УДК 517.925

Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова (правосторонняя регуляризация)

А. Н. Бондарев

Установлены коэффициентные достаточные условия существования и единственности решения многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней регуляризации и соответствующей декомпозиции коэффициентов. Для построения решения используется алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений.

Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, многоточечная краевая задача, однозначная разрешимость, алгоритм, сходимость.

Constructive analysis of the multipoint boundary value problem for the Lyapunov matrix equation (right-sided regularization)

A. N. Bondarev

Coefficient sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution to the multipoint boundary value problem for the Lyapunov matrix equation are established on the basis of right-sided regularization and the corresponding decomposition of the coefficients. To construct the solution, an algorithm with the computational scheme of the classical method of successive approximations is used.

Keywords: lyapunov matrix equation, multipoint boundary value problem, unique solvability, algorithm, convergence.

Объектом исследования является краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)XA_2(t) + P_1(t)XP_2(t) + Q_1(t)XQ_2(t) + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < ... < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $A_j(t)$, $P_j(t)$, $Q_j(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы класса $C[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы, $j = 1, 2$.

В предлагаемой работе, являющейся продолжением, развитием и обобщением [1–3], задача (1), (2) исследуется в банаховом пространстве C непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in[0,\omega]}\|X(t)\|$ на основе декомпозиции (расщепления) матрицы $B(t)$ в виде [1, 3]

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t), \quad (3)$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются по определенной методике, например согласно [4, гл. 1]. Универсальным является расщепление, когда в качестве $B_1(t)$ принимается главная диагональ матрицы $B(t)$.

Используемая декомпозиция (3) для определенного типа краевых задач может быть более эффективной, чем левосторонняя. Это относится и к одновременной декомпозиции матриц $A(t)$, $B(t)$. Выбор декомпозиции зависит не только от алгебраических, но и от функциональных свойств этих матриц.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha_j = \max_t \|A_j(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\delta_j = \max_t \|P_j(t)\|, \quad \sigma_j = \max_t \|Q_j(t)\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|,$$

$$\nu_i = \|V_i\|, \quad q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha_1\alpha_2 + \delta_1\delta_2 + \sigma_1\sigma_2 + \beta_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i,$$

где $t \in [0, \omega]$, $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21], Φ – линейный матричный оператор типа [6], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t). \tag{4}$$

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим. Тогда при выполнении условия $q < 1$ задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последо вательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \le \frac{N}{1-q}. \tag{5}$$

Доказательство. С помощью методики, используемой в [1, 3], на основе (4) получим интегральную задачу

$$X(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A_1(\tau)X(\tau)A_2(\tau) + P_1(\tau)X(\tau)P_2(\tau) + Q_1(\tau)X(\tau)Q_2(\tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\} \right) V(t), \tag{6}$$

эквивалентную (1), (2).

Уравнение (6) относится к типу уравнений, рассмотренных в [1–3] (см. также [6]). Оператор Φ встречается при изучении краевых задач для многомерных дифференциальных систем; в случае двухточечных задач он сравнительно хорошо изучен. Для оператора Φ^{-1} в научной литературе в общем случае нет эффективного представления. Формальные способы построения Φ^{-1} предложены в работе [6].

Анализ уравнения (6) выполним на основе принципа сжимающих отображений [7], используя классический метод последовательных приближений

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A_1(\tau)X_{p-1}(\tau)A_2(\tau)+P_1(\tau)X_{p-1}(\tau)P_2(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q_1(\tau)X_{p-1}(\tau)Q_2(\tau)+X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\}\right)V(t),\ \ p=1,2,..., \quad (7)$$

где в качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t)\in C([0,\omega],\mathbb{R}^{n\times m})$. Легко видеть, что алгоритм (7) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_1^\infty\subset C^1([0,\omega],\mathbb{R}^{n\times m})$.

Несомненным достоинством каждого алгоритма такого типа является принадлежность классу допустимых функций всех последовательных приближений. Под допустимыми функциями понимаем функции класса $C^1([0,\omega],\mathbb{R}^{n\times m})$, удовлетворяющие условию (2).

Докажем, что функции $X_p(t)$ являются допустимыми. На основе (7) получим последовательно

$$\frac{dX_p(t)}{dt}=X_p(t)B_1(t)+\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)]V^{-1}(t)V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+(\Phi^{-1}\{\Phi[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+$$

$$+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)]V^{-1}(t)\})V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+$$

$$+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)]V^{-1}(t)V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+$$

$$+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)].$$

Стало быть, имеем соотношение

$$\frac{dX_p(t)}{dt}=X_p(t)B_1(t)+[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+$$

$$+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)]. \quad (8)$$

Используя (8), получим

$$[A_1(t)X_{p-1}(t)A_2(t)+P_1(t)X_{p-1}(t)P_2(t)+Q_1(t)X_{p-1}(t)Q_2(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)]dt=$$

$$=dX_p(t)-X_p(t)B_1(t)\,dt. \quad (9)$$

На основе (9) запишем формулу (7) в следующем виде:

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[dX_p(\tau)-X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)\,V_i\right\}\right)V(t). \quad (10)$$

В результате интегрирования по частям в (10) и последующих упрощений получим

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X_p(t_i) = 0.$$

Таким образом, все члены последовательности $\{X_p(t)\}_1^\infty$ относятся к классу допустимых функций.

Для изучения сходимости построенной последовательности будем использовать известный прием (см., например, [7, 8]), согласно которому рассматриваем ряд

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + ... + (X_p(t) - X_{p-1}(t)) + ... \tag{11}$$

Равномерную сходимость по $t \in [0, \omega]$ ряда (11) докажем на основе построения соответствующего мажорантного сходящегося числового ряда.

Из (7) имеем

$$X_{p+1}(t) - X_p(t) = \mathfrak{L}(X_p) - \mathfrak{L}(X_{p-1}), \;\; p = 1, 2, ..., \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}(Y) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A_1(\tau)Y(\tau)A_2(\tau) + P_1(\tau)Y(\tau)P_2(\tau) + Q_1(\tau)Y(\tau)Q_2(\tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + Y(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\} \right) V(t).$$

Выполнив оценки по норме в (12), получим рекуррентную оценку типа [1]

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \le q\|X_p - X_{p-1}\|_C, \;\; p = 1, 2, ... \tag{13}$$

Используя (13), имеем явную оценку

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \le q^p \|X_1 - X_0\|_C, \;\; p = 1, 2, ..., \tag{14}$$

при этом

$$\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C. \tag{15}$$

Для выбора начального приближения X_0 не существует универсальных методик. В каждой задаче это осуществляется индивидуально на основе анализа правой части (15).

Используя (14), нетрудно установить с помощью соответствующей методики (например, [7, 8]), что ряд (11), а значит и последовательность $\{X_r\}_0^\infty$, сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению интегрального уравнения (6), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \;\; r = 0, 1, 2, ... \tag{16}$$

На основе (16) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (7),

$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \tag{17}$$

Грубую, но явную, оценку для $\|X_1 - X_0\|_C$ можно получить на основе (15), поскольку

$$\|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C \le q\|X_0\|_C + N + \|X_0\|_C = (1+q)\|X_0\|_C + N.$$

Очевидно, приближение $X_0(t) \equiv 0$ существенно упрощает не только вычисление приближений по алгоритму (7), но и оценки (5), (16), (17), при этом

$$\|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C.$$

Выведем оценку для $\|\mathfrak{L}(0)\|_C$:

$$\|\mathfrak{L}(0)\|_C = \left\| \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau \, V_i \right\} \right) V(t) \right\| \le$$

$$\le \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \int_0^{\omega} \|F(\tau) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|V(t)\| \le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N. \qquad (18)$$

Получением оценки (18) доказательство теоремы завершено.

Список использованных источников и литературы

1. *Бондарев, А. Н.* Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова // Актуальные проблемы науки и техники : материалы II Междунар. науч.-техн. конф. Сарапул, 19–21 мая 2022 г. – Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. – С. 11–16.

2. *Бондарев, А. Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 423–427.

3. *Бондарев, А. Н.* Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2 (52). – С. 33–44.

4. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

5. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

6. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

7. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

8. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высш. шк., 1991. – 303 с.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Бондарев, старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилёв), alex-bondarev@tut.by