УДК 517.925

К анализу разрешимости и построению решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка

А. И. Кашпар

С помощью метода регуляризации выведены достаточные условия существования и единственности решения задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Предложен итерационный алгоритм построения решения с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача Валле-Пуссена, однозначная разрешимость, алгоритм построения решения.

On the analysis of solvability and the construction of a solution to the boundary problem de la Valle Poussin for a nonlinear matrix equation Lyapunov second order

A. I. Kashpar

Using the regularization method, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the de la Vallée-Poussin problem for a nonlinear matrix Lyapunov equation of the second order are derived. An iterative algorithm for constructing a solution using a computational scheme of the classical method of successive approximations is proposed.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem de la Vallée-Poussin, unique solvability, algorithm for constructing a solution.

Рассмотрим обобщение задачи [1–5]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{C}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $D = \left\{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I, \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1, \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\right\}$, $(\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt), i = 1,2;$ $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предположим также, что нелинейная функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ типа [6] удовлетворяет относительно $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); $0 < \tilde{\rho}_i \le \infty, I = [0, \omega]$.

В предлагаемой работе, являющейся продолжением и обобщением [1–5], на основе применения метода [7] задача (1), (2) изучается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_{t\in I}\|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, одна из норм, приведенных в [8, с. 21]. С помощью метода регуляризации выведены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах. Предложен итерационный алгоритм построения решения с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений.

Вместо задачи (1), (2) рассмотрим эквивалентную ей задачу

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y},$$
$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{3}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$h_1 = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0})\right\|,\ h_2 = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0})\right\|,\ h = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{F}(t,0,0)\right\|,$$

$$c_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{C}_i(t)\right\|,\ d_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{D}_i(t)\right\|, \lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|,\ \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|,$$

$$G = \left\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : t\in[0,\omega], \|\mathbf{X}\|\le\rho_1, \|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\right\},\ \tilde{G} = \left\{(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C\le\rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C\le\rho_2\right\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(d_1d_2 + L_1),\ p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(d_1d_2 + L_1),\ q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(c_1c_2 + L_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(c_1c_2 + L_2),\ \gamma = \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|,\ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix},\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix},\ \mathbf{H} = \begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau) = \mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau),$$

где $0<\rho_i<\tilde{\rho}_i$; $i=1,2$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}$), $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ ($\mathbf{V}(0)=\mathbf{E}$), $\mathbf{E}$ – единичная матрица; $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int\limits_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\quad\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)$; $\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор,

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t); \tag{5}$$

$L_i = L_i(\rho_1,\rho_2), (i=1,2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ в области G; $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – интегральные операторы

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int_0^\omega\Bigg(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\big(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{C}_2(s) +$$
$$+ \mathbf{D}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_2(s) + \mathbf{F}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\big)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\Bigg)d\tau\Bigg)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\Big(\int_0^{\omega}\Big(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\big(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{C}_2(s)+\mathbf{D}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_2(s)+ \tag{7}$$
$$+\mathbf{F}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\big)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\Big)d\tau\Big)\mathbf{V}(t).$$

Оператор $\mathbf{\Phi}$ имеет известный матричный аналог [1]. Способы построения $\mathbf{\Phi}^{-1}$ и оценки для $\left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|$ даны в [9].

С помощью метода регуляризации [7] задача (1), (2) сведена к эквивалентной интегральной задаче

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{8}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{9}$$

На основе применения модификации [7, § 3.4] обобщенного принципа сжимающих отображений [10, с. 94] доказана теорема.

Теорема. Пусть оператор $\mathbf{\Phi}$ однозначно обратим и выполнены условия

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \le \rho_1, \quad p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \le \rho_2, \tag{10}$$

$$p_1 + q_2 < 1. \tag{11}$$

Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области G, при этом справедлива оценка

$$\mathbf{Z} \le (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}. \tag{12}$$

В случае когда $\mathbf{A}(t) \equiv 0, \quad \mathbf{B}(t) \equiv 0, \quad \mathbf{C}_i(t) \equiv 0, \quad \mathbf{D}_i(t) \equiv 0,$ для соответствующей векторной задачи [11, с. 496] имеет место следствие, аналогичное [1, 2].

Для построения решения задачи (3), (4) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [12, с. 606])

$$\mathbf{X}_m(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}), \tag{13}$$

$$\mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}),\ m = 1,2,..., \tag{14}$$

где в качестве начального приближения $\big(\mathbf{X}_0(t),\mathbf{Y}_0(t)\big)$ принимаем произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\big(I,\mathbb{R}^{n\times n}\big)$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$.

Используя условие (5), можно показать, что все приближения, определяемые алгоритмом (13), (14), принадлежат множеству $\tilde{G}$. По методике [1] установлено, что эти приближения удовлетворяют условиям (2).

Далее изучим вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\{\mathbf{X}_m(t),\mathbf{Y}_m(t)\}_0^{\infty}$, построенной по алгоритму (13), (14). Используя известный прием (см., например, [13, с.54]), эти вопросы заменим эквивалентным вопросом сходимости матричных рядов

$$\mathbf{X}_0(t) + \big(\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0(t)\big) + \ldots + \big(\mathbf{X}_m(t) - \mathbf{X}_{m-1}(t)\big) + \ldots, \tag{15}$$

$$\mathbf{Y}_0(t) + \big(\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_0(t)\big) + \ldots + \big(\mathbf{Y}_m(t) - \mathbf{Y}_{m-1}(t)\big) + \ldots \tag{16}$$

Построим для рядов (15), (16) соответствующие мажорантные числовые ряды. На основе (13), (14) имеем

$$\mathbf{X}_{m+1}(t) - \mathbf{X}_m(t) = \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}), \tag{17}$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) - \mathbf{Y}_m(t) = \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1},\mathbf{Y}_{m-1}). \tag{18}$$

Выполнив оценки по норме в (17), (18), получим рекуррентные оценки

$$\mathbf{Z}_m \le \mathbf{P}\mathbf{Z}_{m-1} \le \mathbf{P}^m \mathbf{Z}_0, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

где $\mathbf{Z}_k = colon\left(\left\|\mathbf{X}_{k+1}(t) - \mathbf{X}_k(t)\right\|_C, \left\|\mathbf{Y}_{k+1}(t) - \mathbf{Y}_k(t)\right\|_C\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

С использованием оценки (19) можно доказать, что ряды (15), (16) сходятся равномерно по $t \in I$ к функциям $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$, представляющим собой решение системы интегральных уравнений (8), (9). На основе (19) получена оценка погрешностей для приближенных решений $\left(\mathbf{X}_m(t), \mathbf{Y}_m(t)\right)$ системы (8), (9)

$$\tilde{\mathbf{Z}}_m \le \left(\mathbf{E} - \mathbf{P}\right)^{-1} \mathbf{P}^m \mathbf{Z}_0,.$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}_m = colon\left(\left\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_m\right\|_C, \left\|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_m\right\|_C\right)$.

Аналогично имеем оценку области локализации решения задачи (3), (4), определяемую на основе алгоритма (13), (14),

$$\mathbf{Z} \le \tilde{\mathbf{Z}}_0 + \left(\mathbf{E} - \mathbf{P}\right)^{-1} \mathbf{Z}_0, \tag{20}$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}_0 = colon\left(\left\|\mathbf{X}_0\right\|, \left\|\mathbf{Y}_0\right\|\right)$.

Полагая $\mathbf{X}_0 = 0, \mathbf{Y}_0 = 0$, из оценки (20) имеем оценку (12), при этом $\tilde{\mathbf{Z}}_0 = 0, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{H}$.

При решении конкретных задач выбор начального приближения определяется на основе анализа структуры правой части уравнения (1).

Список использованных источников и литературы

1. *Кашпар, А. И.* Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – № 5. – С. 570–583.

2. *Кашпар, А. И.* Анализ разрешимости и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // Актуальные проблемы науки и техники : матер. II Междунар. науч.-техн. конф., посв. 70-летию ИМИ – ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова» (Сарапул, 19–21 мая 2022 г.). – Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. – С. 40–44.

3. *Кашпар, А. И*. Регуляризация задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А.И. Кашпар // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всероссийской конф. с междунар. участием, посв. памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова.- Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022.- С. 64-67.

4. *Кашпар, А. И.* Разрешимость и построение решения задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения –2022 : тез. докл. Междунар. науч. конф., Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г. – Ч. 1. – Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2022. – С. 56–59.

5. *Кашпар, А. И.* К разрешимости и построению решения задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // XXI Международная

научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023 : тез. докл. Междунар. науч. конф., Могилев, 23–27 мая 2023 г. – Ч. 1. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 76–78.

6. *Лаппо-Данилевский, И. А*. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва : ГИТТЛ, 1957. – 456 с.

7. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

8. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

9. *Кашпар, А. И.* О краевой задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2021. – № 2 (58). – С. 16–27.

10. Приближённое решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва : Наука, 1969. – 456 с.

11. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва : Мир, 1970. – 720 с.

12. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

13. *Бибиков, Ю. Н*. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва : Высш. шк., 1991. – 304 с.

Сведения об авторе

Александр Иванович Кашпар, начальник координационного центра межгосударственного образовательного учреждения высшего образования «Белорусско-Российский университет» (Республика Беларусь, г. Могилев), alex.kashpar@tut.by