

$$\int_0^\omega A(\tau)Z(\tau)d\tau=\int_0^\omega A(\tau)d\tau\cdot Z(t)-\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)dZ(\tau)+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)dZ(\tau),$$

где $A=\{A_1,A_2\}$, $Z=\{X,Y\}$, к эквивалентной интегральной задаче типа [2–4]

$$X(t)=\tilde{A}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau))-A_1(\tau)X(\tau)\right]d\tau\right\}, \tag{8}$$

$$Y(t)=\tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau))-A_2(\tau)Y(\tau)\right]d\tau\right\}. \tag{9}$$

Запишем систему (8), (9) в операторном виде

$$X=\mathcal{L}_1(X,Y),\ Y=\mathcal{L}_2(X,Y), \tag{10}$$

где через $\mathcal{L}_i\,(i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (8), (9). Эти операторы действуют из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^1$ на множестве $\left\{(X(t),Y(t)):\|X\|_C<\infty,\|Y\|_C<\infty\right\}$.

Для исследования разрешимости системы (10) воспользуемся модификацией [9, §3.4] обобщенного принципа Каччопполи – Банаха [11, с. 94] на множестве $\tilde{D}=\left\{(X(t),Y(t)):\|X\|_C\le\rho_1,\|Y\|_C\le\rho_2\right\}$ с использованием условий 2), 3) данной теоремы.

В работе [4] решение системы (10) строится классическим методом последовательных приближений (см., например, [12, с. 605])

$$X_{k+1}=\mathcal{L}_1(X_k,Y_k), \tag{11}$$

$$Y_{k+1}=\mathcal{L}_2(X_k,Y_k)\ \ k=0,1,2,..., \tag{12}$$

где X_0, Y_0 – произвольные матричные функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$, принадлежащие множеству $\tilde{D}$.

Однако решения, построенные по алгоритму (11), (12), не обязаны относиться к классу допустимых функций. Под допустимыми функциями понимаем функции из пространства $\mathbb{C}^1$, удовлетворяющие условиям (3), (4).

Для получения приближений в классе допустимых функций воспользуемся алгоритмом типа [4], который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt}=G_1(t,X_k,Y_k), \tag{13}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt}=G_2\left(t,X_k,Y_k\right), \tag{14}$$

$$X_{k+1}\left(0\right)=X_{k+1}\left(\omega\right), \tag{15}$$

$$Y_{k+1}\left(0\right)=Y_{k+1}\left(\omega\right),\ k=0,1,2,..., \tag{16}$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (13), (14) при $k=0$ из соответствующих условий (15), (16) для приближения $X_1\left(t\right)$, $Y_1\left(t\right)$,

$$\int_0^{\omega}G_1\left(\tau,X_0,Y_0\right)d\tau=0,\quad \int_0^{\omega}G_2\left(\tau,X_0,Y_0\right)d\tau=0.$$

Используя приведенный регуляризатор, от (13)–(16) перейдем к соответствующим рекуррентным интегральным соотношениям

$$X_k\left(t\right)=\tilde{A}_1^{-1}\left(\omega\right)\left\{\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\tau}A_1\left(\sigma\right)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X_{k-1}\left(\tau\right),Y_{k-1}\left(\tau\right)\right)d\tau-\right.$$
$$-\int\limits_t^{\omega}\left(\int\limits_{\tau}^{\omega}A_1\left(\sigma\right)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X_{k-1}\left(\tau\right),Y_{k-1}\left(\tau\right)\right)d\tau-$$
$$\left.-\int\limits_0^{\omega}\left[G_1\left(\tau,X_k\left(\tau\right),Y_k\left(\tau\right)\right)-A_1\left(\tau\right)X_k\left(\tau\right)\right]d\tau\right\}, \tag{17}$$

$$Y_k\left(t\right)=\tilde{A}_2^{-1}\left(\omega\right)\left\{\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\tau}A_2\left(\sigma\right)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X_{k-1}\left(\tau\right),Y_{k-1}\left(\tau\right)\right)d\tau-\right.$$
$$-\int\limits_t^{\omega}\left(\int\limits_{\tau}^{\omega}A_2\left(\sigma\right)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X_{k-1}\left(\tau\right),Y_{k-1}\left(\tau\right)\right)d\tau-$$
$$\left.-\int\limits_0^{\omega}\left[G_2\left(\tau,X_k\left(\tau\right),Y_k\left(\tau\right)\right)-A_2\left(\tau\right)Y_k\left(\tau\right)\right]d\tau\right\},\ k=1,2,... \tag{18}$$

Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (17), (18) , при этом получена оценка

$$\tilde{Z}_i\le\left(E-H\right)^{-1}H^iZ_0,\ i=0,1,2,..., \tag{19}$$

где

$$\tilde{Z}_i=\begin{pmatrix}\left\|X-X_i\right\|_C\\ \left\|Y-Y_i\right\|_C\end{pmatrix},\ Z_0=\begin{pmatrix}\left\|X_1-X_0\right\|_C\\ \left\|Y_1-Y_0\right\|_C\end{pmatrix},\ H=\left(E-\tilde{Q}\right)^{-1}\left(Q-\tilde{Q}\right),\ \tilde{Q}=\left(\tilde{q}_{ij}\right);$$

здесь $\tilde{q}_{11}=\gamma_1\omega\left(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)$, $\tilde{q}_{12}=\gamma_1\omega\delta_2\rho_1$, $\tilde{q}_{21}=\gamma_2\omega\mu_1\rho_2$, $\tilde{q}_{22}=\gamma_2\omega\left(\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)$.

Список использованных источников и литературы

1. *Анисович, В. В.* Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В. В. Анисович, Б. И. Крюков, В. М. Мадорский // Доклады АН СССР, 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.

2. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения, 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

3. *Роголев, Д. В.* К разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати // Актуальные проблемы науки и техники: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Сарапул, 20–22 мая 2021 г. / Минобрнауки Рос. Федерации. Сарапульский политехн. ин-т (филиал) ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова». – Ижевск: Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2021. – С. 21–26.

4. *Роголев, Д. В.* К разрешимости и построению решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати / Д. В. Роголев // Актуальные проблемы науки и техники: материалы II Междунар. науч.-техн. конф. Сарапул, 19-21 мая 2022 г. / Минобрнауки Рос. Федерации. Сарапульский политехн. ин-т (филиал) ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова». – Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. – С. 104–108.

5. *Jódar, L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / L. Jódar // Applied Mathematics Letters, 1990. – Vol. 3. №. 4. – P. 9–12.

6. *Зубов, В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.

7. *Егоров, А. И.* Уравнения Риккати. – Москва : Физматлит, 2001. – 320 с.

8. *Ларин, В. Б.* Управление шагающими аппаратами. – Киев : Наук. думка, 1980. – 168 с.

9. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

10. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

11. *Красносельский, М. А.* Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – Москва : Наука, 1969. – 455 с.

12. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

Сведения об авторе

Дмитрий Владимирович Роголев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилёв), d-rogolev@tut.by