

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности
1-37 01 02 «Автомобилестроение (по направлениям)»
дневной формы обучения*



Могилев 2023

УДК 629.113
ББК 39.33
М33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины»
«31» августа 2023 г., протокол № 1

Составитель д-р техн. наук, проф. В. П. Тарасик

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Изложена методика выполнения математического моделирования и решения задач функционального проектирования механизмов автомобиля.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Ответственный за выпуск	И. В. Лесковец
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

Введение	4
Практическое занятие № 1. Динамическая модель объекта проектирования	5
Практическое занятие № 2. Математическая модель объекта проектирования	9
Практическое занятие № 3. Математические модели воздействий внешней среды на объект проектирования	17
Практическое занятие № 4. Определение параметров математической модели и решение системы дифференциальных уравнений	23
Практическое занятие № 5. Планирование эксперимента и получение регрессионной модели объекта проектирования	30
Практическое занятие № 6. Оптимизация параметров объекта проектирования и оценка качества переходных процессов	39
Список литературы	42

Введение

Цель проведения практических занятий – приобретение студентами навыков математического моделирования и опыта решения задач функционального проектирования механизмов автомобиля.

Каждый студент получает индивидуальное задание на проведение анализа и проектирования конкретного механизма автомобиля соответствующего типа и категории.

Для выполнения задания необходимо подготовить исходные данные по параметрам и характеристикам автомобиля, используя справочную литературу, стандарты, нормативные материалы, каталоги, проспекты, учебники и учебные пособия [1–10]. Подготовка исходных данных проводится каждым студентом самостоятельно и выполняется до начала проведения практических занятий.

Основные этапы выполнения работы:

- построение динамической модели проектируемого механизма;
- определение параметров элементов динамической модели;
- составление математической модели;
- моделирование функций внешних воздействий на объект проектирования;
- определение параметров системы дифференциальных уравнений модели;
- оценка устойчивости динамической системы;
- выбор начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений;
- обоснование и выбор показателей качества и эффективности объекта проектирования;
- планирование и проведение вычислительного эксперимента;
- построение регрессионной модели проектируемого механизма;
- оптимизация параметров механизма;
- оценка показателей качества и эффективности объекта проектирования.

В качестве примера объекта проектирования в данных методических рекомендациях используется механическая трансмиссия автомобиля. Для выполнения предусмотренных проектных работ рекомендуется применять средства программной среды *MATLAB* и разработанные программы на кафедре «Транспортные и технологические машины».

В методических рекомендациях к практическим занятиям сохраняется сквозная нумерация рисунков, формул и таблиц, что позволяет делать ссылки на них в различных разделах текста. Результаты исследований и разработок используются при выполнении курсовой работы по дисциплине «Математическое моделирование автомобилей».

Практические занятия выполняются студентами в компьютерных классах университета. Перед началом выполнения планируемого цикла работ преподаватель знакомит студентов с правилами охраны труда и оформляет протокол проверки знаний этих правил. Контроль за выполнением студентами правил охраны труда осуществляет преподаватель, проводящий практические занятия.

Практическое занятие № 1. Динамическая модель объекта проектирования

Цель занятия: освоение методики построения динамической модели объекта проектирования.

1 Подготовка исходных данных.

Для выполнения задания необходимы следующие данные: полная масса автомобиля m_a ; радиус качения колеса $r_{к0}$; максимальный вращающий момент двигателя $M_{e\max}$; передаточные числа механизмов трансмиссии (коробки передач $u_{кпi}$, $i = \overline{1, n}$; главной передачи u_0 ; колёсной передачи $u_{кол}$).

2 Динамическая модель объекта проектирования.

В качестве объекта проектирования будем рассматривать механическую трансмиссию автомобиля.

Динамическая модель трансмиссии должна учитывать инерционные свойства маховика двигателя, ведомых дисков сцепления, вращающихся деталей коробки передач, барабана стояночного тормоза, дифференциала, ведущих и ведомых колес, поступательно движущейся массы автомобиля. Принимаются во внимание упругие и диссипативные свойства механизмов трансмиссии, трансформаторные элементы (зубчатые зацепления механизмов трансмиссии), параметры и характеристики сцеплений. Осуществляется моделирование процесса включения сцепления автомобиля. Учитывается также сцепление ведущих колес с опорной поверхностью дороги [1, 2].

Простейшая динамическая модель трансмиссии представлена на рисунке 1. Она содержит пять инерционных элементов (вращающихся сосредоточенных масс), два упругих элемента, два трансформаторных элемента и два фрикционных элемента.

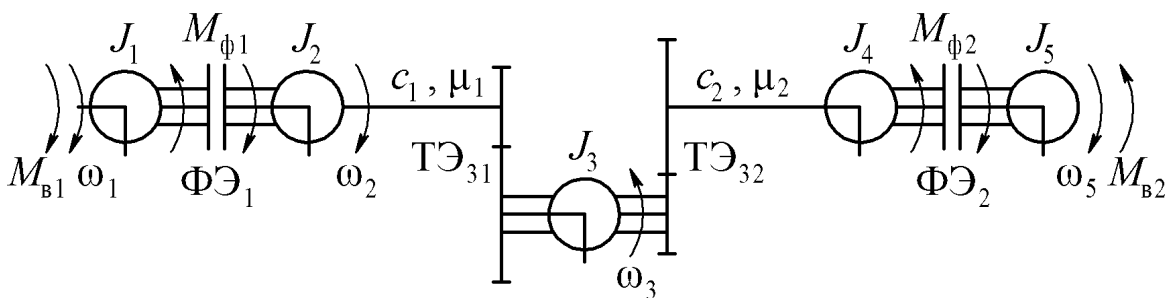


Рисунок 1 – Динамическая модель трансмиссии автомобиля

Сосредоточенная масса с моментом инерции J_1 отображает инерционные свойства маховика двигателя, а также связанных с ним вращающихся масс двигателя и ведущей части сцепления; сосредоточенная масса J_2 – инерционные свойства ведомого диска сцепления и связанных с ним вращающихся масс коробки передач; сосредоточенная масса J_3 учитывает массы барабана стояночного тормоза, главной передачи и дифференциала. Сосредоточенная масса с

моментом инерции J_4 отображает инерционные свойства колес и колесных тормозных механизмов, а масса J_5 эквивалентна поступательно движущейся массе автомобиля и ведомых колес.

Наибольшие угловые деформации характерны для первичного вала коробки передач, карданной передачи, полуосей и шин ведущих колес. Упругий элемент с коэффициентом жесткости c_1 учитывает деформируемость первичного вала коробки передач и карданной передачи; упругий элемент с параметром c_2 – упругие свойства полуосей и шин. Одновременно вводятся диссипативные элементы с параметрами μ_1 и μ_2 , рассеивающие энергию в соответствующих механизмах трансмиссии.

Трансформаторный элемент $TЭ_{31}$ отображает преобразование параметров потока энергии (угловой скорости и вращающего момента) коробкой передач, а трансформаторный элемент $TЭ_{32}$ – главной передачей. Параметры $TЭ_{31}$ (передаточное число и КПД) обозначены соответственно u_{31} и η_{31} , а параметры $TЭ_{32}$ – u_{32} и η_{32} .

Сцепление автомобиля обозначено $\PhiЭ_1$, а сцепление ведущих колес с дорогой – $\PhiЭ_2$.

Воздействие внешней среды на объект моделирования в рассматриваемом случае осуществляют источники воздействий типа потенциала M_{B1} и M_{B2} . Источником потенциала M_{B1} является двигатель автомобиля, реализующий вращающий момент $M_e = f(\omega_d)$, где ω_d – угловая скорость коленчатого вала. Источник потенциала M_{B2} отображает суммарное сопротивление движению автомобиля.

Для отображения состояния сосредоточенных масс в фазовом пространстве введены фазовые координаты типа потока $\omega_1 \dots \omega_5$ (угловые скорости сосредоточенных масс $J_1 \dots J_5$). К координатам типа потока также относятся геометрические координаты сосредоточенных масс. В данном случае это углы их поворота $\varphi_1 \dots \varphi_5$.

3 Определение параметров элементов динамической модели объекта проектирования.

Определению подлежат параметры инерционных элементов $J_1 \dots J_5$, упругих элементов c_1, c_2 , диссипативных элементов μ_1, μ_2 и трансформаторных элементов $u_{31}, u_{32}, \eta_{31}, \eta_{32}$. Методика обоснования выбора параметров элементов динамической модели объекта проектирования изложена в [2, с. 89–93].

Значение J_1 соответствует моменту инерции двигателя, определяемому в основном величиной момента инерции его маховика. При отсутствии данных значение J_1 вычисляют по эмпирическим зависимостям:

– для бензиновых двигателей грузовых автомобилей

$$J_1 = (0,0025 \dots 0,0030) M_{e \max}; \quad (1)$$

– для бензиновых двигателей легковых автомобилей

$$J_1 = (0,0018 \dots 0,0020) M_{e \max}; \quad (2)$$

– для дизельных двигателей грузовых автомобилей

$$J_1 = (0,0055 \dots 0,0065) M_{e \max}, \quad (3)$$

где $M_{e \max}$ – максимальный вращающий момент двигателя, Н·м.

Значение J_2 соответствует приведенному моменту инерции ведомых дисков сцепления и вращающихся деталей коробки передач. Приближенная величина параметра J_2 может быть получена по эмпирической зависимости

$$J_2 = (0,08 \dots 0,12) J_1. \quad (4)$$

Значение J_5 зависит от массы автомобиля m_a и моментов инерции колес и вычисляется по формуле

$$J_5 = m_a r_k^2 + \sum_{i=1}^n J_{ki}, \quad (5)$$

где m_a – масса автомобиля, кг;

r_k – радиус качения ведущих колес, м;

J_{ki} – момент инерции i -го колеса относительно его оси вращения, кг·м²;

n – количество колес автомобиля.

При отсутствии данных по J_{ki} вычисляют приведенную массу автомобиля $m_{a.пр}$ по формуле

$$m_{a.пр} = \delta_{п.м} m_a, \quad (6)$$

где $\delta_{п.м}$ – коэффициент приведенной массы, учитывающий влияние моментов инерции колес на кинетическую энергию автомобиля.

Значение $\delta_{п.м}$ приближенно может быть вычислено по эмпирической формуле

$$\delta_{п.м} = 1 + \delta_1. \quad (7)$$

Принимают $\delta_1 = 0,03 \dots 0,05$. С учетом $\delta_{п.м}$ формула (5) преобразуется к виду

$$J_5 = \delta_{п.м} m_a r_k^2. \quad (8)$$

Значение J_4 можно принять из соотношения $J_4 = (0,10 \dots 0,15) J_5$.

Величина J_3 зависит от конструкции механизмов трансмиссии и от номера включаемой передачи. В первом приближении можно принять

$$J_3 = (0,15 \dots 0,19) J_1. \quad (9)$$

Коэффициенты жесткости упругих элементов трансмиссии c_1 и c_2 можно приближенно найти из следующих соотношений:

– для автомобилей с бензиновыми двигателями

$$c_1 = (20 \dots 25) M_{e \max}; \quad c_2 = (150 \dots 200) M_{e \max}; \quad (10)$$

– для автомобилей с дизельными двигателями

$$c_1 = (22 \dots 28) M_{e \max}; \quad c_2 = (200 \dots 250) M_{e \max}. \quad (11)$$

Определение параметров трансформаторных элементов u_{31}, u_{32} , η_{31}, η_{32} осуществляется по кинематической схеме трансмиссии, которую необходимо привести в проекте. Значения u_{31} и η_{31} относятся к коробке передач, а u_{32} и η_{32} – к главной передаче. Их вычисление выполняется по известным формулам [5].

Для нахождения коэффициентов демпфирования (сопротивления) диссипативных элементов μ_1 и μ_2 используются парциальные системы, приведенные на рисунке 2.

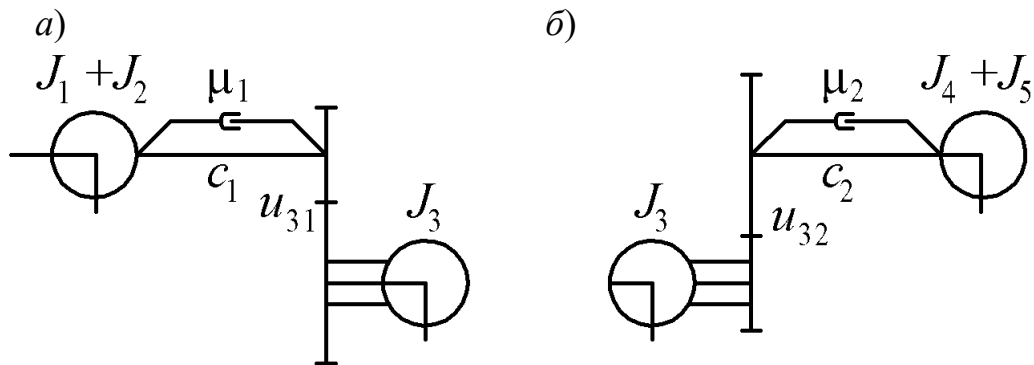


Рисунок 2 – Парциальные системы

Значение μ_i вычисляется по формуле

$$\mu_i = 2\gamma_i J_i^* \omega_{\Pi i}, \quad (12)$$

где γ_i – относительный коэффициент затухания колебаний (безразмерная величина);

J_i^* – приведенный момент инерции, кг·м²;

$\omega_{\Pi i}$ – парциальная частота, рад/с.

Приведенные моменты инерции J_1^* и J_2^* для рассматриваемых парциальных систем находят по формулам:

$$J_1^* = \frac{(J_1 + J_2) J_3 / u_{31}^2}{J_1 + J_2 + J_3 / u_{31}^2}; \quad (13)$$

$$J_2^* = \frac{J_3 u_{32}^2 (J_4 + J_5)}{J_3 u_{32}^2 + J_4 + J_5}. \quad (14)$$

Парциальные частоты $\omega_{\pi 1}$ и $\omega_{\pi 2}$ получают по формуле

$$\omega_{\pi i} = \sqrt{\frac{c_i}{J_i^*}}. \quad (15)$$

При определении μ_i можно принять следующие значения γ_i : $\gamma_1 = 0,2$; $\gamma_2 = 0,6$.

Значения параметров всех элементов динамической модели с отображением их размерностей сводятся в таблицу.

Контрольные вопросы

- 1 Определение понятия структуры технического объекта.
- 2 Определение понятия параметра технического объекта.
- 3 Классификация параметров технического объекта.
- 4 Определение динамической модели технического объекта.
- 5 Методы представления структуры технического объекта на макроуровне.
- 6 Классификация элементов динамической модели технического объекта.
- 7 Физические свойства технического объекта, отображаемые элементами динамической модели.
- 8 Параметры элементов динамической модели поступательной и вращательной механической системы. Единицы измерения параметров.
- 9 Методика определения параметров диссипативных элементов системы.

Практическое занятие № 2. Математическая модель объекта проектирования

Цель занятия: освоение методики построения математической модели объекта проектирования.

1 Режимы функционирования объекта проектирования.

При функциональном проектировании рассматривают два основных режима функционирования технических объектов – статический и динамический. Различаются они поведением во времени фазовых координат типа потока и типа потенциала. Координаты типа потока определяют положения сосредоточенных масс в фазовом пространстве и характер их движения. В механических системах они представляют собой геометрические координаты и скорости. Координаты типа потенциала (силы, вращающие моменты) характеризуют взаимодействие безынерционных элементов динамической модели объекта (упругих, диссипативных, трансформаторных, фрикционных) с сосредоточенными массами.

Статический режим представляет собой состояние покоя либо равномерное движение технического объекта. Это возможно при постоянных внешних воздействиях. При этом фазовые координаты остаются также постоянными, за исключением геометрических координат, которые при равномерном движении

плавно изменяются. Математической моделью статического режима является система алгебраических уравнений.

Динамический режим характеризуется изменением во времени фазовых координат типа потока и типа потенциала. Математическая модель этого режима представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переходный процесс – частный случай динамического режима, при котором происходит переход технического объекта из исходного установившегося статического состояния в конечное. График переходного процесса называют *переходной характеристикой*. Переходная характеристика позволяет определить выходные параметры проектируемого объекта, характеризующие показатели его эффективности и качества процессов функционирования.

2 Математические модели для исследования переходных процессов.

При моделировании трансмиссии автомобиля применяются математические модели в графической форме и в инвариантной в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, хорошо приспособленной к использованию численных методов интегрирования.

Графические формы математических моделей – динамическая модель и ориентированный граф (орграф). Графические модели позволяют наглядно представить структуру объекта и его физические свойства, а также взаимодействие с внешней средой. Их использование даёт возможность существенно облегчить получение системы дифференциальных уравнений.

Построение графических моделей начинают с выявления количества сосредоточенных масс исследуемой системы, определяющих число её степеней свободы. При этом сложные движения твёрдых тел раскладывают на простейшие виды движения – поступательное и вращательное.

Рассмотрим процесс построения математической модели трансмиссии автомобиля.

Математическая модель представляет собой совокупность топологических и компонентных уравнений и включает описание воздействий внешней среды на трансмиссию.

Топологические уравнения описывают структуру объекта и условия динамического равновесия сосредоточенных масс динамической модели. Сосредоточенные массы находятся под воздействием потенциалов взаимодействующих с ними элементов динамической модели и потенциалов источников внешней среды.

Компонентные уравнения дают описания физических свойств элементов динамической модели объекта моделирования.

Характерной особенностью моделируемой динамической системы является переменность ее структуры, обусловленная наличием фрикционных элементов, которые могут находиться в одном из двух возможных состояний: состоянии скольжения или в замкнутом состоянии. Кроме того, замыкание сцепления ФЭ₁ приводит к уменьшению числа степеней свободы системы на единицу. При этом изменяется взаимодействие элементов динамической системы, отображаемое фазовыми координатами типа потенциала. Это внутренние потенциалы системы (моменты упругих и диссипативных элементов, моменты трения фрикционных элементов).

3 Орграф моделируемой системы.

Структуру и взаимодействие элементов динамической системы удобно отображать посредством орграфа, узлы которого соответствуют сосредоточенным массам динамической модели объекта. Воздействия на сосредоточенные массы отображают на орграфе посредством соответствующих ветвей. Различают ветви элементов динамической модели объекта и ветви источников внешних воздействий.

Орграф моделируемой системы представлен на рисунке 3. Ветви источников внешних воздействий обозначены M_{B1} и M_{B2} . Это источники типа потенциала. Ветви элементов динамической модели обозначены их параметрами: ветви инерционных элементов – $J_1^* \dots J_5^*$; упругих – c_1, c_2 (или c_1^*, c_2^*); диссипативных – μ_1, μ_2 (или μ_1^*, μ_2^*); фрикционных – $M_{\phi 1}^*, M_{\phi 2}^*$. Наличие трансформаторных элементов $TЭ_{31}, TЭ_{32}$ и их взаимодействия с сосредоточенными массами, упругими и диссипативными элементами отмечаются выносными линиями, что означает их взаимное контактирование. Направление передачи потоков энергии изображается стрелками на ветвях соответствующих элементов. Нулевой узел орграфа соответствует внешней среде.

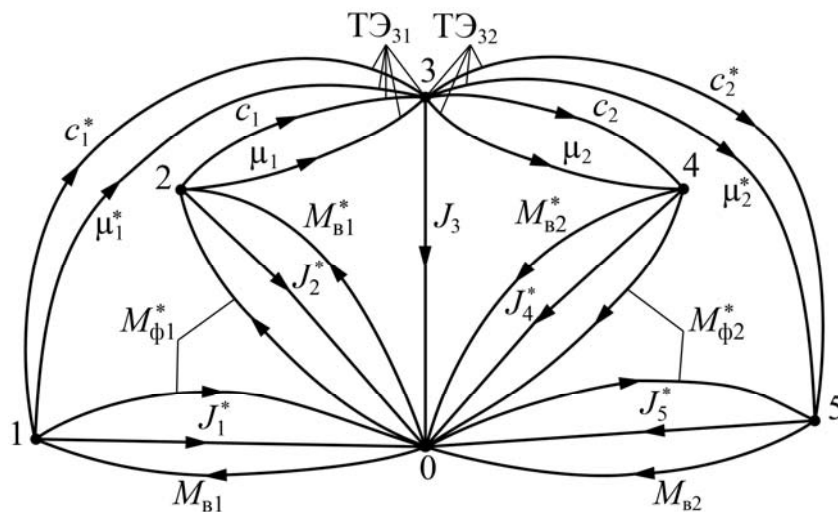


Рисунок 3 – Орграф динамической модели трансмиссии

Если воздействие какого-либо потенциала на данную сосредоточенную массу может возникать или исчезать при изменении режима фрикционного элемента, то такая ветвь называется *виртуальной*, а ее потенциал на орграфе помечается звездочкой. Например, при скольжении сцепления $\Phi Э_1$ на сосредоточенную массу 1 действуют потенциал внешнего воздействия M_{B1} , потенциал фрикционного элемента $M_{\phi 1}^*$ и потенциал $M_{и1}^*$ инерционного элемента, параметром которого является J_1^* , а после его замыкания – потенциалы M_{B1} , $M_{и1}^*$ и потенциал M_{y1}^* первого упругого элемента с параметром c_1^* (см. рисунки 1 и 3). Следова-

тельно, после включения сцепления $\Phi\mathcal{E}_1$ вместо момента трения фрикционного элемента $M_{\Phi 1}^*$ на сосредоточенную массу 1 действует момент первого упругого элемента M_{y1}^* , поэтому на орграфе параметр этого элемента помечен звездочкой c_1^* . Кроме того, изменяется также параметр инерционного элемента, поэтому он тоже помечен звездочкой J_1^* . Действительно, на режиме скольжения сосредоточенные массы 1 и 2 разделены сцеплением $\Phi\mathcal{E}_1$, и параметры инерционных элементов соответствуют J_1 и J_2 , а после замыкания сцепления обе сосредоточенные массы объединяются, и параметры инерционных элементов оказываются одинаковыми, равными сумме параметров обоих элементов, т. е. $J_1^* = J_2^* = J_1 + J_2$.

Аналогично представлено на орграфе взаимодействие элементов с сосредоточенными массами J_4 и J_5 при отображении сцепления ведущих колёс автомобиля с дорогой.

4 Топологические и компонентные уравнения.

Орграф позволяет легко и просто составить математическую модель технического объекта.

Для получения *топологических* уравнений используется *принцип Даламбера*, представляющий собой обобщение третьего закона Ньютона. Этот принцип относится к материальной точке. При поступательном движении твёрдых тел механической системы принцип Даламбера имеет следующую формулировку: *геометрическая сумма всех сил, приложенных к материальной точке (сосредоточенной массе), включая силу инерции, равна нулю*. Следовательно, система сил, действующих на сосредоточенную массу, взаимно уравновешена. Уравнение равновесия сил

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad (16)$$

где \vec{F}_i – вектор i -й силы;

n – количество сил, приложенных к сосредоточенной массе, включая её силу инерции $\vec{F}_и$.

При вращательном движении сосредоточенной массы в формуле (16) вместо силы \vec{F}_i будет вращающий момент \vec{M}_i :

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0. \quad (17)$$

Сосредоточенная масса динамической модели объекта моделирования является аналогом материальной точки (или твёрдого тела с одной степенью свободы). Следовательно, число степеней свободы динамической модели равно количеству выделенных сосредоточенных масс. Для каждой сосредоточенной

массы орграфа составляется топологическое уравнение. При этом принимается следующее правило определения знаков векторов сил \vec{F}_i или моментов \vec{M}_i : если i -й элемент динамической модели подводит энергию к данной сосредоточенной массе, его потенциал полагаем положительным, а если отводит, – отрицательным. Направление передачи потока энергии, как отмечалось выше, на ветвях орграфа указано стрелками. При использовании принятого правила знаков в формулах (16) и (17) силы и моменты записываются в скалярной форме, т. е. только их модули с соответствующими знаками.

В качестве примера составим топологическое уравнение движения третьей сосредоточенной массы орграфа, представленного на рисунке 3. Эта масса находится под воздействием моментов упругих элементов M_{y1} , M_{y2} с параметрами c_1, c_2 , диссипативных элементов $M_{д1}$, $M_{д2}$ с параметрами μ_1, μ_2 и момента инерционного элемента $M_{и3}$ с параметром J_3 . На основе принципа Даламбера получаем искомое топологическое уравнение:

$$M_{y1} + M_{д1} - M_{y2} - M_{д2} - M_{и3} = 0. \quad (18)$$

Следует иметь в виду, что для увеличения кинетической энергии инерционного элемента он потребляет энергию, передаваемую системой, что отображается в орграфе направлением стрелки на ветви этого элемента, обозначенной своим параметром J_3 .

Для вычисления потенциалов инерционных, упругих и диссипативных элементов используются **компонентные уравнения**. Потенциалы этих элементов представляют собой их реакции на внешнее воздействие. При поступательном движении сосредоточенных масс потенциалом инерционного элемента является сила инерции $\vec{F}_и$, упругого – сила упругости $\vec{F}_у$, диссипативного – сила трения $\vec{F}_д$. Направления этих сил противоположны направлению действующей на соответствующий элемент внешней силы.

Компонентные уравнения инерционных, упругих и диссипативных элементов в векторной форме для системы с вращательным движением сосредоточенных масс имеют вид:

$$\vec{M}_{иi} = -J_i \vec{\varepsilon}_i = -J_i \frac{d\vec{\omega}_i}{dt}; \quad \vec{M}_{yj} = -c_j \Delta \vec{\varphi}_j; \quad \vec{M}_{дk} = -\mu_k \Delta \vec{\omega}_k, \quad (19)$$

где $\vec{\omega}_i, \vec{\varepsilon}_i$ – векторы угловой скорости и углового ускорения i -й сосредоточенной массы;

$\Delta \vec{\varphi}_j$ – вектор угловой деформации j -го упругого элемента;

$\Delta \vec{\omega}_k$ – вектор угловой скорости деформации k -го упругого элемента.

В уравнение (18) подставляются модули потенциалов M_{y1} , M_{y2} , $M_{д1}$, $M_{д2}$ и $M_{и3}$. Компонентные уравнения в этом случае имеют следующий вид:

$$M_{и3} = J_3 \frac{d\omega_3}{dt}; \quad M_{y1} = c_1(\varphi_2 - \varphi_3); \quad M_{y2} = c_2(\varphi_3 - \varphi_4);$$

$$M_{д1} = \mu_1(\omega_2 - \omega_3); \quad M_{д2} = \mu_2(\omega_3 - \omega_4).$$

В результате получаем искомое топологическое уравнение, описывающее движение сосредоточенной массы 3 с моментом инерции J_3 :

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{c_1(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_1(\omega_2 - \omega_3) - c_2(\varphi_3 - \varphi_4) - \mu_2(\omega_3 - \omega_4)}{J_3}. \quad (20)$$

Очевидно, что использование орграфа создаёт благоприятные условия для составления уравнений математической модели объекта проектирования.

5 Матрицы инцидентий и трансформаторных элементов.

Описание структуры и физических свойств технического объекта можно также выполнить в матричной форме. Для этого составляются две матрицы – *матрица инцидентий* и *матрица трансформаторных элементов*.

В матрице инцидентий каждому узлу орграфа (т. е. каждой сосредоточенной массе динамической модели), за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец. Единицами в матрице отмечают наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями – их отсутствие. Направление сигналов в ветвях орграфа отображают знаками единиц. Если сигнал направлен от узла, принимают знак «минус», а если к узлу – знак «плюс».

В матрице трансформаторных элементов проставляют номера этих элементов с учётом их расположения между взаимодействующими между собой упругими элементами и сосредоточенными массами.

В таблице 1 приведена матрица инцидентий, а в таблице 2 – матрица трансформаторных элементов. Они составлены на основе орграфа, представленного на рисунке 3. Наличие фрикционных элементов приводит к возникновению виртуальных ветвей, которые помечаются в матрице инцидентий звёздочкой.

Таблица 1 – Матрица инцидентий

Узел	Ветвь							
	$M_{в1}$	$M_{в2}$	$M_{ф1}$	$M_{ф2}$	c_1	c_2	μ_1	μ_2
1	1	0	-1*	0	-1*	0	-1*	0
2	1*	0	1*	0	-1	0	-1	0
3	0	0	0	0	1	-1	1	-1
4	0	-1*	0	-1*	0	1	0	1
5	0	-1	0	1*	0	1*	0	1*

6 Структурно-матричный метод построения математической модели.

Структурно-матричный метод построения математической модели технического объекта основан на использовании матричной формы представления физических свойств объекта [2]. Использование матрицы инцидентий и матрицы трансформаторных элементов позволяет полностью формализовать процесс построения математической модели и осуществить её автоматизированное построение непосредственно на компьютере.

Топологические уравнения составляются путём построчного алгебраиче-

ского сложения потенциалов элементов динамической модели и источников внешних воздействий, инцидентных соответствующей сосредоточенной массе. При этом потенциалы умножают на значения инциденторов данной строки матрицы инцидентностей.

Таблица 2 – Матрица трансформаторных элементов

Узел	Ветвь			
	c_1	c_2	μ_1	μ_2
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1	2	1	2
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0

Компонентные уравнения элементов динамической модели получают путём алгебраического сложения фазовых координат типа потока сосредоточенных масс, инцидентных данному элементу, умноженных на параметр элемента. Компонентные уравнения составляют только для упругих и диссипативных элементов.

При наличии трансформаторного элемента его включение в топологические и компонентные уравнения зависит от знака инцидентора связи сосредоточенной массы с соответствующим элементом модели. Если инцидентор отрицательный, соответствующую ему фазовую координату типа потенциала в топологическом уравнении делят на $u_i \eta_i$, а фазовую координату типа потока в компонентном уравнении делят на u_i , где $-u_i$ и η_i передаточное число и КПД i -го трансформаторного элемента.

Состояния фрикционных элементов отображаются дискретными функциями замыкания L_i и размыкания P_i сцеплений. Эти же функции позволяют учитывать виртуальные ветви орграфа.

Используя изложенную методику структурно-матричного метода, составим математическую модель трансмиссии автомобиля на примере динамической модели, приведенной на рисунке 1:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{M_{B1} - M_{\phi 1} \operatorname{sign}(\omega_1 - \omega_2)(1 - L_1) - (M_{y1} + M_{d1})L_1 P_1}{J_1 + J_2 L_1}; \\
\frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{M_{B1} L_1 P_1 + M_{\phi 1} \operatorname{sign}(\omega_1 - \omega_2)(1 - L_1) - (M_{y1} + M_{d1})}{J_1 L_1 + J_2}; \\
\frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{(M_{y1} + M_{d1})u_{31}\eta_{31} - (M_{y2} + M_{d2})/(u_{32}\eta_{32})}{J_3}; \\
\frac{d\omega_4}{dt} &= \frac{-M_{B2} L_2 P_2 - M_{\phi 2} \operatorname{sign}(\omega_4 - \omega_5)(1 - L_2) + (M_{y2} + M_{d2})}{J_4 + J_5 L_2}; \\
\frac{d\omega_5}{dt} &= \frac{-M_{B2} + M_{\phi 2} \operatorname{sign}(\omega_4 - \omega_5)(1 - L_2) + (M_{y2} + M_{d2})L_2 P_2}{J_4 L_2 + J_5}; \\
\frac{dM_{y1}}{dt} &= c_1(\omega_2 - \omega_3 u_{31}); \\
\frac{dM_{y2}}{dt} &= c_2(\omega_3 / u_{32} - \omega_4);
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$M_{d1} = \mu_1(\omega_2 - \omega_3 u_{31}); \quad M_{d2} = \mu_2(\omega_3 / u_{32} - \omega_4). \quad (22)$$

Компонентные уравнения упругих элементов составлены в дифференциальной форме и включены в состав системы дифференциальных уравнений (21). Это возможно для линейных уравнений и целесообразно, поскольку снижает порядок системы уравнений.

Полученная система дифференциальных уравнений (21) в совокупности с компонентными уравнениями диссипативных элементов (22) описывает динамику переходных процессов трансмиссии.

Функция sign введена для учета возможного изменения знака разности угловых скоростей ведущей и ведомой частей фрикционных элементов, так как при этом изменяются направления моментов трения.

Выражения для определения дискретных функций замыкания L_i и размыкания P_i сцеплений имеют следующий вид:

$$L_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega_1 - \omega_2| \leq \Delta\omega_1; \\ 0 & \text{при } |\omega_1 - \omega_2| > \Delta\omega_1; \end{cases} \quad (23)$$

$$P_1 = 0,5 \left[1 + \operatorname{sign} \left(M_{\phi 1} - |M_{y1} + M_{d1} + J_2 \dot{\omega}_2| \right) \right]; \quad (24)$$

$$L_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega_4 - \omega_5| \leq \Delta\omega_2; \\ 0 & \text{при } |\omega_4 - \omega_5| > \Delta\omega_2; \end{cases} \quad (25)$$

$$P_2 = 0,5 \left[1 + \operatorname{sign} \left(M_{\phi 2} - |M_{y2} + M_{d2} - J_4 \dot{\omega}_4| \right) \right]. \quad (26)$$

В формулах (23) и (25) $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ – допустимые разности между угловыми скоростями ведущих и ведомых элементов фрикционов, определяющие условия их блокировки (замыкания). Их значения принимают в пределах $1 \dots 2$ рад/с.

Применение дискретных функций замыкания L_i и размыкания P_i сцеплений позволяет использовать постоянную структуру системы дифференциальных уравнений независимо от состояния фрикционных элементов, влияющего на число степеней свободы системы.

Контрольные вопросы

- 1 Классификация фазовых координат технической системы и их назначение.
- 2 Компонентные уравнения элементов технической системы. Законы физики для описания их свойств.
- 3 Топологические уравнения технической системы. Отображаемые ими свойства системы. Законы физики, используемые для составления топологических уравнений.
- 4 Формы представления математических моделей.
- 5 Виды графических моделей и особенности отображения ими физических свойств технической системы.
- 6 Определение орграфа и использование его для получения уравнений математической модели.
- 7 Режимы функционирования технических объектов и необходимые условия для их поддержания.
- 8 Классификация систем уравнений в зависимости от моделируемого режима функционирования объекта.
- 9 Структурно-матричный метод построения математических моделей.
- 10 Матрица инцидентий и матрица трансформаторных элементов. Их использование для построения математических моделей.
- 11 Особенности моделирования технических объектов с фрикционными элементами.

Практическое занятие № 3. Математические модели воздействий внешней среды на объект проектирования

Цель занятия: освоение методики построения математических моделей воздействий внешней среды.

1 Подготовка исходных данных.

Для построения математических моделей воздействий внешней среды необходимы следующие данные: максимальная мощность двигателя $P_{e\max}$; частота вращения вала двигателя при максимальной мощности n_p ; максимальный вращающий момент двигателя $M_{e\max}$; частота вращения вала двигателя

при максимальном моменте n_M ; максимальная частота холостого хода двигателя $n_{\text{хх max}}$; коэффициенты уравнения регрессии, описывающего внешнюю скоростную характеристику двигателя, a, b, c ; угловая скорость ω_{Π} и момент M_{Π} в точке пересечения ВСХ и регуляторной ветви при выбранном значении γ_a ; полная масса автомобиля m_a ; сцепная масса m_{ϕ} ; коэффициент сопротивления качению f_0 ; уклон дороги h ; коэффициент сопротивления воздуха k_w ; лобовая площадь автомобиля $A_{\text{л}}$; коэффициент запаса момента трения сцепления β ; время нарастания момента трения $t_{\phi 1}$; динамический коэффициент сцепления $\phi_{\text{хд}}$; статический коэффициент сцепления $\phi_{\text{хст}}$.

Внешняя среда оказывает воздействие на моделируемую динамическую систему двумя источниками потенциалов: $M_{\text{в1}}$ и $M_{\text{в2}}$. Потенциал $M_{\text{в1}}$ представляет собой вращающий момент двигателя $M_{\text{д}}$, а потенциал $M_{\text{в2}}$ – приведенный к ведущему колесу момент сопротивления движению автомобиля $M_{\text{с}}$.

1 Математическая модель двигателя.

Вращающий момент двигателя $M_{\text{д}}$ является функцией угловой скорости вращения коленчатого вала $\omega_{\text{д}}$ и положения педали акселератора γ_a . Характеристика двигателя $M_{\text{д}} = f(\omega_{\text{д}}, \gamma_a)$ зависит от способа управления подачей топлива. На тяжёлых грузовых автомобилях используют дизельные двигатели с всережимными регуляторами частоты вращения коленчатого вала. У таких двигателей характеристика $M_{\text{д}} = f(\omega_{\text{д}}, \gamma_a)$ состоит из двух составляющих – внешней скоростной характеристики (ВСХ) и регуляторной ветви. Изменяя положение педали акселератора γ_a в пределах $0 \leq \gamma_a \leq 100\%$, получают множество регуляторных ветвей, ограничивающих частоту вращения вала двигателя.

Для двигателя с всережимным регулятором вращающий момент вычисляется по следующим выражениям:

$$M_{\text{д}} = \begin{cases} M_P [a + b(\omega_{\text{д}}/\omega_P) + c(\omega_{\text{д}}/\omega_P)^2] & \text{при } \omega_{\text{д}} \leq \omega_{\Pi}; \\ M_{\Pi} - k_p(\omega_{\text{д}} - \omega_{\Pi}) & \text{при } \omega_{\text{д}} > \omega_{\Pi}, \end{cases} \quad (27)$$

где $M_{\text{д}}$ – текущее значение вращающего момента двигателя, Н·м;

M_P – момент двигателя при максимальной мощности $P_{e \text{ max}}$;

$\omega_{\text{д}}$ – текущее значение угловой скорости коленчатого вала двигателя (согласно динамической модели $\omega_{\text{д}} = \omega_1$), рад/с;

ω_P – угловая скорость коленчатого вала при $P_{e \text{ max}}$;

ω_{Π}, M_{Π} – угловая скорость и момент в точке пересечения ВСХ и регуляторной ветви при выбранном значении γ_a ;

a, b, c – коэффициенты уравнения регрессии, описывающего внешнюю скоростную характеристику двигателя (безразмерные величины);

k_p – коэффициент наклона регуляторной ветви характеристики двигателя, Н·м·с/рад.

При $\omega_{\Pi} = \omega_P$ получаем предельную регуляторную характеристику двигателя, обеспечивающую ограничение мощности $P_{рег}$ и момента двигателя $M_{рег}$, что предотвращает его разнос при резком сбросе нагрузки.

Вращающий момент двигателя M_P определяется по формуле

$$M_P = P_{e\max} / \omega_P. \quad (28)$$

В эту формулу подставляют значения $P_{e\max}$, Вт, ω_P , рад/с, и получают M_P , Н·м.

Коэффициенты a, b, c должны отвечать условию $a + b + c = 1$. Например, для двигателя ЗИЛ-130 $a = 0,75; b = 1,59; c = -1,34$; для двигателя ЯМЗ-240 $a = 0,68; b = 1,07; c = -0,75$; для двигателя КамАЗ $a = 0,51; b = 1,11; c = -0,62$. Значения этих коэффициентов для других двигателей можно определить по формулам, приведенным в [3, с. 69].

Значение ω_P , рад/с, вычисляется по формуле

$$\omega_P = \frac{\pi n_P}{30}, \quad (29)$$

где n_P – частота вращения вала двигателя при $P_{e\max}$, об/мин.

Значения $P_{e\max}$ и n_P получают из технической характеристики двигателя. При отсутствии данных по n_P можно принять: для дизелей $n_P = 2100$ об/мин; для бензиновых двигателей грузовых автомобилей $n_P = 3200$ об/мин; для легковых автомобилей $n_P = 5600$ об/мин.

Значение коэффициента k_p определяется на основе выражения

$$M_P - k_p (\omega_{xx\max} - \omega_P) = 0, \quad (30)$$

где $\omega_{xx\max}$ – максимальная угловая скорость холостого хода двигателя,

$$\omega_{xx\max} = \frac{\pi n_{xx\max}}{30}, \quad (31)$$

где $n_{xx\max}$ – максимальная частота холостого хода двигателя, об/мин.

Принимают

$$n_{xx\max} = (1,10 \dots 1,15) n_P. \quad (32)$$

Значение $n_{xx\max}$ округляют и принимают кратным 100 или 50 об/мин.

Значение коэффициента k_p вычисляют по формуле

$$k_p = \frac{M_P}{\omega_{xx\max} - \omega_P}. \quad (33)$$

В выражениях (27), (28), (30), (33) можно вместо угловых скоростей коленчатого вала двигателя ω_d , ω_p , ω_{Π} , $\omega_{\text{хх max}}$ использовать соответствующие им частоты вращения n_d , n_p , n_{Π} , $n_{\text{хх max}}$, учитывая при этом соотношения между ними согласно выражению $\omega_i = \pi n_i / 30$.

На рисунке 4 представлены характеристики двигателя, отображающие изменение мощности P_e и вращающего момента M_e в зависимости от частоты вращения его вала n_d при работе на внешней скоростной характеристике (ВСХ), а также на предельной регуляторной характеристике $P_{\text{рег}}$ и $M_{\text{рег}}$. Штриховыми линиями учитываются затраты энергии на собственные нужды двигателя (приводы вентилятора, насоса системы охлаждения и других механизмов).

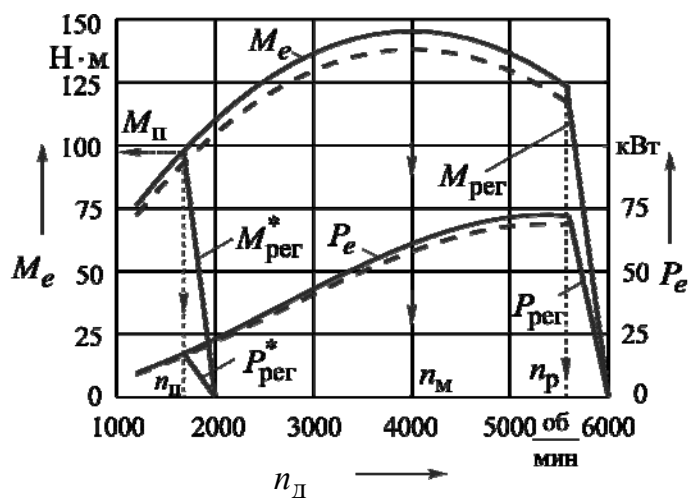


Рисунок 4 – Характеристики двигателя

При трогании автомобиля с места реализуются регуляторные ветви характеристик двигателя $P_{\text{рег}}^*$ и $M_{\text{рег}}^*$. Для использования кинетической энергии маховика двигателя на этом режиме его предварительно разгоняют до некоторой начальной частоты вращения n_{d0} . Но ее значение не должно превышать частоту вращения n_M .

2 Математические модели сопротивлений движению автомобиля.

Сопротивление движению автомобиля определяется тремя составляющими: сопротивлением качению колес; сопротивлением подъему; сопротивлением воздуха.

Приведенный момент сопротивления M_{B2} вычисляют по формуле

$$M_{B2} = M_f + M_h + M_w, \quad (34)$$

где M_f – момент, учитывающий сопротивление качению, Н·м;

M_h – момент, учитывающий сопротивление, обусловленное преодолением продольного уклона дороги (подъема), Н·м;

M_w – момент, учитывающий сопротивление воздуха, Н·м.

Значение M_f можно найти по формуле

$$M_f = m_a g f_v r_k \text{sign } \omega_5, \quad (35)$$

где m_a – полная масса автомобиля, кг;

g – ускорение свободного падения, м/с²;

f_v – коэффициент сопротивления качению (безразмерная величина);

r_k – радиус качения колеса, м.

Значение коэффициента сопротивления качению f_v зависит от скорости автомобиля v и вычисляется по формуле

$$f_v = f_0 \left[1 + (0,0216 v)^2 \right] = f_0 \left[1 + (0,0216 r_k \omega_5)^2 \right], \quad (36)$$

где f_0 – коэффициент сопротивления качению при малой скорости;

ω_5 – угловая скорость ведущего колеса ($\omega_5 = \omega_{к.в}$), рад/с.

Функция $\text{sign } \omega_5$ учитывает возможное изменение знака момента M_f . При положительной скорости автомобиля M_f положительно. При трогании автомобиля на подъеме может наблюдаться откат его назад, тогда ω_5 окажется отрицательным, что приведет к изменению знака момента M_f .

Значение момента M_h определяется по формуле

$$M_h = m_a g h r_k, \quad (37)$$

где h – уклон дорожного полотна (безразмерная величина), $h = \text{tg } \alpha$;

α – угол продольного уклона, град.

На подъеме h положительно, а на спуске отрицательно.

Значение момента M_w зависит от скорости автомобиля и определяется по формуле

$$M_w = k_w A_{л} v^2 r_k = k_w A_{л} r_k^3 \omega_5^2, \quad (38)$$

где k_w – коэффициент сопротивления воздуха, Н·с²/м⁴;

$A_{л}$ – лобовая площадь автомобиля, м².

3 Математические модели фрикционных элементов.

Момент трения $M_{\phi 1}$ сцепления ФЭ₁ в первом приближении описывается кусочно-линейной функцией

$$M_{\phi 1} = \begin{cases} M_{\phi 1 \max} t / t_{\phi 1} & \text{при } 0 \leq t \leq t_{\phi 1}; \\ M_{\phi 1 \max} & \text{при } t > t_{\phi 1}, \end{cases} \quad (39)$$

где $M_{\phi 1 \max}$ – максимальное значение момента трения, Н·м;

t – текущее время процесса включения сцепления, с;

$t_{\phi 1}$ – время нарастания момента трения, с.

Значение $M_{\phi 1 \max}$ принимают из условия

$$M_{\phi 1 \max} = \beta M_{e \max}, \quad (40)$$

где β – коэффициент запаса момента трения;

$M_{e \max}$ – максимальный момент двигателя, Н·м.

Для грузовых автомобилей принимают $\beta = 2,0 \dots 2,5$; для легковых – $\beta = 1,5 \dots 2,0$. При трогании автомобиля с места в тяжелых дорожных условиях с полной нагрузкой можно принимать $t_{\phi 1} = 1,0 \dots 1,5$ с.

Момент сцепления ведущих колес с дорогой $M_{\phi 2}$ вычисляют по формуле

$$M_{\phi 2} = \varphi_x m_{\phi} g r_k, \quad (41)$$

где φ_x – коэффициент сцепления;

m_{ϕ} – часть массы автомобиля, приходящаяся на ведущие колеса (сцепная масса), кг.

Коэффициент сцепления φ_x определяется по формуле

$$\varphi_x = \varphi_{хд} + (\varphi_{хст} - \varphi_{хд}) \exp(-k_e r_k |\omega_4 - \omega_5|), \quad (42)$$

где $\varphi_{хд}$ – динамический коэффициент сцепления (при скольжении колеса);

$\varphi_{хст}$ – статический коэффициент сцепления (при качении без скольжения);

k_e – коэффициент экспоненты, $k_e = 0,25$.

Значение $\varphi_{хст}$ принимают из [2, таблица 1.2], в зависимости от состояния опорной поверхности дороги, а $\varphi_{хд} = (0,6 \dots 0,8) \varphi_{хст}$.

4 Моделирование мощности и работы буксования сцеплений.

Для оценки нагруженности и работоспособности сцеплений определяют мощность $P_{\phi i}$ и работу $W_{\phi i}$ буксования. Мощность вычисляют по формуле

$$P_{\phi i} = |M_{\phi i} \omega_{\phi i}|, \quad (43)$$

а работу буксования – по формуле

$$W_{\phi i} = \int_0^{t_{\phi i}} P_{\phi i} dt, \quad (44)$$

где $\omega_{\phi i}$ – угловая скорость относительного скольжения поверхностей трения сцеплений, рад/с;

$t_{\phi i}$ – время процесса буксования сцеплений, с.

Угловые скорости $\omega_{\phi i}$ определяют по формулам:

– для ФЭ₁

$$\omega_{\phi 1} = \omega_1 - \omega_2; \quad (45)$$

– для $\Phi\Xi_2$

$$\omega_{\Phi 2} = \omega_4 - \omega_5. \quad (46)$$

Значение $t_{\delta i}$ в процессе моделирования соответствует интервалу времени, в течение которого дискретная функция замыкания $L_i = 0$ (см. формулы (23) и (25)).

Контрольные вопросы

- 1 Характерные виды воздействий внешней среды на автомобиль.
- 2 Моделирование характеристик двигателя. Формулы для определения вращающего момента двигателя на внешней скоростной характеристике и на регуляторной ветви.
- 3 Основные параметры характеристик двигателя и их определение.
- 4 Воздействия внешней среды на автомобиль. Формулы для их определения.
- 5 Моделирование сцепления механической трансмиссии автомобиля. Формула для определения момента трения.
- 6 Моделирование сцепления ведущих колёс автомобиля с опорной поверхностью дороги. Формула для определения момента сцепления.
- 7 Формулы для определения коэффициентов сопротивления качению и сцепления колёс с дорогой.
- 8 Определение мощности и работы буксования сцепления.

Практическое занятие № 4. Определение параметров математической модели и решение системы дифференциальных уравнений

Цель занятия: получение искомого решения математической модели объекта проектирования.

Решение системы дифференциальных уравнений математической модели объекта проектирования можно получить с помощью компьютерной программы *Model_Transmission_Kursovaia_Rabota_MMA*. Для ввода информации о структуре и параметрах системы дифференциальных уравнений в ПЭВМ необходимо составить матрицу Якоби и вектор внешних воздействий. Примем во внимание, что искомыми фазовыми координатами системы являются $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, M_{y1}, M_{y2}$. Следовательно, размерность матрицы Якоби 7×7 , а вектора воздействий 7×1 .

1 Вектор внешних воздействий системы дифференциальных уравнений.

Введем обозначение вектора внешних воздействий $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_7)$ и составим выражения для вычисления его элементов применительно к системе дифференциальных уравнений (21). В число внешних воздействий кроме $M_{в1}$ и $M_{в2}$ введём функции моментов трения сцеплений $M_{\Phi 1}$ и $M_{\Phi 2}$. В результате

получим следующие выражения для вычисления элементов вектора внешних воздействий:

$$\left. \begin{aligned}
 b_1 &= \frac{M_{B1} - M_{\Phi1} \text{sign}(\omega_1 - \omega_2)(1 - L_1)}{J_1 + J_2 L_1}; \\
 b_2 &= \frac{M_{B1} L_1 P_1 + M_{\Phi1} \text{sign}(\omega_1 - \omega_2)(1 - L_1)}{J_1 L_1 + J_2}; \\
 b_3 &= 0; \\
 b_4 &= \frac{-M_{B2} L_2 P_2 - M_{\Phi2} \text{sign}(\omega_4 - \omega_5)(1 - L_2)}{J_4 + J_5 L_2}; \\
 b_5 &= \frac{-M_{B2} + M_{\Phi2} \text{sign}(\omega_4 - \omega_5)(1 - L_2)}{J_4 L_2 + J_5}; \\
 b_6 &= 0; \quad b_7 = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Подставим в дифференциальные уравнения (21) значения потенциалов диссипативных элементов, используя компонентные уравнения (22), а также значения внешних воздействий согласно выражениям (47). В результате система уравнений (21) преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{-(\mu_1 \omega_2 - \mu_1 u_{31} \omega_3 + M_{y1}) L_1 P_1}{J_1 + J_2 L_1} + b_1; \\
 \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{-\mu_1 \omega_2 + \mu_1 u_{31} \omega_3 - M_{y1}}{J_1 L_1 + J_2} + b_2; \\
 \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{\mu_1 u_{31} \eta_{31} \omega_2 - [\mu_1 u_{31}^2 \eta_{31} + \mu_2 / (u_{32}^2 \eta_{32})] \omega_3 + \mu_2 \omega_4 / (u_{32} \eta_{32})}{J_3} + \\
 &\quad + \frac{M_{y1} u_{31} \eta_{31} - M_{y2} / (u_{32} \eta_{32})}{J_3} + b_3; \\
 \frac{d\omega_4}{dt} &= \frac{\mu_2 \omega_3 / u_{32} - \mu_2 \omega_4 + M_{y2}}{J_4 + J_5 L_2} + b_4; \\
 \frac{d\omega_5}{dt} &= \frac{(\mu_2 \omega_3 / u_{32} - \mu_2 \omega_4 + M_{y2}) L_2 P_2}{J_4 L_2 + J_5} + b_5; \\
 \frac{dM_{y1}}{dt} &= c_1 \omega_2 - c_1 u_{31} \omega_3; \\
 \frac{dM_{y2}}{dt} &= c_2 \omega_3 / u_{32} - c_2 \omega_4.
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

На основе преобразованной системы дифференциальных уравнений (48) составляется матрица Якоби (таблица 3).

Таблица 3 – Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	M_{y1}	M_{y2}
0	$\frac{-\mu_1 L_1 P_1}{J_1 + J_2 L_1}$	$\frac{\mu_1 u_{31} L_1 P_1}{J_1 + J_2 L_1}$	0	0	$\frac{-L_1 P_1}{J_1 + J_2 L_1}$	0
0	$\frac{-\mu_1}{J_1 L_1 + J_2}$	$\frac{\mu_1 u_{31}}{J_1 L_1 + J_2}$	0	0	$\frac{-1}{J_1 L_1 + J_2}$	0
0	$\frac{\mu_1 u_{31} \eta_{31}}{J_3}$	$\frac{-\left(\mu_1 u_{31}^2 \eta_{31} + \mu_2 / (u_{32}^2 \eta_{32})\right)}{J_3}$	$\frac{\mu_2 / (u_{32} \eta_{32})}{J_3}$	0	$\frac{u_{31} \eta_{31}}{J_3}$	$\frac{-1 / (u_{32} \eta_{32})}{J_3}$
0	0	$\frac{\mu_2 / u_{32}}{J_4 + J_5 L_2}$	$\frac{-\mu_2}{J_4 + J_5 L_2}$	0	0	$\frac{1}{J_4 + J_5 L_2}$
0	0	$\frac{(\mu_2 / u_{32}) L_2 P_2}{J_4 L_2 + J_5}$	$\frac{-\mu_2 L_2 P_2}{J_4 L_2 + J_5}$	0	0	$\frac{L_2 P_2}{J_4 L_2 + J_5}$
0	c_1	$-c_1 u_{31}$	0	0	0	0
0	0	c_2 / u_{32}	$-c_2$	0	0	0

2 Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений.

В таблице 3 приведена матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (48).

Так как элементы матрицы Якоби зависят от состояния фрикционных элементов, изменяющих структуру динамической модели, то их вычисление осуществляется на каждом шаге интегрирования. Кроме того, функции внешних воздействий также переменные. Необходимость пересчета элементов вектора внешних воздействий обусловлена зависимостью момента двигателя M_d от угловой скорости коленчатого вала ω_d , определяемой выражением (27) (согласно динамической модели это зависимость M_{B1} от ω_1), и зависимостью момента трения сцепления $M_{\phi 1}$ от времени t (39).

3 Оценка устойчивости динамической системы трансмиссии.

Оценка устойчивости динамической системы трансмиссии автомобиля осуществляется при замкнутых фрикционных элементах $\Phi_{Э1}$ и $\Phi_{Э2}$. В этом случае масса J_1 объединяется с массой J_2 , а масса J_4 с массой J_5 . В проекте необходимо построить такую модель. Число степеней свободы моделируемой системы будет равно трем, а движение ее описывается системой дифференциальных уравнений пятого порядка. Следовательно, при оценке устойчивости необходимо использовать матрицу Якоби размерностью 5×5 . Поскольку в этом

случае $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_4 = \omega_5$, то преобразуем исходную матрицу Якоби путем исключения первой строки и первого столбца, а также пятой строки и пятого столбца. Кроме того, нужно учесть, что при замкнутых фрикционных элементах $L_1 = 1$, $P_1 = 1$, $L_2 = 1$, $P_2 = 1$. В результате получаем матрицу Якоби, приведенную в таблице 4.

Элементы матрицы Якоби в этом случае постоянны. Для их вычисления подставляют значения параметров элементов динамической модели в выражения, приведенные в таблице 4. На основе полученных значений вычисляют собственные значения матрицы Якоби.

Таблица 4 – Матрица Якоби для оценки устойчивости динамической системы трансмиссии

ω_2	ω_3	ω_4	M_{y1}	M_{y2}
$\frac{-\mu_1}{J_1 + J_2}$	$\frac{\mu_1 u_{31}}{J_1 + J_2}$	0	$\frac{-1}{J_1 + J_2}$	0
$\frac{\mu_1 u_{31} \eta_{31}}{J_3}$	$\frac{-\left(\mu_1 u_{31}^2 \eta_{31} + \mu_2 / (u_{32}^2 \eta_{32})\right)}{J_3}$	$\frac{\mu_2 / (u_{32} \eta_{32})}{J_3}$	$\frac{u_{31} \eta_{31}}{J_3}$	$\frac{-1 / (u_{32} \eta_{32})}{J_3}$
0	$\frac{\mu_2 / u_{32}}{J_4 + J_5}$	$\frac{-\mu_2}{J_4 + J_5}$	0	$\frac{1}{J_4 + J_5}$
c_1	$-c_1 u_{31}$	0	0	0
0	c_2 / u_{32}	$-c_2$	0	0

Если вещественные части всех собственных значений матрицы Якоби отрицательны, тогда исследуемая динамическая система устойчива. Мнимые части собственных значений – это резонансные частоты системы.

При выборе метода интегрирования системы дифференциальных уравнений вычисляют нормы векторов всех собственных значений матрицы Якоби $|\lambda|$, выделяют максимальное значение $|\lambda|_{\max}$ и оценивают максимально допустимое значение шага интегрирования h_{\max} из условия

$$h_{\max} < 2/|\lambda|_{\max}. \quad (49)$$

4 Выбор начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений.

Для решения системы дифференциальных уравнений (48) необходимо задать начальные условия, т. е. указать начальные значения всех фазовых координат. Так как в данном случае моделируется процесс трогания автомобиля с места, то принимают следующие начальные условия: $\omega_1 = \omega_{d0}$; $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$; $M_{y1} = M_{y2} = 0$.

При трогании автомобиля с места в тяжелых дорожных условиях двигатель вначале разгоняют до некоторой угловой скорости $\omega_{д0}$, а затем осуществляют включение сцепления. Это необходимо для того, чтобы использовать кинетическую энергию маховика для преодоления повышенного сопротивления разгону автомобиля. Но величина $\omega_{д0}$ не должна превышать значения угловой скорости ω_M , соответствующего максимальному вращающему моменту двигателя $M_{e\max}$.

Значение $\omega_{д0}$ можно определить из выражения

$$\omega_{д0} = \omega_{п} + \frac{M_{п}}{k_p}. \quad (50)$$

Выбрав величину $\omega_{п}$ из условия $\omega_{п} < \omega_M$, определяют параметр $M_{п}$ по формуле

$$M_{п} = M_P \left[a + b(\omega_{п}/\omega_P) + c(\omega_{п}/\omega_P)^2 \right]. \quad (51)$$

Дорожные условия характеризуются коэффициентом сопротивления качению f_0 и продольным уклоном дороги h . Тип опорной поверхности дороги выбирается в зависимости от назначения автомобиля и предполагаемых условий его эксплуатации. Значение h принимают из интервала $0,06 \leq h \leq 0,15$. Трогание автомобиля с места осуществляется на первой передаче, что учитывается при выборе значений u_{31} и η_{31} .

5 Выбор показателей качества переходных процессов.

По результатам интегрирования системы дифференциальных уравнений (48) осуществляется оценка качества переходных процессов в трансмиссии автомобиля, обусловленных включением сцепления.

Для оценка качества переходных процессов при включении сцепления используются следующие показатели:

- 1) коэффициент динамичности k_d ;
- 2) максимальная мощность буксования сцепления $P_{ф\max}$, Вт;
- 3) суммарная работа буксования $W_{ф}$, Дж;
- 4) максимальное ускорение автомобиля a_{\max} , м/с².

Коэффициент динамичности переходного процесса характеризует нагруженность механизмов трансмиссии. Значения коэффициентов динамичности определяются для всех упругих элементов по формуле

$$k_{dj} = \frac{M_{yj\max}}{M_{п}u_{трj}}, \quad (52)$$

где $M_{yj\max}$ – максимальное значение момента j -го упругого элемента в переходном процессе;

M_{Π} – момент двигателя в точке пересечения регуляторной ветви $M_{\text{рег}}^*$ с ВСХ M_e ;

$u_{\text{тр}j}$ – передаточное число трансмиссии от двигателя до j -го упругого элемента.

Для рассматриваемой динамической модели $u_{\text{тр}1} = 1$; $u_{\text{тр}2} = u_{31}u_{32}$, где u_{31} – передаточное число коробки передач; u_{32} – передаточное число главной передачи.

Максимальная мощность буксования $P_{\text{ф}1\text{max}}$ и суммарная работа буксования $W_{\text{ф}1}$ сцепления ФЭ₁ вычисляются в процессе моделирования по формулам (43) и (44). Одновременно вычисляются эти же показатели $P_{\text{ф}2\text{max}}$ и $W_{\text{ф}2}$ для сцепления колес с дорогой.

От величины показателя $P_{\text{ф}1\text{max}}$ зависит максимальная температура нагрева поверхностей трения сцепления, оказывающая влияние на выгорание фрикционной накладки и ее разрушение. Показатель $W_{\text{ф}1}$ определяет объемную температуру нагрева фрикционных элементов и их износ.

Максимальное ускорение a_{max} в переходном процессе при включении сцеплений характеризует комфортабельность автомобиля, так как создает неприятные ощущения для человека, обусловленные силами инерции, вызывающими продольный толчок автомобиля. Значение a_{max} вычисляется по формуле

$$a_{\text{max}} = r_{\text{к}} \left(\frac{d\omega_5}{dt} \right)_{\text{max}}, \quad (53)$$

где $\left(\frac{d\omega_5}{dt} \right)_{\text{max}}$ – максимальное угловое ускорение ведущих колес автомобиля.

6 Определение максимальной скорости автомобиля.

Одним из показателей тягово-скоростных свойств автомобиля является максимальная скорость v_{max} , достигаемая в процессе разгона в заданных дорожных условиях. Согласно ГОСТ 22576–90 испытания по определению v_{max} проводят на горизонтальном участке дороги с твердым покрытием. Поэтому можно принять следующие значения параметров характеристик дорожных условий: $f_0 = 0,01 \dots 0,02$; $h = 0$.

После достижения v_{max} автомобиль продолжает двигаться с постоянной скоростью, поэтому значения угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$, а также моментов в упругих элементах M_{y1}, M_{y2} постоянны, а производные их по времени равны нулю. Так как при этом деформация упругих элементов не изменяется, то относительные скорости вращения масс динамической модели трансмиссии равны нулю. Следовательно, равны нулю и потенциалы диссипативных элементов: $M_{\text{д}1} = M_{\text{д}2} = 0$. Движение автомобиля осуществляется на высшей

передаче, что учитывается при выборе значений u_{31} и η_{31} . Сцепление автомобиля ФЭ₁ замкнуто, а колеса не проскальзывают, поэтому принимают $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_4 = \omega_5$.

Используя исходную систему дифференциальных уравнений (21) и принимая во внимание отмеченные особенности, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_{B1}(\omega_1) - M_{y1} &= 0; \\ M_{y1}u_{31}\eta_{31} - M_{y2}/(u_{32}\eta_{32}) &= 0; \\ -M_{B2}(\omega_5) + M_{y2} &= 0; \\ \omega_1 - \omega_3u_{31} &= 0; \\ \omega_3/u_{32} - \omega_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Для вычисления вращающего момента двигателя $M_{B1} = f(\omega_1)$ используем исходное выражение (27), преобразуя его к виду

$$M_{B1}(\omega_1) = \begin{cases} M_P [a + b(\omega_1/\omega_P) + c(\omega_1/\omega_P)^2] & \text{при } \omega_1 \leq \omega_P; \\ M_P - k_p(\omega_1 - \omega_P) & \text{при } \omega_1 > \omega_P. \end{cases} \quad (55)$$

При вычислении момента $M_{B2}(\omega_5)$ используются формулы (34)–(38).

Представим функцию внешнего воздействия $M_{B2}(\omega_5)$ в виде суммы двух составляющих – постоянной M_{B2c} и переменной M_{B2v} :

$$M_{B2c} = m_a g (f_0 + h) r_k; \quad (56)$$

$$M_{B2v} = B \omega_5^2; \quad (57)$$

$$B = (0,467 \cdot 10^{-3} m_a g f_0 + k_w A_{Л}) r_k^3. \quad (58)$$

С учетом выражений (56) и (57) система уравнений (54) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} M_{B1}(\omega_1) - M_{y1} &= 0; \\ M_{y1}u_{31}\eta_{31} - M_{y2}/(u_{32}\eta_{32}) &= 0; \\ -B \omega_5^2 + M_{y2} &= M_{B2c}; \\ \omega_1 - \omega_3u_{31} &= 0; \\ \omega_3/u_{32} - \omega_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Решение системы алгебраических уравнений (59) позволяет определить значения фазовых координат $\omega_1, \omega_3, \omega_5, M_{y1}, M_{y2}$, соответствующие скорости автомобиля v_{\max} в заданных дорожных условиях, характеризуемых парамет-

рами f_0 и h . В процессе решения уравнений (59) на каждом шаге итераций вычисляют вращающий момент двигателя $M_d = M_{B1}$, выполняя условия формулы (55).

Скорость автомобиля v_{\max} , км/ч, находят по формуле

$$v_{\max} = 3,6 \omega_5 r_k. \quad (60)$$

После решения системы уравнений (59) определяют значения вращающего момента двигателя M_d и моментов сопротивления качению M_f , сопротивления подъему M_h и сопротивления воздуха M_w . Вычислив затем отношения моментов M_f , M_h и M_w к моменту M_d , оценивают распределение затрат энергии двигателя на преодоление этих составляющих полного сопротивления.

Контрольные вопросы

- 1 Структура системы дифференциальных уравнений математической модели трансмиссии автомобиля.
- 2 Матрица Якоби системы уравнений математической модели трансмиссии автомобиля.
- 3 Вектор внешних воздействий на сосредоточенные массы динамической модели трансмиссии автомобиля.
- 4 Понятие устойчивости технической системы.
- 5 Условие устойчивого функционирования технической системы.
- 6 Использование собственных значений матрицы Якоби для определения вида переходного процесса системы.
- 7 Показатели качества переходного процесса при трогании с места автомобиля и их определение.
- 8 Получение математической модели для определения максимальной скорости движения автомобиля в заданных дорожных условиях.

Практическое занятие № 5. Планирование эксперимента и получение регрессионной модели объекта проектирования

Цель занятия: освоение методики планирования эксперимента и построения экспериментальной факторной модели объекта проектирования.

1 Основные положения теории планирования эксперимента.

Целью функционального проектирования технического объекта является разработка принципиальной схемы и определение параметров элементов объекта, при которых достигаются высокие показатели качества и эффективности его функционирования. Задача определения параметров технического объекта решается на основе применения оптимизационных алгоритмов, реализация которых носит итерационный характер. Использование в процессе оптимизации параметров объекта теоретических математических моделей, представленных в

виде систем нелинейных дифференциальных уравнений, приводит к огромным затратам времени и создает большие трудности в проведении анализа получаемых результатов и выборе проектных решений.

Эффективность выполнения проектных работ можно значительно повысить применением теории планирования эксперимента и регрессионного анализа. Это позволяет существенно упростить математическую модель, используемую при оптимизации, и сократить время получения проектного решения. В этом суть современной информационной технологии, применяемой в САПР. Для реализации этой технологии разработана новая методология функционального проектирования технических систем. Основные этапы этой методологии:

- получение теоретической математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
- планирование вычислительного эксперимента;
- проведение вычислительного эксперимента, имитирующего процессы функционирования проектируемого объекта посредством теоретической математической модели;
- регрессионный анализ результатов вычислительного эксперимента и построение экспериментальной факторной модели (регрессионной модели) объекта проектирования;
- оценка адекватности и работоспособности регрессионной модели;
- оптимизация параметров технического объекта на основе регрессионной модели.

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. При выполнении проектных работ по предлагаемой методологии каждый опыт представляет собой решение системы дифференциальных уравнений математической модели при определенном сочетании параметров элементов технического объекта, подлежащих оптимизации. Для оценки результатов опыта используются выходные параметры технического объекта – показатели качества и эффективности его функционирования. Они представляют собой функционалы фазовых координат технической системы $\vec{Y} = \vec{\Phi}[\vec{V}(t)]$, где $\vec{V}(t)$ – значения вектор-функции фазовых координат, получаемые в процессе интегрирования.

В теории планирования эксперимента варьируемые параметры объекта называют **факторами**, а выходные параметры – **функциями отклика**. Вектор факторов обозначают \vec{X} , а вектор определяемых функций отклика – \vec{Y} . Полученные результаты эксперимента позволяют построить экспериментальную факторную модель, устанавливающую зависимости между компонентами y_i вектора \vec{Y} и факторами $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_j)$, и на ее основе решить задачу оптимизации параметров технического объекта. Эти зависимости имеют простейший вид и представляют собой обычно полиномы второго порядка. Такой полином содержит основные эффекты, все парные взаимодействия и квадратичные эффекты. При числе факторов $n = 4$ квадратичный полином имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_1x_4 + b_8x_2x_3 + b_9x_2x_4 + b_{10}x_3x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_2^2 + b_{13}x_3^2 + b_{14}x_4^2. \quad (61)$$

Экспериментальную факторную модель называют также *регрессионной моделью*, так как ее параметры находят методами регрессионного анализа. Параметры модели – это коэффициенты полинома, называемые также *коэффициентами регрессии*.

При проведении эксперимента на математической модели значения факторов в каждом опыте задаются и поддерживаются постоянными на заданных уровнях в соответствии с планом эксперимента. Такой эксперимент называют *активным*.

Различают полный факторный эксперимент (ПФЭ) и дробный факторный эксперимент (ДФЭ). Для получения регрессионного полинома второго порядка используют композиционный план второго порядка, в котором каждый фактор в различных опытах варьируют на трех уровнях. Для решения задачи определения коэффициентов регрессии количество опытов N должно быть больше или равно количеству коэффициентов полинома N_B :

$$N \geq N_B. \quad (62)$$

Композиционный план второго порядка содержит *ядро плана* и *звездные точки*. Ядро плана составляет либо ПФЭ либо ДФЭ. При использовании ПФЭ количество опытов вычисляют по формуле

$$N = 2^n + 2n, \quad (63)$$

а для ДФЭ – по формуле

$$N = 2^{n-p} + 2n, \quad (64)$$

где n – количество факторов;

p – степень дробности ДФЭ.

Количество коэффициентов полинома второго порядка

$$N_B = 0,5(n+1)(n+2). \quad (65)$$

ДФЭ позволяет существенно сократить количество опытов, особенно при большом количестве факторов. Однако если теоретическая математическая модель детерминированная, то применение ДФЭ целесообразно только при $n \geq 5$, так как в этом случае желательно, чтобы количество опытов N превышало количество коэффициентов регрессии N_B не менее чем на 5–10. Это необходимо для повышения точности определения коэффициентов регрессии. Методика построения планов эксперимента изложена в [1, 2].

При выполнении курсовой работы необходимо выбрать факторы \vec{X} и функции отклика \vec{Y} . Их выбор определяется целью проектирования, физическими свойствами и особенностями алгоритма функционирования технического объекта. В качестве факторов \vec{X} выбирают параметры элементов динамической модели объекта (параметры упругих, диссипативных, трансформаторных, фрикционных элементов) и параметры внешних управляющих воздействий,

т. е. внутренние и внешние параметры технической системы. Поскольку объект имеет множество различных элементов и соответствующее количество их параметров, то для оптимизации необходимо выбирать не все параметры объекта, а только такие, которые, по предположению или по априорной информации, оказывают наибольшее влияние на выходные параметры объекта. Принимаемые в качестве критериев выходные параметры должны в наибольшей мере отражать качество и эффективность создаваемого объекта.

Так, например, при проектировании механической трансмиссии автомобиля обычно в качестве факторов принимают: время нарастания момента трения фрикциона t_{ϕ} , максимальное значение момента трения $M_{\phi\max}$ (или коэффициент запаса момента трения β_{ϕ}), коэффициенты жесткости валов трансмиссии c_j и коэффициенты относительного затухания колебаний γ_j . Критериями принимают: коэффициенты динамичности k_d , максимальную мощность буксования $P_{\phi\max}$, работу буксования фрикциона W_{ϕ} , время буксования t_{ϕ} , максимальное ускорение автомобиля при включении фрикциона a_{\max} .

Для подвески автомобиля факторами выбирают: коэффициенты жесткости упругих элементов подвески c_j , коэффициенты жесткости сидений водителя и пассажиров c_k , относительные коэффициенты затухания колебаний γ_j , а критериями – максимальные ускорения подрессоренной массы $a_{п.м}$ и человека на сиденье $a_{ч}$, коэффициенты динамичности k_d нагрузок в упругих элементах подвески, время переходного процесса $t_{п}$ и декремент колебаний D .

2 Построение матрицы спектра плана второго порядка.

При проектировании механической трансмиссии автомобиля на основе динамической модели, представленной на рисунке 1, выберем в качестве факторов следующие параметры: время нарастания момента трения фрикциона t_{ϕ} ; коэффициенты жесткости валов трансмиссии c_1 и c_2 ; относительный коэффициент затухания колебаний γ_1 .

Составим матрицу спектра плана второго порядка, определяющую порядок варьирования принятыми четырьмя факторами. Так как принят план второго порядка, то при проведении эксперимента факторы необходимо варьировать не менее чем на трёх уровнях.

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. Обозначим нормированные значения факторов $x_j, j = \overline{1, n}$, где n – количество факторов (в рассматриваемом примере $n = 4$). Примем три уровня варьирования факторов. В кодированном виде верхний уровень обозначим $+1$, нижний -1 , а основной 0 (соответствует центру плана, в котором находятся исходные значения факторов).

Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = \frac{X_j - X_j^0}{\Delta X_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (66)$$

где X_j – натуральное значение j -го фактора;

X_j^0 – значение j -го фактора в центре плана (исходное значение фактора);

ΔX_j – интервал (шаг) варьирования фактора X_j .

Значения X_j^0 и ΔX_j вычисляются по формулам:

$$X_j^0 = (X_{j \max} + X_{j \min})/2; \quad (67)$$

$$\Delta X_j = (X_{j \max} - X_{j \min})/2. \quad (68)$$

Матрица спектра плана в рассматриваемом случае имеет вид, приведенный в таблице 5.

Таблица 5 – Матрица спектра плана

Номер опыта	Уровень нормированного фактора			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1	-1
3	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	-1	-1
5	-1	-1	+1	-1
6	+1	-1	+1	-1
7	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1	-1
9	-1	-1	-1	+1
10	+1	-1	-1	+1
11	-1	+1	-1	+1
12	+1	+1	-1	+1
13	-1	-1	+1	+1
14	+1	-1	+1	+1
15	-1	+1	+1	+1
16	+1	+1	+1	+1
17	-1	0	0	0
18	+1	0	0	0
19	0	-1	0	0
20	0	+1	0	0
21	0	0	-1	0
22	0	0	+1	0
23	0	0	0	-1
24	0	0	0	+1

Первые 16 опытов соответствуют ПФЭ, а остальные – звёздным точкам.

Все строки матрицы спектра плана различаются между собой, что соответствует требованиям регрессионного анализа результатов эксперимента. Это обеспечивает независимость всех коэффициентов получаемого уравнения регрессии.

3 Проведение вычислительного эксперимента.

Для проведения опытов составляется таблица уровней варьирования факторов, в которой приводятся натуральные значения факторов в центре плана, на нижнем и верхнем уровнях (таблица 6). Интервал варьирования всех факторов примем 50 %. Вычисленные значения факторов на всех уровнях варьирования помещаются в таблицу и используются при проведении планируемого эксперимента.

Каждый опыт представляет собой решение системы дифференциальных уравнений теоретической модели объекта при новом сочетании значений факторов, изменяемых согласно матрице спектра плана и таблице 6. По результатам каждого опыта получают значения функций отклика – показателей качества и эффективности объекта.

Для исследуемой трансмиссии в качестве функций отклика примем коэффициент динамичности k_d нагрузки в первом упругом элементе, максимальную мощность буксования $P_{фmax}$, работу буксования сцепления $W_ф$ и максимальное ускорение автомобиля a_{max} при трогании с места автомобиля. Значение k_d вычисляется по формуле (52), используя значение максимальной величины момента в первом упругом элементе M_{y1max} , измеряемое по графику переходного процесса.

Таблица 6 – Уровни варьирования факторов

Обозначение параметра	Обозначение фактора	Значение в центре плана	Интервал варьирования	Уровень фактора	
				нижний (-1)	верхний (+1)
$t_ф$	x_1				
c_1	x_2				
c_2	x_3				
γ_1	x_4				

Результаты эксперимента помещаются в таблицу 7.

Таблица 7 – Результаты эксперимента

Номер опыта	Значение функции отклика в опыте				
	$y_1 (k_d)$	$y_2 (P_{фmax}, \text{кВт})$	$y_3 (W_ф, \text{кДж})$	$y_4 (a_{max}, \text{м/с}^2)$...
1					
2					
3					
...					

4 Регрессионный анализ результатов вычислительного эксперимента и построение регрессионной модели объекта проектирования.

Результаты проведенного эксперимента подвергаются регрессионному анализу. Задачей регрессионного анализа является определение параметров экспериментальной факторной модели технического объекта, т. е. определение коэффициентов уравнений регрессий.

В уравнениях регрессий факторы x_i нормированы, а функции отклика y_j натуральные.

Регрессионный анализ включает три этапа:

- 1) статистический анализ результатов эксперимента;
- 2) получение коэффициентов уравнений регрессий;
- 3) оценка адекватности и работоспособности полученной регрессионной модели технического объекта.

Поскольку коэффициенты регрессии определяют по результатам ограниченного количества опытов, то их значения являются оценками истинных коэффициентов, а полученная регрессионная модель оказывается вероятностной независимо от вида проведенного эксперимента: физического эксперимента, сопровождаемого случайными помехами, или вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели.

Регрессионная модель должна обеспечивать адекватное описание физических свойств технического объекта, поэтому необходима статистическая оценка погрешности полученной модели. Погрешность модели оценивают дисперсией отклонения значений функции отклика, вычисляемых по уравнению регрессии, от их истинных значений.

При проверке адекватности регрессионной модели необходимо располагать противопоставляемой вероятностной моделью с известными оценками ее погрешности. Но вычислительный эксперимент проводится на детерминированной теоретической модели. Следовательно, возникает необходимость построения вероятностной модели на основе однозначных детерминированных результатов эксперимента. В качестве такой модели принимают *модель среднего* и определяют ее статистические характеристики – среднее значение функции отклика \bar{y} и дисперсию модели среднего S_y^2 , характеризующую рассеяние результатов эксперимента относительно \bar{y} и оценивающую погрешность модели среднего:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i ; \quad (69)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 , \quad (70)$$

где y_i – значение функции отклика в i -й точке спектра плана, полученное в эксперименте;

N – количество проведенных опытов, равное числу точек спектра плана.

Согласно модели среднее значение функции отклика во всех точках спектра плана одинаково и равно \bar{y} . Значения же $y_i, i = \overline{1, N}$ представляют собой разброс точек результатов вычислительного эксперимента относительно их среднего значения \bar{y} . Очевидно, что для модели среднего характерно наличие всех атрибутов вероятностной модели, а ее построение составляет содержание первого этапа регрессионного анализа. При выполнении второго этапа для вычисления коэффициентов уравнения регрессии используются формулы, приведенные в [2, с. 504].

После определения коэффициентов b_j осуществляется проверка пригодности полученных уравнений регрессий. Вначале вычисляют по построенным уравнениям регрессий (61) для каждой функции отклика $y = f(\vec{X})$ её значение \hat{y}_i в каждой точке спектра плана, подставляя в уравнение соответствующие i -й точке значения факторов \vec{X}_i . Отклонение значения \hat{y}_i от y_i , полученного в эксперименте, характеризует погрешность результатов вычислений по уравнению регрессии в i -й точке спектра плана. Погрешность полученной регрессионной модели оценивается остаточной дисперсией $S_{\text{ост}}^2$, вычисляемой по формуле

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N - N_{\text{в}}} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (71)$$

где $N_{\text{в}}$ – количество коэффициентов в уравнении регрессии.

Качество предсказания, обеспечиваемого полученной регрессионной моделью, оценивают по **критерию Фишера** F и **коэффициенту детерминации** R^2 . При этом принимается нулевая гипотеза о том, что модель среднего (69) достаточно хорошо описывает зависимость $y = f(\vec{X})$. Регрессионная модель окажется адекватной, если выдвинутая гипотеза будет опровергнута. Критерий Фишера вычисляется по формуле

$$F = \frac{S_y^2}{S_{\text{ост}}^2}. \quad (72)$$

Если значение F больше табличного $F_{\text{т}}$, то полученная модель $y = f(\vec{X})$ адекватно описывает результаты эксперимента. Значение $F_{\text{т}}$ определяют при принятом уровне значимости q и числах степеней свободы $k_1 = N - 1$ и $k_2 = N - N_{\text{в}}$. Для технических систем принимают $q = 0,05$.

Критерий детерминации определяется по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_{\text{в}})S_{\text{ост}}^2}{(N - 1)S_y^2}. \quad (73)$$

Модель считается работоспособной, если $R^2 \geq 0,75$.

Полученные значения коэффициентов уравнений регрессий помещаются в таблицу 8.

Таблица 8 – Параметры регрессионной модели технического объекта

Обозначение коэффициента	Значение коэффициента уравнения регрессии				
	$y_1 (k_d)$	$y_2 (P_{фmax}, \text{кВт})$	$y_3 (W_{ф}, \text{кДж})$	$y_4 (a_{max}, \text{м/с}^2)$...
b_0					
b_1					
b_2					
b_3					
...					

Результаты проверки адекватности и работоспособности полученной регрессионной модели представляются в таблице 9.

Используя полученные уравнения регрессий, необходимо построить графики зависимостей функций отклика от факторов и оценить влияние факторов на функции отклика. Факторы, не оказывающие существенного влияния на все функции отклика, можно в дальнейшем не учитывать при решении задачи оптимизации параметров технического объекта.

Таблица 9 – Результаты проверки адекватности и работоспособности модели

Оценочный параметр	Значение оценочного параметра				
	$y_1 (k_d)$	$y_2 (P_{фmax}, \text{кВт})$	$y_3 (W_{ф}, \text{кДж})$	$y_4 (a_{max}, \text{м/с}^2)$...
Среднее значение результатов эксперимента					
Дисперсия модели среднего					
Остаточная дисперсия					
F – критерий Фишера расчетный					
F_t – критерий Фишера табличный					
Коэффициент детерминации					
Оценка адекватности и работоспособности					

Контрольные вопросы

1 Классификация экспериментов, проводимых для построения экспериментальных факторных моделей.

2 Структурная схема проведения эксперимента при построении экспериментальной факторной модели технического объекта.

3 Способы проведения экспериментов и их классификация.

4 Тип получаемой в процессе эксперимента модели объекта.

5 Наименование варьируемых параметров объекта и выходных параметров в теории планирования эксперимента.

6 Какие параметры технического объекта принимают в качестве факторов и в качестве функций отклика.

7 Классификация планов экспериментов. Выбор типа плана эксперимента в зависимости от вида получаемой экспериментальной факторной модели.

8 Определение необходимого количества опытов в зависимости от вида экспериментальной модели.

9 Порядок формирования матрицы спектра плана в зависимости от вида экспериментальной модели.

10 Этапы регрессионного анализа, их назначение и особенности при проведении эксперимента на основе теоретической детерминированной математической модели.

11 Сущность модели среднего и её назначение. Статистические оценки модели среднего.

12 Оценка погрешности полученной регрессионной модели.

13 Оценка адекватности и работоспособности регрессионной модели.

Практическое занятие № 6. Оптимизация параметров объекта проектирования и оценка качества переходных процессов

Цель занятия: освоение методики оптимизации параметров объекта проектирования и её практическое применение для решения конкретной задачи.

1 Основы теории параметрической оптимизации.

Целью оптимизации является определение параметров технической системы, обеспечивающих наилучшее сочетание показателей качества и эффективности функционирования. Получить количественную оценку качества объекта позволяет **целевая функция**. Задача параметрической оптимизации заключается в поиске параметров объекта, при которых целевая функция достигает экстремального значения. Такие параметры называются оптимальными.

В теории оптимизации параметры, подлежащие оптимизации, называют **управляемыми параметрами**, а параметры, оценивающие качество и эффективность объекта, – **критериями оптимальности**. В случае использования регрессионной модели при оптимизации параметров технического объекта факторы становятся управляемыми параметрами, а функции отклика – критериями.

Существует несколько стратегий решения многокритериальных задач оптимизации. Одной из наиболее эффективных является **стратегия минимакса**. При наличии регрессионной модели технического объекта целевая функция минимакса формируется в виде

$$F(\vec{X}) = \sum_{i=1}^m c_i \left(\frac{y_i(\vec{X}) - y_{iextr}}{y_{imax} - y_{imin}} \right)^2, \quad (74)$$

где $y_i(\vec{X})$ – текущее значение i -го критерия, вычисляемое по уравнению регрессии (61) в итерационном процессе поиска экстремума целевой функции;

$y_{i\min}, y_{i\max}$ – минимальное и максимальное значения i -го критерия, достигаемые в области варьирования факторов \vec{X} в процессе эксперимента (определяются по графикам, построенным на основе уравнения регрессии $y_i = f(\vec{X})$);

$y_{i\text{extr}}$ – экстремальное значение i -го критерия (при максимизации критерия $y_i(\vec{X})$ принимается $y_{i\text{extr}} = y_{i\max}$, а при минимизации – $y_{i\text{extr}} = y_{i\min}$);

c_i – коэффициент веса, характеризующий значимость i -го критерия;

m – количество критериев, используемых в целевой функции.

Коэффициенты веса выбирают из условия

$$\sum_{i=1}^m c_i = 1, \quad c_i > 0. \quad (75)$$

Целевая функция $F(\vec{X})$ подлежит минимизации. Она позволяет обеспечить максимальное приближение всех критериев к их экстремальным значениям. Для поиска минимума функции $F(\vec{X})$ можно использовать разработанное на кафедре ТТМ программное обеспечение *Model_optimization_4fakt_4function* в среде *MATLAB*. Результаты оптимизации параметров сводятся в таблицу 10.

Таблица 10 – Результаты оптимизации параметров технического объекта

Обозначение параметра	Значение параметра	
	до оптимизации	после оптимизации
t_ϕ		
c_1		
c_2		
γ_1		
...		

2 Оценка качества переходных процессов объекта проектирования.

После проведения оптимизации параметров необходимо оценить достигнутое улучшение критериев оптимальности – показателей качества и эффективности проектируемого технического объекта. Для этого выполняют интегрирование системы дифференциальных уравнений, представляющих собой теоретическую математическую модель технической системы. Интегрирование уравнений осуществляется с исходными значениями оптимизируемых параметров и с оптимальными их значениями. Используя графики изменения фазовых координат, определяют значения показателей качества и эффективности. Методика их определения определяется особенностями проектируемого объекта и видом переходного процесса, используемого для решения данной задачи.

Если при интегрировании получают переходную характеристику, обусловленную ступенчатым воздействием на объект, то используют пять типовых по-

казателей качества:

- время переходного процесса t_{Π} ;
- коэффициент динамичности $k_{\text{д}}$;
- декремент колебаний D ;
- колебательность K ;
- интегральную оценку I .

Эти показатели для механической системы определяют по графикам изменения во времени усилий F_y или моментов M_y в упругих элементах.

Методика моделирования переходной характеристики и определения показателей t_{Π} , $k_{\text{д}}$, D , K , I по графику переходной характеристики изложена в [2, параграф 9.11].

При проектировании трансмиссии автомобиля обычно моделируют переходный процесс, обусловленный включением сцепления при трогании автомобиля с места и переключении передач. При этом используют следующие показатели качества переходного процесса:

- коэффициент динамичности $k_{\text{д}}$;
- максимальная мощность буксования $P_{\text{фmax}}$, кВт;
- суммарная работа буксования $W_{\text{ф}}$, кДж;
- максимальное ускорение автомобиля a_{max} , м/с².

Для определения значений $k_{\text{д}}$, $P_{\text{фmax}}$, $W_{\text{ф}}$, a_{max} используются полученные в процессе моделирования графики изменения во времени соответствующих этим параметрам функций.

3 Оценка достигнутых результатов оптимизации параметров объекта проектирования.

Полученные значения показателей качества переходного процесса сводятся в таблицу 11.

Таблица 11 – Значения показателей качества переходного процесса

Показатель качества	$k_{\text{д}}$	$P_{\text{фmax}}$, кВт	$W_{\text{ф}}$, кДж	a_{max} , м/с ²
Значение до оптимизации				
Значение после оптимизации				
Коэффициент относительного улучшения показателя, %				

Значение коэффициента K_{yi} относительного улучшения i -го показателя качества y_i определяется по формуле

$$K_{yi} = \pm \left| \frac{y_{\text{исх}i} - y_{\text{опт}i}}{y_{\text{исх}i}} \right| \cdot 100 \%, \quad (76)$$

где $U_{исхi}$ – значение i -го показателя качества переходного процесса технического объекта с исходными параметрами элементов;

$U_{оптi}$ – значение этого же показателя, полученное для технического объекта с оптимальными параметрами.

Знак (+) в выражении (76) принимается при улучшении показателя, а знак (–) – при его ухудшении.

В заключение выполненной работы формулируется общая оценка о достигнутых результатах проектирования технического объекта.

Приводятся графики переходных процессов для всех функций фазовых координат и определяемых показателей качества. На графиках отображается процесс определения показателей качества с соответствующими пояснениями в тексте составленного отчёта.

Контрольные вопросы

- 1 Основные понятия и определения параметрической оптимизации.
- 2 Этапы постановки задачи оптимизации и их назначение.
- 3 Виды стратегий решения многокритериальных задач оптимизации и их особенности.
- 4 Сущность стратегии минимакса.
- 5 Формирование целевой функции минимакса при использовании регрессионной математической модели технического объекта.
- 6 Показатели качества переходного процесса, определяемые по переходной характеристике технического объекта. Формулы для их вычисления.
- 7 Показатели качества, используемые при оценке переходного процесса на режиме трогания автомобиля с места и при переключении передач. Формулы для их вычисления.

Список литературы

- 1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Минск: Новое знание ; Москва: ИНФРА-М, 2016. – 592 с.
- 2 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Минск : ДизайнПРО, 2004. – 640 с. : ил.
- 3 **Тарасик, В. П.** Теория движения автомобиля : учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2006. – 478 с.
- 4 **Тарасик, В. П.** Теория автомобилей и двигателей: учебное пособие / В. П. Тарасик, М. П. Бренч. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2013. – 448 с.
- 5 Проектирование трансмиссий автомобилей : справочник / А. И. Гришкевич [и др.]; под общ. ред. А. И. Гришкевича. – Москва : Машиностроение, 1984. – 272 с.: ил.

6 Автомобили. Основы проектирования : учебное пособие для вузов / М. С. Высоцкий [и др.]; под ред. М. С. Высоцкого. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 152 с.

7 **Кравец В. Н.** Проектирование автомобиля : учебное пособие / В. Н. Кравец. – Нижний Новгород : Нижегород. политехн. ин-т, 1992. – 230 с.

8 Краткий автомобильный справочник НИИАТ. – Москва: Транспорт, 1983. – 220 с. : ил.

9 Математическое моделирование автомобилей: методические указания к курсовой работе для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилёв : Беларус.-Рос. ун-т, 2010. – 47 с.

10 Теория автомобиля: методические рекомендации к курсовому проектированию для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилёв : Беларус.-Рос. ун-т, 2017. – 47 с.