ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1565–1569

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988.6+517.925.5

К АНАЛИЗУ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. В. Н. Лаптинский

Предложен конструктивный подход к доказательству существования решений операторных уравнений в банаховом пространстве. Этот подход применён к построению и анализу ограниченных на полуоси решений матричных уравнений Риккати, не содержащих линейного члена.

DOI: 10.31857/S0374064122110139, EDN: MCLWYC

Настоящая работа является продолжением исследований [1–5]. В ней развит операторный подход к изучению ограниченных на полуоси решений нелинейных матричных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$x = A(x), \tag{1}$$

где оператор A действует из банахова пространства X в банахово пространство X и определён в открытом шаре $S_\delta(0) \subset X$; 0 – нулевой элемент пространства X, $A(0) \neq 0$, $\delta > 0$.

Пусть оператор $A(x)$ непрерывно дифференцируем в $S_\delta(0)$, при этом выполняется оценка

$$\|A'(x)\| \leqslant a\|x\| \quad \text{для любого} \quad x \in S_\delta(0), \tag{2}$$

где $a(s) \geqslant 0$ – неубывающая в промежутке $[0,\delta)$ функция класса $C[0,\delta)$.

Примем следующие обозначения:

$$b = \|A(0)\|, \quad \varphi(\rho, b) = \int\limits_0^\rho (a(s) - 1)\, ds + b,$$

где $\rho \in [0,\delta)$.

Теорема. *Пусть уравнение $a(\rho) - 1 = 0$ имеет в промежутке $(0,\delta)$ решение ρ^*, и пусть выполнено неравенство*

$$\varphi(\rho^*, b) < 0. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) имеет в замкнутом шаре $\bar{S}_\rho(0)$ единственное решение x^* при любом

$$\rho \in [\rho_1(b), \rho^*), \tag{4}$$

где $\rho_1(b)$ – решение уравнения

$$\varphi(\rho, b) = 0. \tag{5}$$

Решение x^* может быть получено как предел последовательности (x_k), члены которой определяются классическим методом последовательных приближений.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим конструктивный способ (см. [1–5]), основанный на принципе Каччопполи–Банаха сжимающих отображений [6, с. 605].

На основании формулы Лагранжа (см., например, [7, с. 375]) имеем равенство

$$A(x) = A(0) + \int\limits_0^1 A'(\mu x)\, d\mu x. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$x = \int\limits_0^1 A'(\mu x)\, d\mu x + A(0).$$

Возьмём произвольный элемент $x \in \bar{S}_\rho(0)$. Затем, используя (2), найдём оценки по норме в (6) на шаре $\bar{S}_\rho(0)$:

$$\|A(x)\| \leqslant \left\| \int\limits_0^1 A'(\mu x)\, d\mu \right\| \|x\| + \|A(0)\| \leqslant \int\limits_0^1 \|A'(\mu x)\|\, d\mu \|x\| + b \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a\mu\|x\|\, d\mu\|x\| + b \leqslant \int\limits_0^1 a\mu\rho\, d\mu\rho + b = \int\limits_0^\rho a(s)\, ds + b.$$

Рассмотрим уравнение (5). Из соотношения $\varphi(0,b) > 0$ и условия (3) следует, что оно имеет решение в промежутке $(0,\rho^*)$.

В промежутке $[0,\rho^*)$ справедливо неравенство

$$\frac{d\varphi(\rho,b)}{d\rho} \equiv a(\rho) - 1 < 0.$$

Поскольку функция $\varphi(\rho,b)$ непрерывна на отрезке $[0,\rho^*]$, то уравнение (5) имеет в промежутке $(0,\rho^*)$ единственное решение $\rho_1 = \rho_1(b)$. Из соотношения

$$\varphi(\rho,b) = \int\limits_{\rho_1}^\rho (a(s)-1)\, ds$$

видно, что для значений ρ, принадлежащих области (4), выполняются неравенства

$$\int\limits_0^\rho (a(s)-1)\, ds + b \leqslant \rho, \tag{7}$$

$$a(\rho) < 1, \tag{8}$$

которыми воспользуемся для анализа сжимаемости оператора A. Из уравнения (1) имеем для любых $x \in \bar{S}_\rho(0)$, $y \in \bar{S}_\rho(0)$ соотношение

$$A(x) - A(y) = \int\limits_0^1 A'(y + \mu(x-y))\, d\mu(x-y),$$

выполнив в котором оценки по норме, получим последовательно

$$\|A(x) - A(y)\| \leqslant \int\limits_0^1 \|A'(y+\mu(x-y))\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant \int\limits_0^1 a\|(1-\mu)y + \mu x\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a(1-\mu)\|y\| + \mu\|x\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant a(\rho)\|x-y\|.$$

На основании неравенства (8) заключаем, что оператор A является сжимающим на шаре $\bar{S}_\rho(0)$. Для завершения доказательства этой части теоремы достаточно сослаться на теорему в работе [6, с. 605].

Для построения решений уравнения (1) воспользуемся известным алгоритмом (см., например, [6, с. 605])

$$x_{n+1} = A(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где x_0 – произвольный элемент из $\bar{S}_\rho(0)$. В силу (7) нетрудно показать, что все члены последовательности (x_k) принадлежат $\bar{S}_\rho(0)$.

Далее получим оценку, характеризующую быстроту сходимости последовательности (x_k) к решению x^*. Из (9) имеем

$$x_{k+1} - x_k = A(x_k) - A(x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

На основании формулы Лагранжа соотношение (10) можно записать в следующем виде:

$$x_{k+1} - x_k = \int\limits_0^1 A'(x_{k-1} + \mu(x_k - x_{k-1}))\, d\mu(x_k - x_{k-1}). \tag{11}$$

Выполним в (11) оценки по норме

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \int\limits_0^1 \|A'(x_{k-1} + \mu(x_k - x_{k-1}))\|\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a\|(1-\mu)x_{k-1} + \mu x_k\|\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a((1-\mu)\|x_{k-1}\| + \mu\|x_k\|)\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant a(\rho)\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant a(\rho)\|x_k - x_{k-1}\| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Используя (12), на основании (7), (8) нетрудно доказать, что последовательность (x_k) сходится к элементу $x^* \in \bar{S}_\rho(0)$, при этом справедлива оценка

$$\|x^* - x_k\| \leqslant \frac{a^k}{1-a}\|x_1 - x_0\| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Замечание 1. Очевидно, в доказанной теореме вместо величины $b = \|A(0)\|$ можно принять оценку для $\|A(0)\|$.

Замечание 2. Уравнение $\alpha(\rho) - 1 = 0$ имеет единственное решение в промежутке $(0, \delta)$ при выполнении соотношения $\alpha(s_0) < 1 < \alpha(s_1)$, где $0 \leqslant s_0 < s_1 < \delta$.

С помощью теоремы изучим вопрос существования ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ решений матричного уравнения Риккати (см. [8; 9, с. 165; 10, с. 158] и др.)

$$\frac{dY}{dt} = YP(t)Y + Q(t), \tag{14}$$

где $P(t)$, $Q(t)$ – непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}_+$ $n \times n$-матрицы, подчинённые условиям

$$\tilde{p} \equiv \int\limits_0^\infty \|P(\tau)\|\, d\tau < \infty, \quad \tilde{q} \equiv \sup_{t \geqslant 0} \|\tilde{Q}(t)\| < \infty,$$

здесь $\tilde{Q}(t) = \int_0^t Q(\tau)\, d\tau$.

Обозначим

$$\|Y\|_C \equiv \sup_{t\geqslant 0} \|Y(t)\|,$$

где $C = \mathfrak{B}(n)$ – конечномерная банахова алгебра матриц-функций, непрерывных и ограниченных на полуоси, $\|\cdot\|$ – определённая норма матриц, например, любая из норм, приведённых в [11, с. 21].

Для уравнения (14) будем исследовать задачу Коши с условием

$$Y(0) = \Lambda. \tag{15}$$

Вместо задачи (14), (15) рассмотрим эквивалентное ей интегральное уравнение

$$Y(t) = \Lambda + \int\limits_0^t Y(\tau)P(\tau)Y(\tau)\,d\tau + \tilde{Q}(t). \tag{16}$$

Исследуем разрешимость этого уравнения в $\mathfrak{B}(n)$; сходимость последовательности означает равномерную сходимость на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Для всякой $n\times n$-матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \leqslant \rho$, имеем

$$\left\|\int\limits_0^t X(\tau)P(\tau)X(\tau)\,d\tau + \Lambda + \tilde{Q}(t)\right\|_C \leqslant \tilde{p}\rho^2 + \varepsilon + \tilde{q},$$

где $\varepsilon = \|\Lambda\|$.

Аналогично получим оценку

$$\left\|\int\limits_0^t (X(\tau)P(\tau)X(\tau) - Y(\tau)P(\tau)Y(\tau))\,d\tau\right\|_C \leqslant 2\tilde{p}\rho\|X - Y\|_C,$$

где $\|X\|_C \leqslant \rho$, $\|Y\|_C \leqslant \rho$.

Применительно к уравнению (16) имеем

$$a(\rho) = 2\tilde{p}\rho, \quad \varphi(\rho, b) = \tilde{p}\rho^2 - \rho + b,$$

где $b = \varepsilon + \tilde{q}$.

Так как $\rho^* = 1/(2\tilde{p})$, то условие (3) примет вид

$$\varphi(\rho^*, b) = b - \frac{1}{4\tilde{p}} < 0.$$

Из доказанной теоремы следует, что при выполнении условия

$$\tilde{q} - \frac{1}{4\tilde{p}} < 0$$

задача об ограниченных на полуоси решениях уравнения (14) однозначно разрешима для начальных значений, принадлежащих области

$$\|\Lambda\| < \frac{1}{4\tilde{p}} - \tilde{q},$$

при этом

$$\rho_1(\varepsilon) \leqslant \rho < \frac{1}{4\tilde{p}},$$

здесь

$$\rho_1(\varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tilde{p}(\varepsilon + \tilde{q})}}{2\tilde{p}} > \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tilde{p}\tilde{q}}}{2\tilde{p}} = \rho_1(0).$$

Для построения решения уравнения (16) может быть использован алгоритм (9) вместе с оценкой (13).

Замечание 3. Приведённая теорема сформулирована и доказана в терминах функций $a(s)$, $\varphi(\rho, b)$; в этом состоит её конструктивность, что проиллюстрировано на примере уравнения Риккати (и ранее в работах [1–5]), для которого получены коэффициентные достаточные условия существования ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+$ решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях уравнения Риккати // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1995. № 2. С. 12–16.
2. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 131–132.
3. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 275–277.
4. *Лаптинский В.Н.* К задаче об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных систем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 13–15.
5. *Лаптинский В.Н.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 205–210.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
7. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
8. *Забрейко П.П., Лаптинский В.Н.* Принцип неподвижной точки и нелокальные теоремы о разрешимости для существенно нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 1. С. 5–9.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
10. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М., 2001.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Белорусско-Российский университет,
г. Могилёв

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.