УДК 517.927.4:536.24

К решению задачи о тепловом пограничном слое в ламинарном течении

В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко

Выполнены расчеты толщины теплового пограничного слоя при ламинарном обтекании плоской нагретой пластины потоком охладителя, основанные как на точных численных, так и на приближенных решениях гидродинамического уравнения. Проведен сравнительный анализ погрешностей полученных результатов.

Ключевые слова: автомодельная задача, ламинарное течение, динамический и тепловой пограничные слои.

To the solution of the problem of the thermal boundary layer in laminar flow

V. N. Laptinskii, A. A. Romanenko

Calculations of the thickness of the thermal boundary layer in the laminar flow around a flat heated plate by a coolant flow are performed, based on both exact numerical and approximate solutions of the hydrodynamic equation. A comparative analysis of the errors in the obtained results was carried out.

Keywords: self-similar problem, laminar flow, dynamic and thermal boundary layers.

Решение задачи о тепловом пограничном слое в ламинарном течении находится из системы соотношений

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m\left(1 - f'^2\right) = 0, \tag{1}$$

$$\vartheta'' + \Pr\left[\frac{m+1}{2} f\, \vartheta' - \gamma\, f'\left(\vartheta - 1\right)\right] = 0, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$f(0) = f'(0) = 0, \;\; f'(\infty) = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta(0) = 0, \;\; \vartheta(\infty) = 1, \tag{4}$$

в которых приняты обозначения в основном из [1, 2].

За толщину теплового пограничного слоя принимается расстояние от стенки пластины, при котором безразмерная температура $\vartheta = \left(T_{\text{ст}} - T\right)/\left(T_{\text{ст}} - T_\infty\right)$ принимает значение $\vartheta \simeq 0{,}99$ и описывается формулой [1]

$$\delta_T(x) = \tilde{\eta}_T(m) \left(\frac{\nu}{C}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1-m}{2}}, \tag{5}$$

где $\tilde{\eta}_T(m)$ – значение безразмерной переменной η, определяемое в соответствии с принятой точностью $\vartheta \simeq 0.99$.

Рассмотрим случай, когда температура стенки $T_{\text{ст}} = T_\infty + a\,x^\gamma$ постоянная $(\gamma = 0)$; тогда уравнение (2) примет вид

$$\vartheta'' + \Pr\frac{m+1}{2} f\,\vartheta' = 0. \tag{6}$$

Решение краевой задачи для уравнения (6) с условиями (4) имеет вид

$$\vartheta = \int_0^\eta \exp\left[-\Pr\cdot\frac{m+1}{2}\int_0^\xi f(z)\,dz\right]d\xi \Bigg/ \int_0^\infty \exp\left[-\Pr\cdot\frac{m+1}{2}\int_0^\xi f(z)\,dz\right]d\xi. \tag{7}$$

На основе соотношения (7) изучим решение задачи (2), (4) при различных значениях параметра m и с различными числами Прандтля $\Pr$. При этом используются как точные численные решения задачи (1), (3), так и приближенные аналитические выражения для функции $f(z) \doteq f(z,m)$. В работах [3–5] приведены приближенные решения задачи (1), (2), основанные на итерационном алгоритме для $0 \le m \le 1$, а также более простые, но эффективные (в смысле простоты и точности) приближенные решения, основанные на различных разложениях $f(z)$ в ряд Маклорена, но для $m \in [0, 1/3)$.

Приближенные аналитические методы решения задач (особенно задач, содержащих несколько параметров) предпочтительнее численных с точки зрения качественного анализа и даже вычислений. В отличие от численных, аналитические методы решения могут служить основой для получения инженерных формул при решении соответствующих прикладных задач.

В работах [3, 4] предложен и развит метод построения приближенных аналитических решений задачи (1), (3), согласно которому функция $f(\eta,m)$ отыскивается в виде

$$f(\eta,m) = \int_0^\eta\left(\int_0^\tau e^{-\int_0^\sigma \varphi(s)\,ds}\,d\sigma\right)d\tau \Bigg/ \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau \varphi(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau, \quad 0 \le \eta < \infty. \tag{8}$$

Подход основан на использовании вспомогательной функции $\varphi = \varphi(\eta,m)$, представляющей собой решение задачи [5]

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi^2 - a\,f\varphi + (a - 2b)\,f', \tag{9}$$

$$\varphi(0) = \frac{b}{\lambda}, \tag{10}$$

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\int_0^\tau \varphi(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau - 1 = 0, \tag{11}$$

где $a = (m+1)/2$, $b = m$, $\lambda = f''(0,m)$.

Представляя решение (9), т. е. функцию $\varphi(\eta,m)$ в виде ряда Маклорена по переменной η, методом последовательного дифференцирования с учетом начальных условий в (3), (10) на основании (8) для функции $f(\eta,m)$ получаем приближение [6]

$$f(\eta,m)=\lambda\int_0^{\eta}(\eta-\tau)\exp\left(-\left(\frac{b}{\lambda}\tau+\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2\frac{\tau^2}{2!}+\left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3+(a-2b)\lambda\right)\frac{\tau^3}{3!}\right)\right)d\tau, \quad (12)$$

где значения λ вычисляются из уравнения

$$\lambda\int_0^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{b}{\lambda}\tau+\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2\frac{\tau^2}{2!}+\left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3+(a-2b)\lambda\right)\frac{\tau^3}{3!}\right)\right)d\tau-1=0, \quad (13)$$

достаточно простое и обеспечивает точность до 3 % для функции $f(\eta,m)$ и ее первых двух производных. Недостатком этого приближения является неполнота промежутка изменения m: $m\in[0,1/3)$.

В работе [7] этот недостаток устранен построением комплексного приближения для $f(\eta,m)$, которое применимо для $0\le m\le 1$; оно имеет вид

$$f(\eta,m)=\begin{cases}\lambda\displaystyle\int_0^{\eta}(\eta-\tau)\exp\left(-\left(\begin{gathered}\frac{b}{\lambda}\tau+\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2\frac{\tau^2}{2!}+\\+\left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3+(a-2b)\lambda\right)\frac{\tau^3}{3!}\end{gathered}\right)\right)d\tau, & m\in[0,1/3);\\[2ex] \lambda\displaystyle\int_0^{\eta}(\eta-\tau)\exp\left(-\left(\begin{gathered}\frac{b}{\lambda}\tau+\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2\frac{\tau^2}{2!}+\\+\left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3+(a-2b)\lambda\right)\frac{\tau^3}{3!}+\\+\left(6\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4-2b^2\right)\frac{\tau^4}{4!}\end{gathered}\right)\right)d\tau, & m\in[1/3,1].\end{cases} \quad (14)$$

При этом для $m\in[0,1/3)$ значения λ вычисляются из уравнения (13), а для $m\in[1/3,1]$ – из уравнения

$$\lambda\int_0^{\infty}\exp\left(-\left(\begin{gathered}\frac{b}{\lambda}\tau+\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2\frac{\tau^2}{2!}+\left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3+(a-2b)\lambda\right)\frac{\tau^3}{3!}+\\+\left(6\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4-2b^2\right)\frac{\tau^4}{4!}\end{gathered}\right)\right)d\tau-1=0. \quad (15)$$

В (13), (15) вместо ∞ принято $\eta^*=8.8$ [1].

Комплексное приближение (12)–(15) вполне приемлемо, поскольку позволяет строить решение на всем промежутке $0 \le m \le 1$, при этом с точностью до 3 % для $m \in [0, 1/3)$ и до 1 % – для $m \in [1/3, 1]$.

В таблице приведены результаты расчетов величины $\tilde{\eta}_T = \tilde{\eta}_T(m_i)$ с использованием точных численных решений задачи (1), (3) и приближенных решений основанных на приближении (12) – (15) для постоянной температуры стенки $T_{ст} = \text{const} = 100^\circ C$ $(\Pr = 1{,}75)$ и различных значений параметра m. Параметр m связан с углом φ атаки потока на пластину соотношением $m = \dfrac{\varphi}{\pi - \varphi}$ $\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le m \le 1\right)$.

Значения величины $\tilde{\eta}_T = \tilde{\eta}_T(m_i)$ для различных углов атаки

φ	$m = \dfrac{\varphi}{\pi - \varphi}$	$\tilde{\eta}_T(m_i)$		
		На основе численного решения (1), (3)	На основе приближения (12) – (15)	Относительные погрешности (%)
0	0	3.989	3.951	0.95
0.05π	0.0526…	3.752	3.725	0.72
0.1π	0.111…	3.559	3.540	0.53
0.15π	0.176…	3.392	3.378	0.41
0.2π	0.25	3.238	3.229	0.28
0.245π	0.324…	3.108	3.102	0.19
0.25π	0.333…	3.094	3.090	0.13
0.3π	0.428…	2.955	2.950	0.17
0.35π	0.538…	2.820	2.815	0.18
0.4π	0.666…	2.686	2.681	0.19
0.45π	0.818…	2.552	2.547	0.20
0.5π	1.0	2.416	2.410	0.24

Из таблицы видно, что относительные погрешности приближенных решений не превышают одного процента.

Список использованных источников и литературы

1. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов и др. ; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва : Высш. шк., 1979. – 495 с.

2. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя. – Москва : Наука, 1974. – 712 с.

3. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко / Ч. IV / Препринт. – Могилев : Ин-т технол. металлов НАН Беларуси, 2010. – № 20. – 25 с.

4. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко / Ч. IV / Препринт. – Могилев : Ин-т технол. металлов НАН Беларуси, 2011. – № 25. – 40 с.

5. *Лаптинский, В. Н.* Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72 – 93.

6. *Лаптинский, В. Н.* Об одном аналитическом методе построения решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы междунар. науч.-техн. конф. Сарапул, 22–24 мая 2021г. / Минобрнауки Рос. Федерации. Сарапульский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова». – Сарапул : СПИ, 2021. – С. 86–90.

7. *Лаптинский, В. Н.* Об одном аналитическом методе построения решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы междунар. науч.-техн. конф. Сарапул, 19–21 мая 2022 г. / Минобрнауки Рос. Федерации. Сарапульский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова». – Сарапул : СПИ, 2022. – С. 55–59.

Сведения об авторах

Валерий Николаевич Лаптинский, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика», Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилев), lavani@tut.by

Алексей Андреевич Романенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилев), romanenko1956@gmail.com