

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

*Методические рекомендации к лабораторным работам  
для студентов специальности  
1-37 01 02 «Автомобилестроение (по направлениям)»  
дневной формы обучения*



Могилев 2023

УДК 629.113  
ББК 39.33  
М33

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины»  
«31» августа 2023 г., протокол № 1

Составитель д-р техн. наук, проф. В. П. Тарасик

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Изложены методики построения математических моделей механизмов автомобиля, моделирования переходных процессов, оценки качества и эффективности их функционирования.

Учебное издание

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Ответственный за выпуск	И. В. Лесковец
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2023

## Содержание

Введение . . . . .	4
Основные понятия и определения математических моделей . . . . .	5
Основные понятия и определения параметрической оптимизации . . . . .	8
Лабораторная работа № 1. Построение экспериментальной факторной модели на основе ПФЭ . . . . .	9
Лабораторная работа № 2. Построение экспериментальной факторной модели на основеДФЭ . . . . .	12
Лабораторная работа № 3. Построение регрессионной модели второго порядка . . . . .	16
Лабораторная работа № 4. Регрессионный анализ результатов вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели . . . . .	19
Лабораторная работа № 5. Оптимизация параметров трансмиссии автомобиля . . . . .	23
Лабораторная работа № 6. Методы поиска безусловного экстремума целевой функции . . . . .	25
Лабораторная работа № 7. Оптимизация параметров технических объектов с учётом ограничений . . . . .	29
Лабораторная работа № 8. Вероятностные характеристики процессов функционирования механизмов автомобиля в условиях случайных воздействий внешней среды . . . . .	32
Список литературы . . . . .	38

## Введение

Целью выполнения лабораторных работ является освоение методик построения экспериментальных факторных моделей (регрессионных моделей) и оптимизации параметров автомобиля, приобретения опыта решения задач функционального проектирования объектов автомобилестроения. Студенты на занятиях осваивают методы планирования эксперимента, определения параметров регрессионной модели, постановки и решения задач безусловной и условной оптимизации параметров объекта проектирования.

Каждый студент получает индивидуальное задание на построение регрессионной модели конкретного автомобиля или его механизма и определение оптимальных параметров. Построение регрессионной модели осуществляется на основе вычислительных экспериментов на исходной теоретической математической модели объекта. Используются модели трогания с места автомобиля, разгона, переключения передач. Освоению подлежат различные планы эксперимента (полнофакторные, дробнофакторные, первого и второго порядков), методы поиска условного и безусловного экстремумов целевой функции.

Подготовка параметров автомобиля и построение его исходной теоретической математической модели исследуемого режима выполняется студентами до начала проведения лабораторного занятия, используя учебники и справочную литературу [1–9].

На лабораторных занятиях студенты осуществляют формирование рабочей компьютерной программы исследования на основе использования программных обеспечений, разработанных кафедрой «Транспортные и технологические машины» в среде MATLAB.

Выполненные лабораторные работы оформляются в виде отдельных индивидуальных отчетов по каждой работе и представляются на кафедру. Оформление отчета и защита каждой выполненной лабораторной работы должны осуществляться в течение семи дней после проведенного лабораторного занятия.

Отчет по лабораторной работе должен содержать исходные данные (принципиальную схему с параметрами её компонентов, динамическую модель, воздействия внешней среды), таблицы результатов выполненных экспериментов, построенные регрессионные модели и их параметры, полученные значения оптимальных параметров объекта с оценкой достигнутых результатов, графики построенных характеристик. В отчёте даётся обоснование выбора критериев оптимальности и принятой студентом стратегии решения многокритериальной задачи оптимизации.

Лабораторные работы выполняются студентами в компьютерных классах университета. Перед началом выполнения планируемого цикла работ преподаватель знакомит студентов с правилами охраны труда и оформляет протокол проверки знаний этих правил. Контроль за выполнением студентами правил охраны труда осуществляет преподаватель, проводящий лабораторные занятия.

## Основные понятия и определения математических моделей

Проектирование и исследование процессов функционирования технических объектов осуществляется на основе компьютерных технологий. Важнейшим элементом компьютерной технологии является математическая модель объекта проектирования.

Различают следующие основные виды математических моделей: детерминированные и вероятностные; теоретические и экспериментальные факторные; линейные и нелинейные; динамические и статические; непрерывные и дискретные; функциональные и структурные [1].

Математические модели могут быть представлены в нескольких формах: инвариантной, алгоритмической, аналитической, графической (схемной), матричной, табличной.

**Инвариантная форма** математической модели представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических) вне связи с методом решения уравнений.

В **алгоритмической форме** соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма – последовательности вычислений.

**Аналитическая модель** представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (обычно в виде зависимостей выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров). Это простейшие модели, полученные в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы.

**Графическая модель** представляется в виде динамических моделей, графов, функциональных, кинематических и алгоритмических схем, диаграмм, циклограмм и т. п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей. Такими же свойствами обладают **матричная** и **табличная модели**.

Математическая модель технического объекта предназначена для адекватного описания его физических свойств и определения зависимостей показателей качества и эффективности (выходных параметров) проектируемого объекта от параметров его компонентов (внутренних параметров) и параметров внешней среды (внешних параметров), оказывающей на объект возмущающие воздействия.

Наиболее общее и полное описание физических свойств объекта можно обеспечить посредством теоретических математических моделей, основой построения которых является строгое соблюдение физических законов, описывающих протекание рабочих процессов моделируемого объекта в процессе его функционирования, прежде всего **закона сохранения энергии**.

Методика построения теоретических математических моделей механизмов автомобиля изложена в учебной дисциплине «Компьютерные модели автомобилей».

Для сложных многомерных технических объектов, содержащих множество механизмов различной физической природы, построить адекватную математическую модель чрезвычайно сложно, а иногда практически невозможно. В этом случае целесообразно использовать **экспериментальные факторные модели**. Для получения таких моделей проводят экспериментальные исследования процессов функционирования существующих технических объектов в реальных эксплуатационных условиях, либо в контролируемых тестовых режимах испытаний.

При проведении испытаний измеряют значения изменяемых параметров технического объекта и воздействий внешней среды. Исследуемый объект представляется в виде «чёрного ящика» без математического описания его внутренних физических свойств (рисунок 1). На его вход подаются некоторые переменные  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$ , а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные  $\vec{Y}$ . В число переменных  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  входят внутренние и внешние параметры объекта исследования, подлежащие оптимизации на основе построенной экспериментальной модели, а переменные  $\vec{Y}$  – это показатели качества и эффективности объекта, принимаемые в качестве критериев оптимальности [1].

Переменными  $\vec{X}$  можно в процессе эксперимента управлять, задавая их значения и

поддерживая на постоянных уровнях. Переменные  $\vec{Z}$  изменяются случайным образом, ими управлять невозможно. Кроме того, при проведении эксперимента на реальном физическом объекте на него всегда действуют случайные неконтролируемые помехи  $\vec{E}$ . В результате даже в случае только детерминированных воздействий на объект  $\vec{X}$  на его выходе получаем случайный процесс  $\vec{Y}$ . Переменные  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  называют **факторами**, а переменные  $\vec{Y}$  – **функциями отклика**.

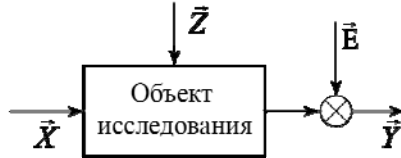


Рисунок 1 – Схема объекта исследования при построении экспериментальной факторной модели

Различают эксперименты пассивные и активные. Если в процессе эксперимента факторы принимают случайные значения и ими управлять нельзя, **эксперимент называют пассивным**. В пассивном эксперименте в определённые моменты времени одновременно измеряют значения факторов  $\vec{Z}$  и функций отклика  $\vec{Y}$ . После проведения необходимого количества опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели и построить вероятностные регрессионные модели для всех функций отклика  $y_i$ , составляющих вектор  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

**Активным называется эксперимент**, когда значения факторов задают и поддерживают их неизменными на заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента. В таком эксперименте существуют только постоянные (детерминированные) управляемые факторы  $\vec{X}$  и функции отклика  $\vec{Y}$ . Но поскольку в любом эксперименте на объект из внешней среды всегда поступает множество различных воздействий случайного характера  $\vec{E}$  (см. рисунок 1), которые не регистрируются исследователем, то каждая функция отклика  $y_i$  оказывается также случайной величиной. Следовательно, **экспериментальная факторная модель в любом случае вероятностная**.

В данном методическом пособии освоению подлежит методика построения экспериментальных факторных моделей, осуществляемых на основе проведения активных экспериментов. Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного.

Общий вид регрессионной модели, связывающей функцию отклика  $y$  с вектором факторов  $\vec{X}$ , имеет вид

$$y = \sum_{j=0}^d b_j f_j(\vec{X}), \quad (1)$$

где  $b_j$  –  $j$ -й коэффициент уравнения регрессии, входящий в состав вектора  $\vec{b}$  искомых параметров регрессионной модели:  $\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_d)$ ;

$f_j(\vec{X})$  –  $j$ -я базисная функция уравнения регрессии;

$\vec{X}$  – вектор факторов,  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

$n$  – количество факторов.

Базисные функции уравнения регрессии представляют собой вектор

$$\vec{f}(\vec{X}) = [f_0(\vec{X}), f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \dots, f_d(\vec{X})].$$

В качестве базисных функций наиболее часто используют переменные простейших полиномов первой и второй степеней. Примеры полиномов первой степени при двух факторах  $x_1$  и  $x_2$ :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2; \quad (2)$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2. \quad (3)$$

Полином второй степени при двух факторах

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2. \quad (4)$$

Базисные функции выражения (4) имеют следующий вид:  $f_0(\vec{X}) = 1$ ;  $f_1(\vec{X}) = x_1$ ;  $f_2(\vec{X}) = x_2$ ;  $f_3(\vec{X}) = x_1x_2$ ;  $f_4(\vec{X}) = x_1^2$ ;  $f_5(\vec{X}) = x_2^2$ .

Выражения (2) и (3) представляют собой регрессии первого порядка, т. к. во всех её базисных функциях использованы факторы  $x_i$  только в первой степени. В уравнение регрессии (4) входит ряд базисных функций, содержащих квадраты факторов  $x_i^2$ . Следовательно, это регрессия второго порядка.

Проведение эксперимента на техническом объекте выполняется по определенному плану. **План эксперимента** – совокупность данных, определяющих количество, условия и порядок проведения опытов.

Как отмечалось ранее, в активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения, которые называют **уровнями факторов**. Обычно используют три уровня факторов: верхний, нижний и основной. Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний –1, а основной 0. Основной уровень соответствует центру эксперимента, положение которого определяет вектор  $\vec{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ , где  $n$  – количество факторов.

Координата  $j$ -го фактора в центре эксперимента

$$X_j^0 = (X_{j \min} + X_{j \max})/2, \quad (5)$$

где  $X_{j \min}$ ,  $X_{j \max}$  – минимальное и максимальное значения  $j$ -го фактора в области факторного пространства, в которой проводится эксперимент.

Интервал (шаг) варьирования  $\Delta X_j$  фактора  $X_j$  вычисляется по формуле

$$\Delta X_j = (X_{j \max} - X_{j \min})/2, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = (X_j - X_j^0)/\Delta X_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Различают планы экспериментов первого и второго порядков, применяемые соответственно выбранному порядку уравнения регрессии. Планы первого порядка используют при планировании полного факторного эксперимента (ПФЭ) или дробного факторного эксперимента (ДФЭ). Для построения квадратичных регрессий (4) необходимо применять планы второго порядка, которые обычно состоят из **ядра плана** и **звёздных точек**. Такие планы называют композиционными.

## Основные понятия и определения параметрической оптимизации

Под оптимизацией понимается процесс поиска наилучшего варианта решения задачи выбора структуры и параметров проектируемого технического объекта, обеспечивающих наилучшее сочетание показателей качества и эффективности разрабатываемого проекта.

**Оптимальными называются параметры объекта, доставляющие экстремум целевой функции.** Эту функцию называют целевой, поскольку она содержательно отображает цель поиска, заключающуюся в нахождении таких значений внутренних параметров объекта, при которых получают наилучшее сочетание выходных параметров – показателей качества и эффективности объекта.

**Целевая функция** – скалярная величина. Аргументами целевой функции являются внутренние параметры объекта, подлежащие оптимизации. В теории оптимизации их называют **управляемыми параметрами**.

Обозначим вектор управляемых параметров  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а целевую функцию  $F(\vec{X})$ . Целевая функция может быть представлена геометрически в виде поверхности отклика. Для двумерного объекта, когда количество управляемых параметров  $n = 2$ , поверхность отклика  $F(\vec{X})$  изображают в трёхмерной системе координат  $x_1, x_2, F(\vec{X})$ . При  $n > 2$  получаем гиперповерхность.

Если при поиске оптимальных параметров объекта  $\vec{X}$  на их значения не накладываются ограничения, оптимизацию называют **безусловной**. Экстремум целевой функции в этом случае будет безусловным.

В задачах проектирования технических объектов, как правило, вводятся различные ограничения. Если ограничения наложены на численные значения управляемых параметров, то их называют прямыми ограничениями:

$$x_i > x_{ni}; \quad x_i < x_{vi}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где  $x_{ni}$ ,  $x_{vi}$  – нижнее и верхнее граничные значения оптимизируемых параметров.

В задачах оптимизации могут быть также функциональные ограничения двух видов: ограничения-неравенства и ограничения-равенства, представляемые векторными функциями

$$\vec{\varphi}(\vec{X}) > 0; \quad (9)$$

$$\vec{\psi}(\vec{X}) = 0. \quad (10)$$

Наличие ограничений приводит к задаче **условной оптимизации**, при которой находится **условный экстремум целевой функции**.

Процедура постановки задачи оптимизации носит неформальный характер и включает следующие этапы: **выбор критериев оптимальности, формирование целевой функции, выбор управляемых параметров, назначение ограничений, нормирование управляемых и выходных параметров.**

Основная проблема заключается в выборе критериев и формировании целевой функции. В процессе выполнения поиска оптимального решения улучшение одного из критериев приводит к ухудшению других критериев. Такие критерии называют **конфликтными**. Если определить оптимальные параметры объекта по каждому критерию в отдельности, то они окажутся различными. Поэтому при наличии множества критериев (векторный критерий) возможно лишь некоторое **оптимально компромиссное решение**, которое в наибольшей мере отвечает задаче проектирования.

Поскольку критерий оптимальности векторный  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , то для получения оптимально компромиссного решения его необходимо привести к скалярной целевой функции  $F(\vec{X})$ . Этот процесс называют свёрткой векторного критерия.



Принципы, положенные в основу формирования целевой функции в многокритериальной задаче оптимизации, определяют стратегию её решения. Различают следующие виды стратегий [1]:

- стратегия частного критерия;
- стратегия взвешенной аддитивной компенсации противоречий критериев;
- стратегия мультипликативной компенсации противоречий критериев;
- максиминная стратегия;
- минимаксная стратегия.

Если известны интервалы  $\delta_j$  допустимых изменений критериев  $y_j$  и заданы предельные желаемые значения технических требований  $T_j$  на эти критерии, то целевую функцию можно сформировать на основе выражения

$$F(\vec{X}) = \sum_{j=1}^m c_j \left( \frac{y_j(\vec{X}) - T_j}{\delta_j} \right)^2, \quad (11)$$

где  $y_j(\vec{X})$  –  $j$ -й критерий;

$c_j$  – коэффициент веса, характеризующий значимость  $j$ -го критерия;

$m$  – количество критериев.

Целевая функция (11) подлежит минимизации. Значение  $F(\vec{X})$  в этом случае определяется в основном теми критериями, отклонения которых от  $T_j$  максимальны, поэтому в процессе поиска в первую очередь происходит их улучшение, что приводит к выравниванию и минимизации взвешенных и нормированных отклонений всех критериев с учётом их значимости. Нормирование отклонений обеспечивается выбором значений  $\delta_j$ . В результате реализуется минимаксная стратегия.

## Лабораторная работа № 1. Построение экспериментальной факторной модели на основе ПФЭ

Процесс построения экспериментальной факторной модели на основе полного факторного эксперимента (ПФЭ) состоит из следующих этапов:

- формирование матрицы спектра плана ПФЭ;
- формирование матрицы базисных функций;
- проведение опытов в соответствии с матрицей спектра плана;
- выполнение регрессионного анализа результатов эксперимента.

Регрессионный анализ включает три основных этапа:

- 1) статистический анализ результатов эксперимента;
- 2) получение коэффициентов регрессионной модели (параметров модели);
- 3) оценка адекватности и работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технического объекта.

### 1 Формирование матрицы спектра плана и матрицы базисных функций.

Спектр плана ПФЭ содержит все возможные комбинации нормированных значений факторов  $x_j$  на всех уровнях их варьирования. Количество точек  $N$  спектра плана ПФЭ определяется по формуле

$$N = 2^n, \quad (12)$$

где  $n$  – количество факторов.

Для формирования матрицы спектра плана  $X$  и матрицы базисных функций  $f(\vec{X})$

можно использовать программу *LAB1\_MMA\_REGRESSIA\_PFE*.

## 2 Проведение эксперимента.

В лабораторной работе выполняются вычислительные эксперименты на базе математической модели разгона автомобиля с имитацией дорожных условий, учитывающих случайный микропрофиль опорной поверхности дороги. Осуществляется реализация активного эксперимента при варьировании трёх важнейших параметров автомобиля – полной массы  $m_a$ , кг, максимальной мощности двигателя  $P_{e\max}$ , кВт, и передаточного числа главной передачи  $u_0$ . Эти параметры принимаются в качестве факторов эксперимента. Функциями отклика используются выходные параметры – показатели качества и эффективности, определение которых предусмотрено ГОСТ 22576–90 на испытания скоростных свойств автомобиля [2, 3]. Предлагается использовать три важнейших показателя – время разгона до заданной скорости  $t_v$ , время разгона на участке пути 1000 м,  $t_{1000}$  и расход топлива на участке 2000 м,  $Q_p$ .

Так как микропрофиль дороги представляет собой случайную функцию, то исходная математическая модель объекта вероятностная. Поэтому все заезды автомобиля повторяются несколько раз. Это необходимо для снижения уровня случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели. В данном случае примем повторность опытов  $m = 4$ . В результате будет проведено во время эксперимента  $L = N \times m$  опытов.

Значения каждой принятой функции отклика будут представлять собой матрицу размерности  $L = N \times m$ , в которой  $N$  строк и  $m$  столбцов.

Для проведения эксперимента по разгону автомобиля можно использовать программу *razgon\_avto\_mechanich\_transmishin\_mikroprofil*.

## 3 Статистический анализ результатов эксперимента.

Так как модель движения автомобиля вероятностная, то результаты эксперимента подвергаются статистическому анализу с целью выявления возможных ошибок опытов. Определяют дисперсии воспроизводимости опытов в каждой  $i$ -й точке спектра плана и оценивается их однородность.

Вначале вычисляются выборочные средние опытов во всех точках спектра плана:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где  $u$  – номер параллельного опыта;

$y_{iu}$  – значение функции отклика в  $u$ -м параллельном опыте  $i$ -й точки спектра плана.

Затем вычисляется дисперсия воспроизводимости опыта  $S_i^2$  по данным  $m$  параллельных опытов в каждой  $i$ -й точке спектра плана:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2, \quad i = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Однородность дисперсий  $S_i^2$  оценивается по **критерию Кохрена**

$$G = S_{i\max}^2 / \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (15)$$

Значение  $G$  сравнивается с табличным значением критерия Кохрена  $G_T$ , определяемым при числах степеней свободы  $k_1 = m - 1$  и  $k_2 = N$ . Таблица критериев Кохрена приведена в [1].

Если  $G < G_T$ , гипотеза однородности дисперсий и воспроизводимости опытов прини-

мается. Полученные результаты эксперимента в этом случае качественные и могут быть использованы для построения регрессионной модели объекта. При  $G > G_T$  необходимо либо увеличить количество повторных опытов  $m$ , либо проверить результаты опытов на наличие грубых ошибок по критерию Стьюдента [1]. Грубые ошибки – это брак ряда опытов, которые следует выявить и провести повторно эти опыты.

Если дисперсии  $S_i^2$  однородны, то их усредняют и находят дисперсию воспроизводимости эксперимента:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (16)$$

#### 4 Вычисление коэффициентов регрессионной модели.

Коэффициенты регрессии  $b_j$  при факторах  $x_j$ , включая также свободный член уравнения  $b_0$ , вычисляют по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} \bar{y}_i, \quad j = \overline{0, n}, \quad (17)$$

а коэффициенты при взаимодействиях факторов – по формуле

$$b_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} X_{im} \dots \bar{y}_i, \quad g = \overline{n+1, d}; k, l, m = \overline{1, n}; k \neq l \neq m, \quad (18)$$

где  $n$  – количество факторов.

Вычисление коэффициентов регрессии  $b_j$ ,  $b_g$  предусмотрено программой **LAB1\_MMA\_REGRESSIA\_PFE**.

Полученные значения коэффициентов регрессий – случайные числа. Погрешность их оценивают дисперсией

$$S_{bj}^2 = S_y^2 / (Nm). \quad (19)$$

Из этой формулы видно, что чем больше повторность опытов  $m$ , тем точнее определяются значения коэффициентов регрессии.

#### 5 Оценка адекватности регрессионной модели, полученной на основе ПФЭ.

В регрессионной модели, полученной на основе ПФЭ, количество коэффициентов регрессии  $N_b$  всегда равно числу точек спектра плана  $N$ . Поэтому поверхность функции отклика  $y$  проходит через все точки факторного пространства, координаты которых соответствуют средним выборочным значениям функции в этих точках  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . Следовательно, полученная регрессионная модель адекватна по определению.

Для того чтобы убедиться в её адекватности, вычисляют по уравнению регрессии значения функции отклика во всех точках спектра плана  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$ , и сравнивают между собой вычисленные значения со значениями  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ .

Результаты работы представляются в виде графиков зависимостей принятых целевых функций  $y_1 = t_v, y_2 = t_{1000}, y_3 = Q_p$  в зависимости от нормированных значений факторов  $x_1, x_2, x_3$ .

#### Контрольные вопросы

- 1 Этапы построения экспериментальной факторной модели и их содержание.
- 2 Виды экспериментов, проводимых для построения экспериментальных факторных

моделей, их свойства и характерные особенности.

3 Постулаты регрессионного анализа.

4 Структура уравнения регрессии и выбор её элементов: факторы, функции отклика, базисные функции.

5 Какие параметры технического объекта выбирают в качестве факторов и в качестве функций отклика при построении регрессионной модели?

6 План ПФЭ и его свойства. Матрица спектра плана.

7 Этапы регрессионного анализа и их назначение.

8 Статистический анализ результатов эксперимента, проведенного на исходной вероятностной модели технического объекта.

9 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели, построенной на основе результатов ПФЭ.

## Лабораторная работа № 2. Построение экспериментальной факторной модели на основе ДФЭ

Из выражения (12) очевидно, что с увеличением количества факторов  $n$  число точек спектра плана быстро возрастает. Следовательно, увеличивается количество необходимых опытов. В уравнение регрессии, получаемое на основе ПФЭ, входят все возможные комбинации базисных функций: все линейные эффекты  $x_i, i = \overline{1, n}$ ; эффекты взаимодействия факторов  $x_i x_j \dots$  во всех возможных комбинациях и свободный член  $b_0$ , базисная функция которого равна единице (см. уравнение (3)).

При большом количестве факторов возникают сложные комбинации их взаимодействия. Отображаемую ими физическую сущность объекта трудно представить исследователю. Поэтому при построении многофакторной регрессионной модели обычно ограничиваются линейными эффектами и парными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ оказывается избыточным, т. к. число точек спектра плана  $N$  значительно превышает количество определяемых коэффициентов регрессии  $N_B$ . В результате возникает возможность сокращения числа опытов. Ограничением является лишь необходимость выполнения условия

$$N \geq N_B. \quad (20)$$

Согласно этому условию количество точек спектра плана  $N$  должно быть не менее количества коэффициентов регрессии  $N_B$ .

При трёх факторах, принятых в лабораторной работе № 1 ( $m_a, P_{e_{\max}}, u_0$ ), полное уравнение линейной регрессии моделируемого объекта имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3 + b_6 x_2 x_3 + b_7 x_1 x_2 x_3. \quad (21)$$

Если не учитывать влияние взаимодействующих факторов на функцию отклика  $y$ , уравнение (21) можно упростить:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (22)$$

Это уравнение учитывает только линейные эффекты от факторов  $x_1, x_2, x_3$ , а определению подлежат четыре коэффициента регрессии. Поскольку при этом условии (20) выполняется, то можно провести дробный факторный эксперимент, количество точек спектра плана которого вычисляется по формуле

$$N = 2^{n-p}, \quad (23)$$

где  $p$  – степень дробности.

Принимая  $p = 1$ , получаем  $N = 4$ .

Дробный факторный эксперимент обозначают ДФЭ $2^{n-p}$ . В общем случае процедура построения спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$  содержит четыре этапа.

**Этап 1.** Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ, выполняя соотношение (20).

**Этап 2.** Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана полного факторного эксперимента ПФЭ $2^k$ . Число ведущих факторов  $k$  определяют из соотношения

$$k = n - p. \quad (24)$$

**Этап 3.** Построение матрицы  $X$  спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ . Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ $2^k$ , а во вторую часть должны войти столбцы матрицы для остальных факторов  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ . Столбцы матрицы, соответствующие этим факторам, получают перемножением соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют **генерирующие соотношения**. Генерирующим соотношением называется алгебраическое выражение, устанавливающее связь между одним из факторов  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  и произведением какой-либо комбинации ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , из которых составлено выражение генерирующего соотношения. Выражения генерирующих соотношений не должны совпадать с выражениями базисных функций.

**Этап 4.** Проверка пригодности полученного спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ . Для этого необходимо построить матрицу базисных функций  $f(\bar{X})$ . В ней должны отсутствовать совпадающие столбцы. Это обеспечит выполнение требования ортогональности столбцов, что является одним из важных постулатов регрессионного анализа.

Далее при выполнении лабораторной работы № 2 проводятся те же процедуры, что и в лабораторной работе № 1.

Для получения матрицы спектра плана, матрицы базисных функций, вычисления коэффициентов регрессии по результатам эксперимента и оценки адекватности и работоспособности регрессионной модели рекомендуется использовать программное обеспечение **LAB2\_MMA\_REGRESSIA\_DFE**, разработанное в среде MATLAB.

В таблице 1 приведена матрица спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$  и совмещенная с ней матрица базисных функций регрессии  $f(\bar{X})$ , предназначенные для проведения опытов и получения параметров регрессионной модели, соответствующей выражению (22).

Таблица 1 – Совмещённые матрицы спектра плана и базисных функций

Номер опыта	Базисная функция			
	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

В этой модели количество факторов  $n = 3$ , степень дробности плана  $p = 1$ , количество ведущих факторов  $k = n - p = 2$ . В качестве ведущих факторов приняты  $x_1$  и  $x_2$ , а столбец матрицы, соответствующий фактору  $x_3$ , получен на основе использования генерирующего соотношения  $x_3 = x_1 x_2$ . Как видно из таблицы 1, ортогональность столбцов матрицы базисных функций  $f(\bar{X})$  обеспечена (совпадающие столбцы отсутствуют). Матрица спектра плана  $X$  в таблице 1 выделена прямоугольником.

Коэффициенты регрессии  $b_j$  вычисляются по формулам (17) и (18). В рассматриваемом примере количество коэффициентов регрессии  $N_B$  равно числу точек спектра плана  $N$ , поэтому вычисляемые по уравнению регрессии значения функции отклика во всех точках спектра плана  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$ , будут совпадать со средними выборочными значениями опытов  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . Следовательно, полученная модель оказывается адекватной.

В [1] приведен пример выбора спектра плана ДФЭ для построения регрессионной модели с четырьмя факторами  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , в которой используются базисные функции только с парными взаимодействиями факторов. Показано, что произвольный выбор базисных функций может привести к невыполнению условия ортогональности столбцов матрицы этих функций ([1], см. таблицы 11.6 и 11.7).

В общем случае при использовании ДФЭ количество коэффициентов регрессии  $N_B$  может не совпадать с числом точек спектра плана  $N$ . Важно только выполнение условия (20). Если  $N > N_B$ , в этом случае значения  $\hat{y}_i$  не совпадают с  $\bar{y}_i$  и возникает необходимость проверки модели на адекватность.

Рассмотрим пример. Предположим, что при построении регрессионной модели выбрано четыре фактора и принята следующая структура модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_3x_4. \quad (25)$$

Количество точек спектра плана при степени дробности плана  $p = 1$  будет  $N = 2^{n-p} = 2^{4-1} = 8$ . При построении плана ДФЭ  $2^{n-p}$  примем  $x_1, x_2, x_3$  в качестве ведущих факторов. Для составления столбца матрицы спектра плана  $f_4 = x_4$  необходимо выбрать генерирующее соотношение, составив его из произведения ведущих факторов. Выражение генерирующего соотношения не должно совпадать с входящими в уравнение регрессии базисными функциями. В данном случае можно использовать одно из следующих выражений:  $x_4 = x_1x_3$ ;  $x_4 = x_2x_3$ ;  $x_4 = x_1x_2x_3$ . Используем последнее выражение.

В таблице 2 приведена полученная матрица базисных функций.

Таблица 2 – Матрица базисных функций уравнения регрессии (25)

Номер опыта	Базисная функция						
	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$	$f_4 = x_4$	$f_5 = x_1x_2$	$f_6 = x_3x_4$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Очевидно, что столбцы таблицы, соответствующие базисным функциям  $f_5 = x_1x_2$  и  $f_6 = x_3x_4$ , совпадают. Следовательно, полученная матрица не отвечает требованиям ортогональности столбцов. В этом случае оценки коэффициентов регрессии  $b_5$  и  $b_6$  не будут различаться.

Выбор любого другого варианта генерирующего соотношения из упомянутых возможных также не приводит к удовлетворительному результату. Можно легко убедиться, что при использовании  $x_4 = x_1x_3$  будут совпадать столбцы  $f_1 = x_1$  и  $f_6 = x_3x_4$ , а при  $x_4 = x_2x_3$  совпадут столбцы  $f_2 = x_2$  и  $f_6 = x_3x_4$ . Таким образом, использовать в уравнении (25) базисную

функцию  $f_6 = x_3x_4$  нельзя. Необходимо либо её заменить другой функцией, либо исключить из уравнения. Удовлетворительный вариант достигается заменой её на функцию  $f_6 = x_2x_3$ .

Так как количество коэффициентов регрессии в уравнении (25)  $N_B < N$ , то условие (20) выполняется и можно использовать план ДФЭ  $2^{n-p}$ . Однако при этом поверхность функции отклика  $y = f(\vec{X})$  не будет проходить через все точки факторного пространства с координатами  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . В результате вычисляемые значения функции отклика в этих точках  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$ , не будут совпадать с  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . В этом случае возникает необходимость оценки адекватности полученной регрессионной модели.

Отклонения  $\hat{y}_i$  от  $\bar{y}_i$  оцениваются дисперсией адекватности, вычисляемой по формуле

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N - N_B} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2, \quad (26)$$

где  $m$  – количество параллельных опытов;

$N_B$  – количество коэффициентов регрессии.

Проверку гипотезы об адекватности регрессионной модели выполняют по **критерию Фишера**, вычисляемому из соотношения

$$F = S_{\text{ад}}^2 / S_y^2, \quad (27)$$

где  $S_y^2$  – дисперсия воспроизводимости эксперимента, вычисляемая по формуле (16).

Вычисленное значение статистики  $F$  сравнивают с табличным значением критерия Фишера  $F_T$ , определяемым в зависимости от уровня значимости  $q$  и чисел степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$ , с которыми определялись дисперсии  $S_{\text{ад}}^2$  и  $S_y^2$ :

$$k_1 = N - N_B; \quad (28)$$

$$k_2 = N(m - 1). \quad (29)$$

При  $F < F_T$  полученная модель адекватно описывает физические свойства объекта. Если  $F > F_T$ , гипотеза адекватности модели отвергается и рассматриваются различные варианты проведения повторных опытов [1].

Для проверки работоспособности регрессионной модели используют коэффициент детерминации  $R^2$ , представляющий собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии [1]. Его значение вычисляют по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_B)S_{\text{ад}}^2 + N(m - 1)S_y^2}{m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + N(m - 1)S_y^2}, \quad (30)$$

где  $\bar{y}$  – среднее значение отклика:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i. \quad (31)$$

Модель считается работоспособной при  $R^2 \geq 0,75$ .

### Контрольные вопросы

- 1 Назначение дробного факторного эксперимента (ДФЭ).
- 2 Этапы построения спектра плана ДФЭ и их содержание.
- 3 Генерирующие соотношения и правила их выбора.
- 4 Назначение матрицы базисных функций при проведении ДФЭ.
- 5 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели, построенной на основе результатов ДФЭ.
- 6 Построить матрицу спектра плана и матрицу базисных функций по заданной структуре уравнения регрессии.

### Лабораторная работа № 3. Построение регрессионной модели второго порядка

Целью работы является получение регрессионной модели второго порядка на основе результатов вычислительного эксперимента по разгону автомобиля на теоретической математической модели. Так как исходная математическая модель вероятностная, то эксперименты в каждой точке спектра плана необходимо дублировать. Примем  $m = 4$ , т. е. четырёхкратное дублирование опытов.

При тех же условиях, что и в лабораторных работах № 1 и 2, т. е. при трёх факторах (параметрах автомобиля  $m_a$ ,  $P_{e\max}$ ,  $u_0$ ) необходимо получить регрессионную модель вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1^2 + b_8x_2^2 + b_9x_3^2. \quad (32)$$

Полином (32) содержит основные эффекты, все парные взаимодействия и квадратичные эффекты.

Количество коэффициентов регрессии  $b_j$  в квадратичной модели

$$N_b = [(n+1)(n+2)]/2, \quad (33)$$

что в  $(n+2)/2$  раз больше, чем в линейной модели при таком же количестве факторов. Соответственно возрастает и минимально необходимое число точек спектра плана. Для получения квадратичной модели используется план второго порядка, варьирование факторов в котором осуществляется на трёх уровнях. План второго порядка содержит ядро и звёздные точки. В качестве ядра плана выбирают план первого порядка ПФЭ $2^n$  либо ДФЭ $2^{n-p}$  и дополняют его звёздными точками в количестве  $2n$ . Такой план называется композиционным.

Если ядром плана выбран ПФЭ $2^n$ , то число точек спектра плана определяют по формуле

$$N = 2^n + 2n, \quad (34)$$

а если ядро составляет план ДФЭ $2^{n-p}$ , то

$$N = 2^{n-p} + 2n. \quad (35)$$

В таблице 3 приведена матрица спектра плана, предназначенная для проведения эксперимента при построении квадратичной модели (32).

Первые восемь точек составляют ядро плана, соответствующее плану ПФЭ $2^n$ , а остальные – звёздные точки. В звёздных точках варьируется только один из факторов  $x_i$  на нижнем и верхнем уровнях, а остальные находятся в центре плана эксперимента и их нормированные значения равны нулю.



Таблица 3 – Матрица спектра плана второго порядка

Номер опыта	Фактор			Номер опыта	Фактор		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1	-1	-1	9	-1	0	0
2	+1	-1	-1	10	+1	0	0
3	-1	+1	-1	11	0	-1	0
4	+1	+1	-1	12	0	+1	0
5	-1	-1	+1	13	0	0	-1
6	+1	-1	+1	14	0	0	+1
7	-1	+1	+1				
8	+1	+1	+1				

В таблице 4 приведена матрица базисных функций уравнения (32).

Таблица 4 – Матрица базисных функций

Номер опыта	Базисная функция									
	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$	$f_4 = x_1x_2$	$f_5 = x_1x_3$	$f_6 = x_2x_3$	$f_7 = x_1^2$	$f_8 = x_2^2$	$f_9 = x_3^2$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
9	+1	-1	0	0	0	0	0	+1	0	0
10	+1	+1	0	0	0	0	0	+1	0	0
11	+1	0	-1	0	0	0	0	0	+1	0
12	+1	0	+1	0	0	0	0	0	+1	0
13	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	+1
14	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	+1

Для проведения эксперимента по разгону автомобиля можно использовать программу *razgon\_avto\_mechanich\_transmishin*. В процессе проведения опытов составляется таблица результатов эксперимента, в которую заносят получаемые значения всех функций отклика  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , в каждом опыте (таблица 5).

Таблица 5 – Результаты эксперимента

Номер опыта	Значение функции отклика в опыте		
	$y_1$ ( $t_v, c$ )	$y_2$ ( $t_{1000}, c$ )	$y_3$ ( $Q_p, л$ )
1			
2			
3			
...			

На основе результатов эксперимента определяются коэффициенты уравнений регрессий второго порядка по формулам

$$b_0 = \frac{1}{2(n-1)} \left( \sum_{i=N_1+1}^N \bar{y}_i - \frac{1}{2^{n-p-1}} \sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_i \right); \quad (36)$$

$$b_j = \frac{1}{2 + 2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} \bar{y}_i; \quad (37)$$

$$b_{jk} = \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} X_{ik} \bar{y}_i; \quad (38)$$

$$b_{jj} = \frac{1}{2} \sum_{i=N_1+1}^N X_{ij}^2 \bar{y}_i - b_0, \quad (39)$$

где  $n$  – количество факторов;

$N$  – количество точек спектра плана;

$p$  – степень дробности плана – при использовании ДФЭ.

В формулах (36) и (39)  $N_1$  – число точек ядра спектра плана:

$$N_1 = 2^{n-p}. \quad (40)$$

При выполнении работы можно использовать программное обеспечение **LAB3\_MMA\_REGRESSIA\_KVADRAT**, разработанное в среде MATLAB. Параметры регрессионной модели разгона автомобиля помещают в таблицу 6.

Таблица 6 – Параметры регрессионной модели разгона автомобиля

Обозначение коэффициента	Функция отклика модели разгона автомобиля		
	$y_1$ ( $t_v, c$ )	$y_2$ ( $t_{1000}, c$ )	$y_3$ ( $Q_p, л$ )
$b_0$			
$b_1$			
$b_2$			
$b_3$			
...			

После получения коэффициентов регрессии вычисляют значения функции отклика  $y$  во всех точках спектра плана  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$ , и определяют дисперсию адекватности модели по формуле (26). Затем оценивают её адекватность по критерию Фишера (27) и работоспособность по формуле (30).

Результаты работы представляются в виде графиков зависимостей принятых целевых функций  $y_1 = t_v, y_2 = t_{1000}, y_3 = Q_p$  от нормированных значений факторов  $x_1, x_2, x_3$ .

В заключительной части отчёта по лабораторной работе № 3 необходимо сравнить графики зависимостей всех функций отклика от варьируемых параметров автомобиля, полученные на основе трёх использованных планов экспериментов в выполненных лабораторных работах № 1–3, и дать оценку их результатов.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Виды планов эксперимента и их свойства.
- 2 Выбор плана эксперимента при построении регрессионной модели второго порядка.
- 3 Структура регрессионной модели второго порядка.
- 4 Матрица спектра плана второго порядка и правила её построения. Определение количества опытов.
- 5 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели второго порядка.

6 Построить матрицу спектра плана по заданной структуре уравнения регрессии второго порядка.

#### Лабораторная работа № 4. Регрессионный анализ результатов вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели

Регрессионную модель технического объекта можно построить как на основе физического эксперимента на реальном техническом объекте, так и вычислительного – на его математической модели. Использование математической модели сложного многомерного объекта при решении проектных задач по оптимизации его параметров приводит к значительным затратам времени. Поэтому во многих случаях целесообразно провести вычислительный эксперимент на математической модели объекта, построить регрессионную модель и на её основе решить задачу оптимизации параметров проектируемого объекта.

Рассмотрим методику построения регрессионной модели на основе вычислительного эксперимента на детерминированной математической модели. **Детерминированная математическая модель** характеризуется однозначным соответствием между внешним воздействием на моделируемую систему и её реакцией на это воздействие. Поэтому в каждой точке спектра плана проводят только один опыт, поскольку при повторении опытов в этой же точке получают один и тот же результат.

Но регрессионная модель, как известно, вероятностная, поэтому для оценки адекватности полученной регрессионной модели её необходимо сравнивать с соответствующей вероятностной моделью. Следовательно, на основе результатов вычислительного эксперимента необходимо построить такую модель, которая имела бы все признаки вероятностной модели (средние выборочные значения в точках спектра плана и дисперсии воспроизводимости опытов).

Регрессионный анализ при экспериментах на детерминированных и вероятных моделях включает одни и те же этапы: статистический анализ результатов эксперимента; получение коэффициентов регрессии  $b_j$ ; оценка адекватности и работоспособности полученной модели. Однако содержания первого и третьего этапов в обоих случаях различны.

На первом этапе осуществляется построение модели, имеющей все признаки вероятностной, и осуществляется её статистический анализ. При этом определяют среднее значение функции отклика  $\bar{y}$  и дисперсию модели  $S_y^2$ , оценивающую её погрешность. Эту модель называют **моделью среднего**. Её статистические оценки вычисляют по формулам

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i; \quad (41)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2, \quad (42)$$

где  $y_i$  – значение функции отклика в  $i$ -й точке спектра плана;

$N$  – количество проведенных опытов, равное числу точек спектра плана.

Согласно выражению (41) в модели среднего значение функции отклика во всех точках спектра плана – величина постоянная, равная среднему значению  $\bar{y}$ , полученному в вычислительном эксперименте. Но на самом деле их значения  $y_i$  различны, т. к. являются результатом варьирования значений факторов  $x_i, i = \overline{1, n}$ . Различие значений  $y_i$  во всех точках спектра плана вычислительного эксперимента для модели среднего расценивается как случайный разброс относительно среднего значения  $\bar{y}$ . Поэтому погрешность модели среднего

оценивается дисперсией, вычисляемой по формуле (42).

При проведении вычислительных экспериментов на детерминированных моделях используются планы второго порядка. После определения коэффициентов  $b_j$  осуществляется проверка пригодности полученного уравнения регрессии. Для этого вначале необходимо вычислить по уравнению регрессии значения функции отклика в каждой точке спектра плана  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$ . В уравнение регрессии при вычислении подставляют значения нормированных факторов  $x_i, i = \overline{1, n}$ , в соответствии с матрицей базисных функций. Затем определяется остаточная дисперсия  $S_{\text{ост}}^2$ , оценивающая погрешность полученной модели:

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N - N_{\text{в}}} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2, \quad (43)$$

где  $N_{\text{в}}$  – количество коэффициентов в уравнении регрессии.

Адекватность полученной регрессионной моделью оценивают по критерию Фишера  $F$ , а работоспособность – по коэффициенту детерминации  $R^2$ .

При определении критерия Фишера принимается иная нулевая гипотеза, чем при экспериментах на вероятностных моделях. Здесь нулевая гипотеза гласит о том, что модель среднего  $\bar{y}(\vec{X})$  достаточно хорошо описывает исследуемый процесс. Регрессионная модель окажется адекватной, если выдвинутая гипотеза будет опровергнута.

По критерию Фишера сравнивают дисперсии оцениваемой и противопоставляемой моделей. Последняя должна быть более точной, чем оцениваемая модель. Поэтому в данном случае критерий Фишера равен отношению дисперсии модели среднего  $S_y^2$  к остаточной дисперсии  $S_{\text{ост}}^2$ :

$$F = S_y^2 / S_{\text{ост}}^2. \quad (44)$$

Уравнение регрессии адекватно описывает результаты эксперимента, если

$$F > F_{\text{T}}, \quad (45)$$

где  $F_{\text{T}}$  – табличное значение критерия Фишера, определяемое при принятом уровне значимости  $q$  и числах степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$ , с которыми определены дисперсии  $S_y^2$  и  $S_{\text{ост}}^2$ . Согласно выражениям (42) и (43)  $k_1 = N - 1$ ;  $k_2 = N - N_{\text{в}}$ .

Критерий детерминации определяется по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_{\text{в}})S_{\text{ост}}^2}{(N - 1)S_y^2}. \quad (46)$$

Модель считается работоспособной, если  $R^2 \geq 0,75$ .

#### **Проведение вычислительного эксперимента и получение регрессионной модели.**

Для проведения вычислительного эксперимента используем математическую модель трансмиссии автомобиля, полученную в курсовой работе по дисциплине «ММА» и приведенную в [9]. Это детерминированная математическая модель процесса трогания автомобиля с места посредством включения сцепления. Реализация модели осуществлена в программном обеспечении *Model\_Transmission\_Kursovaia\_Rabota\_MMA* в среде MATLAB.

В качестве **факторов** при проведении эксперимента принимались следующие **внутренние параметры трансмиссии**:

– время нарастания момента трения сцепления  $t_{\text{ф}}$ , с (параметр фрикционного элемента

сцепления);

- коэффициент жёсткости первого упругого элемента трансмиссии  $c_1$ , Н·м/рад;
- коэффициент жёсткости второго упругого элемента трансмиссии  $c_2$ , Н·м/рад;
- относительный коэффициент демпфирования входного вала трансмиссии  $\gamma_1$ .

Для оценки качества и эффективности переходного процесса использованы следующие **выходные параметры трансмиссии**:

- коэффициент динамичности нагрузки в первом упругом элементе  $k_d$ ;
- максимальная мощность трения сцепления  $P_{ф\max}$ , кВт;
- работа трения сцепления за время буксования  $W_{ф}$ , кДж;
- максимальное ускорение при трогании автомобиля с места  $a_{\max}$ , м/с<sup>2</sup>.

Выходные параметры трансмиссии приняты в качестве **функций отклика**:  $y_1 = k_d$ ;  $y_2 = P_{ф\max}$ ;  $y_3 = W_{ф}$ ;  $y_4 = a_{\max}$ . Для нормированных факторов использованы обозначения:  $x_1 \rightarrow t_{ф}$ ;  $x_2 \rightarrow c_1$ ;  $x_3 \rightarrow c_2$ ;  $x_4 \rightarrow \gamma_1$ .

В качестве уравнения регрессии принят **квадратичный полином**, который при числе факторов  $n = 4$  представляется выражением

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_1x_4 + b_8x_2x_3 + b_9x_2x_4 + b_{10}x_3x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_2^2 + b_{13}x_3^2 + b_{14}x_4^2. \quad (47)$$

Для планирования и проведения вычислительного эксперимента необходимо составить матрицу спектра плана второго порядка и таблицу уровней варьирования факторов.

Принимая в качестве ядра плана ПФЭ и учитывая, что число факторов  $n = 4$ , количество опытов вычислим по формуле (34). В данном случае количество опытов (число точек спектра плана)  $N = 24$ .

Интервалы варьирования факторов  $t_{ф}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\gamma_1$  рекомендуется принять равными  $\pm 50\%$  от номинальных значений, соответствующих центру плана. Форма и содержание таблицы уровней варьирования факторов представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Уровни варьирования факторов

Обозначение параметра	Обозначение фактора	Значение в центре плана	Интервал варьирования	Уровень фактора	
				нижний (-1)	верхний (+1)
$t_{ф}$	$x_1$				
$c_1$	$x_2$				
$c_2$	$x_3$				
$\gamma_1$	$x_4$				

В процессе проведения опытов составляется таблица результатов эксперимента, в которую заносят получаемые значения всех функций отклика  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , в каждом опыте (таблица 8).

На основе результатов эксперимента осуществляется построение регрессионной модели. При выполнении работы можно использовать программное обеспечение **LAB4\_MMA\_REGRESSIA\_TRANSMISSION**, разработанное в среде MATLAB.

Коэффициенты регрессий вычисляются по формулам (36)–(40). Полученные значения коэффициентов помещаются в таблицу 9.

Таблица 8 – Результаты эксперимента

Номер опыта	Значение функции отклика в опыте			
	$y_1$ ( $k_d$ )	$y_2$ ( $P_{фmax}$ , кВт)	$y_3$ ( $W_{ф}$ , кДж)	$y_4$ ( $a_{max}$ , м/с <sup>2</sup> )
1				
2				
3				
...				

Таблица 9 – Параметры регрессионной модели трансмиссии автомобиля

Обозначение коэффициента	Функция отклика модели трансмиссии автомобиля			
	$y_1$ ( $k_d$ )	$y_2$ ( $P_{фmax}$ , кВт)	$y_3$ ( $W_{ф}$ , кДж)	$y_4$ ( $a_{max}$ , м/с <sup>2</sup> )
$b_0$				
$b_1$				
$b_2$				
$b_3$				
...				

Результаты проверки адекватности и работоспособности полученной регрессионной модели представляются в таблице 10.

Таблица 10 – Результаты проверки адекватности и работоспособности модели трансмиссии автомобиля

Оценочный параметр	Функция отклика модели трансмиссии автомобиля			
	$y_1$ ( $k_d$ )	$y_2$ ( $P_{фmax}$ , кВт)	$y_3$ ( $W_{ф}$ , кДж)	$y_4$ ( $a_{max}$ , м/с <sup>2</sup> )
Среднее значение результатов эксперимента				
Дисперсия модели среднего				
Остаточная дисперсия				
$F$ -критерий Фишера				
$F_T$ -критерий Фишера				
Коэффициент детерминации				
Оценка адекватности и работоспособности				

Используя полученные уравнения регрессий, необходимо построить графики зависимостей функций отклика  $y_j, j = \overline{1, m}$ , от нормированных значений факторов  $x_i, i = \overline{1, n}$ , и оценить влияние факторов на функции отклика.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Этапы регрессионного анализа результатов вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели технического объекта и их характерные особенности.
- 2 Сущность этапа статистического анализа результатов эксперимента на детерминированной математической модели.
- 3 Назначение модели среднего и её свойства.
- 4 Параметры и характеристики модели среднего и их определение.
- 5 Формулировка гипотезы адекватности модели среднего.
- 6 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели, построенной на основе вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели технического объекта.

## Лабораторная работа № 5. Оптимизация параметров трансмиссии автомобиля

При выполнении предыдущей лабораторной работы получена экспериментальная факторная модель трансмиссии автомобиля. При этом проводился вычислительный эксперимент на теоретической математической модели. Осуществлялось моделирование переходного процесса при трогании автомобиля с места, обусловленного включением сцепления.

Полученная регрессионная модель предназначена для оптимизации параметров трансмиссии автомобиля:

- времени нарастания момента трения сцепления  $t_{\phi}$ , с;
- коэффициента жёсткости первого упругого элемента трансмиссии  $c_1$ , Н·м/рад;
- коэффициента жёсткости второго упругого элемента трансмиссии  $c_2$ , Н·м/рад;
- относительного коэффициента демпфирования входного вала трансмиссии  $\gamma_1$ .

Для оценки качества и эффективности переходного процесса использованы следующие выходные параметры трансмиссии:

- коэффициент динамичности нагрузки в первом упругом элементе  $k_d$ ;
- максимальная мощность трения сцепления  $P_{\phi \max}$ , кВт;
- работа трения сцепления за время буксования  $W_{\phi}$ , кДж;
- максимальное ускорение при трогании автомобиля с места  $a_{\max}$ , м/с<sup>2</sup>.

При оптимизации параметров трансмиссии примем **стратегию минимакса**. Это наиболее эффективная стратегия поиска оптимальных решений. При наличии регрессионной модели технического объекта **целевая функция минимакса** формируется в виде

$$F(\vec{X}) = \sum_{j=1}^m c_j \left( \frac{y_j(\vec{X}) - y_{j\text{extr}}}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right)^2, \quad (48)$$

где  $y_j(\vec{X})$  – текущее значение  $j$ -го критерия, вычисляемое по уравнению регрессии (47) в итерационном процессе поиска экстремума целевой функции;

$y_{j\min}$ ,  $y_{j\max}$  – минимальное и максимальное значения  $j$ -го критерия, достигаемые в области варьирования факторов  $\vec{X}$  в процессе эксперимента;

$y_{j\text{extr}}$  – экстремальное значение  $j$ -го критерия (при максимизации критерия  $y_j(\vec{X})$  принимается  $y_{j\text{extr}} = y_{j\max}$ , а при минимизации –  $y_{j\text{extr}} = y_{j\min}$ );

$c_j$  – коэффициент веса, характеризующий значимость  $j$ -го критерия;

$m$  – количество критериев, используемых в целевой функции.

Значения  $y_{j\min}$  и  $y_{j\max}$  принимаются по графикам, построенным на основе уравнения регрессии (47) в лабораторной работе № 4.

Коэффициенты веса выбирают из условия

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1, \quad c_j > 0. \quad (49)$$

Целевая функция  $F(\vec{X})$  подлежит минимизации. Она позволяет обеспечить максимальные приближения всех критериев к их экстремальным значениям. Для поиска минимума  $F(\vec{X})$  можно использовать разработанное на кафедре ТТМ программное обеспечение *Model\_optimization\_4fakt\_4function* в среде MATLAB.

Результаты оптимизации параметров сводятся в таблицу 11.

Таблица 11 – Результаты оптимизации параметров трансмиссии автомобиля

Обозначение параметра	Значение параметра	
	до оптимизации	после оптимизации
$t_{\phi}$		
$c_1$		
$c_2$		
$\gamma_1$		

### Оценка достигнутых результатов оптимизации параметров трансмиссии.

После проведения оптимизации параметров необходимо оценить достигнутое улучшение критериев оптимальности. Для этого выполняют интегрирование системы дифференциальных уравнений с исходными значениями оптимизируемых параметров и с оптимальными их значениями и определяют значения показателей качества и эффективности.

Полученные значения показателей качества переходного процесса в трансмиссии сводятся в таблицу 12.

Таблица 12 – Значения показателей качества переходного процесса

Показатель качества	$k_d$	$P_{\phi \max}$ , кВт	$W_{\phi}$ , кДж	$a_{\max}$ , м/с <sup>2</sup>
Значение до оптимизации				
Значение после оптимизации				
Коэффициент относительного улучшения показателя $K_{yi}$ , %				

Значение коэффициента  $K_{yi}$  относительного улучшения  $i$ -го показателя качества  $y_i$  определяется по формуле

$$K_{yi} = \pm \left| \frac{y_{исхi} - y_{оптi}}{y_{исхi}} \right| \cdot 100 \%, \quad (50)$$

где  $y_{исхi}$  – значение  $i$ -го показателя качества переходного процесса технического объекта с исходными параметрами элементов;

$y_{оптi}$  – значение этого же показателя, полученное для технического объекта с оптимальными параметрами.

Знак (+) в выражении (50) принимается при улучшении показателя, а знак (–) – при его ухудшении.

В заключение выполненной работы формулируется общая оценка о достигнутых результатах проектирования технического объекта.

Приводятся графики переходных процессов для всех функций фазовых координат и определяемых показателей качества. На графиках отображается процесс определения показателей качества с соответствующими пояснениями в тексте составленного отчёта.

### Контрольные вопросы

- 1 Обоснование целесообразности использования регрессионной модели для оптимизации параметров механизмов автомобиля
- 2 Выбор факторов и функций отклика при построении регрессионной модели механизмов автомобиля.
- 3 Этапы процедуры постановки задачи оптимизации параметров технического объекта



и их содержание.

4 Стратегии решения многокритериальных задач оптимизации параметров технических объектов и их характерные особенности.

5 Сущность стратегии минимакса и применение этой стратегии для решения задач оптимизации параметров автомобиля и её механизмов.

6 Формирование выражения целевой функции минимакса при оптимизации параметров механизмов автомобиля на основе их регрессионных моделей.

## Лабораторная работа № 6. Методы поиска безусловного экстремума целевой функции

Если при решении задачи оптимизации параметров технического объекта известно аналитическое выражение целевой функции  $F(\vec{X})$  и на параметры  $\vec{X}$  не наложены никакие ограничения, для поиска экстремума целевой функции используют методы безусловной оптимизации. Полученный при этом **экстремум целевой функции** называют **безусловным**.

Сущность метода оптимизации в первую очередь определяется способом выбора направления движения в пространстве оптимизируемых параметров  $\vec{X}$  к экстремуму целевой функции. Параметры объекта, подлежащие оптимизации, называют **управляемыми параметрами**. В зависимости от порядка используемых производных целевой функции по управляемым параметрам для определения направления движения различают методы безусловной оптимизации нулевого, первого и второго порядков [1].

В **методах нулевого порядка** информация о производных не используется. Поиск экстремума осуществляется только на основе вычисления значений целевой функции. Такие методы называют **методами прямого поиска**.

**Методы первого порядка** используют значения целевой функции и её первых частных производных по управляемым параметрам. Их называют **градиентными методами**.

В **методах второго порядка** для поиска экстремума используются значения целевой функции, её первых и вторых частных производных.

В качестве примеров методов прямого поиска рассмотрим метод покоординатного спуска (метод Гаусса – Зейделя) и метод случайного поиска. Эти методы универсальны и применимы при любой поверхности целевой функции  $F(\vec{X})$ .

### Метод покоординатного спуска.

В этом методе направление движения к экстремуму выбирается поочерёдно вдоль каждой из координатных осей управляемых параметров  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

При постановке задачи оптимизации обычно предполагается поиск минимума целевой функции  $F(\vec{X})$ . Тогда улучшение её на  $(k + 1)$ -м шаге поиска выражается условием

$$F(\vec{X}_{k+1}) < F(\vec{X}_k). \quad (51)$$

Параметрами алгоритма покоординатного спуска принимают начальный шаг движения вдоль координат  $h_0$ , коэффициент уменьшения шага  $\gamma$  и минимальный шаг  $h_{\min}$ .

Поверхность целевой функции можно представить геометрически только в двумерной задаче, когда оптимизации подлежат лишь две координаты  $x_1$  и  $x_2$  (параметры оптимизации). Поэтому в дальнейшем изложении будет рассматриваться лишь двумерный объект оптимизации.

Из выбранной начальной точки поиска  $\vec{X}_0 = (x_{10}, x_{20})$  выполняется пробный шаг  $h_0$  в положительном направлении оси  $x_1$ , согласно выражению  $x_{1,1} = x_{1,0} + h_0$ , вычисляется значение целевой функции  $F(\vec{X}_1)$  и сравнивается с её значением в начальной точке  $F(\vec{X}_0)$ . Ес-

ли  $F(\vec{X}_1) < F(\vec{X}_0)$ , это направление эффективно и оно принимается для осуществления дальнейшего пошагового движения к экстремуму в соответствии с выражением

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + h_0. \quad (52)$$

В противном случае производится возврат в исходную точку  $\vec{X}_0$  и движение осуществляется в отрицательном направлении оси  $x_1$ :

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} - h_0. \quad (53)$$

Движение в выбранном направлении оси  $x_1$  выполняется до тех пор, пока целевая функция улучшается, т. е. выполняется условие (51). При его нарушении осуществляются аналогичные спуски вдоль оси  $x_2$ . В дальнейшем продолжают поочерёдные спуски вдоль обеих осей. Если в очередном цикле поиска  $N$  движение оказалось невозможным ни по одной из осей, тогда уменьшается шаг поиска

$$h_{N+1} = \gamma h_N, \quad (54)$$

где  $h_N, h_{N+1}$  – шаги в  $N$ -м и  $N+1$ -м циклах спусков;

$\gamma$  – коэффициент уменьшения шага,  $0 < \gamma < 1$ .

Далее поиск экстремума продолжается с уменьшенным шагом. Условие окончания поиска

$$h_{N+1} < h_{\min}. \quad (55)$$

Полученная точка  $\vec{X}_k$  принимается в качестве искомой точки экстремума  $\vec{X}^*$ .

Пример поиска экстремума методом покоординатного спуска для двумерной задачи при  $\vec{X} = (x_1, x_2)$  показан на рисунке 2.

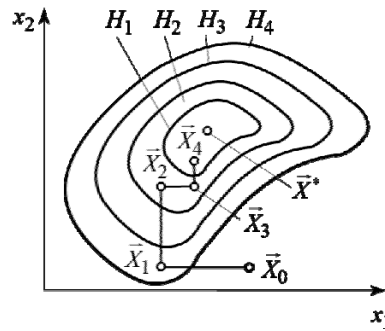


Рисунок 2 – Поиск экстремума целевой функции методом покоординатного спуска

Линии равных уровней целевой функции  $F(\vec{X})$  обозначены  $H_1, H_2, \dots, H_4$ , причём  $H_1 < H_2 < H_3 < H_4$ . Траектория поиска изображена жирной линией  $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_4$ .

#### Метод случайного поиска.

В этом методе выбирается случайное направление движения в пространстве управляемых параметров  $\vec{X}$ , проверяется его перспективность, согласно условию (51), и при благоприятном результате осуществляется движение в этом направлении одновременно по всем координатам

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + h\vec{\alpha}_k, \quad (56)$$

где  $h$  – шаг поиска;

$\vec{\alpha}_k$  – случайный вектор, определяющий направление поиска.

Для получения вектора  $\vec{\alpha}_k$  используются  $n$  значений равномерно распределённой в интервале  $[-1, 1]$  случайной величины  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Поиск прекращается, если было выполнено подряд предельное число неудачных попыток  $L$ .

### Метод градиента.

**Градиент целевой функции** – векторная величина, компонентами которой являются частные производные целевой функции  $F(\vec{X})$  по управляемым параметрам  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\text{grad } F(\vec{X}) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right), \quad (57)$$

Направление вектора градиента в каждой точке поверхности отклика  $F(\vec{X})$  совпадает с направлением наиболее быстрого возрастания целевой функции, т. е. с наиболее крутым подъёмом поверхности  $F(\vec{X})$ . При минимизации целевой функции осуществляется антиградиентное движение.

Алгоритм спуска определяется выражением

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + h_k \vec{S}_k, \quad (58)$$

где  $h_k$  – шаг поиска;

$\vec{S}_k$  – единичный вектор направления движения,

$$\vec{S}_k = - \frac{\text{grad } F(\vec{X}_k)}{\|\text{grad } F(\vec{X}_k)\|}, \quad (59)$$

где  $\|\text{grad } F(\vec{X}_k)\|$  – норма вектора градиента (длина вектора), вычисленная для точки  $\vec{X}_k$ ,

$$\|\text{grad } F(\vec{X}_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F(\vec{X}_k)}{\partial x_i} \right]^2}. \quad (60)$$

На каждом шаге поиска определяется вектор направления движения  $\vec{S}_k$  и выполняется шаг  $h_k$  к следующей точке  $\vec{X}_{k+1}$  согласно выражению (58).

Предусматривается возможность уменьшения шага поиска  $h_k$  по формуле

$$h_k = \gamma h_{k-1}. \quad (61)$$

Условия окончания поиска

$$h_k < h_{\min}; \quad (62)$$

$$\|\text{grad } F(\vec{X}_{k+1})\| < \varepsilon, \quad (63)$$

где  $\varepsilon$  – малая положительная величина.

### Метод наискорейшего спуска.

Этот метод также градиентный. Его алгоритм отличается от предыдущего тем, что если на очередном шаге выполняется условие (51), то движение продолжается в прежнем направлении без вычисления градиента. Это позволяет ускорить поиск, поскольку вектор  $\vec{S}_k$  определяется значительно реже и только тогда, когда движение в предыдущем направлении

невозможно.

### **Метод Ньютона.**

Этот метод относится к методам второго порядка. Используется информация о целевой функции, её первых и вторых частных производных. Это обеспечивает более высокую скорость сходимости.

Вектор оптимизируемых параметров на  $(k + 1)$ -м шаге вычисляется из выражения

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \Delta\vec{X}_{k+1}, \quad (64)$$

где  $\Delta\vec{X}_{k+1}$  – поправка вектора  $\vec{X}_k$  на  $(k + 1)$ -й итерации.

Значение  $\Delta\vec{X}_{k+1}$  получается на основе решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$[H(\vec{X}_k)]\Delta\vec{X}_{k+1} = -\text{grad} F(\vec{X}_k), \quad (65)$$

где  $H(\vec{X}_k)$  – матрица Гессе.

Решение системы уравнений (65) осуществляется методом Гаусса на каждом шаге итераций поиска.

Выполнение лабораторной работы № 6 осуществляется с использованием программного обеспечения *LAB6\_Bezuslovnaja\_Optimizatsija*, разработанного в среде MATLAB.

Каждому студенту выдаётся выражение целевой функции  $F(\vec{X})$  с указанием координат начальной точки поиска безусловного экстремума  $\vec{X}_0$ . Задаются предварительные значения области поиска  $x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}$  и  $x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}$  и несколько значений высоты сечений поверхности отклика целевой функции  $H_1, H_2, \dots, H_4$ , для которых необходимо построить линии равных уровней. В процессе выполнения работы выполняется корректировка области поиска и увеличивается количество линий равных уровней для их равномерного прохождения и локализации области экстремума.

В отчёте по результатам решения задачи безусловной оптимизации приводятся графики линий равных уровней целевой функции и поверхности отклика целевой функции. Составляются выражения для вычисления градиента целевой функции и матрицы Гессе. Приводятся результаты поиска безусловного экстремума целевой функции.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Формулировка понятия «оптимальные параметры».
- 2 Какие параметры технического объекта подлежат оптимизации? Что принимается в качестве критериев оптимальности?
- 3 В чём заключается сущность безусловной оптимизации?
- 4 Классификация методов поиска экстремума целевой функции.
- 5 Поиск безусловного экстремума методом покоординатного спуска.
- 6 Метод случайного поиска безусловного экстремума.
- 7 Поиск безусловного экстремума методом градиента. Формулы алгоритма метода градиента.
- 8 Поиск безусловного экстремума методом наискорейшего спуска.
- 9 Метод Ньютона при поиске безусловного экстремума. Формулы алгоритма метода Ньютона.
- 10 Определение градиента целевой функции и матрицы Гессе по заданному выражению целевой функции.

## Лабораторная работа № 7. Оптимизация параметров технических объектов с учётом ограничений

Задачи проектирования технических объектов характеризуются наличием ограничений на параметры оптимизации. Поэтому при решении задач оптимизации осуществляется поиск **условного экстремума целевой функции**.

Ограничения подразделяются на функциональные и прямые. **Функциональные ограничения** представляют собой нелинейные функции параметров оптимизации. **Прямые ограничения** накладываются непосредственно на параметры, подлежащие оптимизации (управляемые параметры).

Математическая формулировка задачи условной оптимизации имеет следующий вид:

$$F(\vec{X}); \quad (66)$$

$$\vec{X} \in \vec{X}_p$$

$$\vec{\varphi}(\vec{X}) > 0; \quad (67)$$

$$\vec{\psi}(\vec{X}) = 0; \quad (68)$$

$$x_{\text{ни}} \leq x_i \leq x_{\text{ви}}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (69)$$

где  $F(\vec{X})$  – целевая функция;

$\vec{X}$  – вектор параметров технического объекта, подлежащих оптимизации,  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

$\vec{X}_p$  – вектор, определяющий область работоспособности объекта, задаваемую ограничениями (67)–(69);

$\vec{\varphi}(\vec{X})$  – вектор функций ограничений-неравенств,  $\vec{\varphi}(\vec{X}) = [\varphi_j(\vec{X})]$ ,  $j = \overline{1, L}$ ;

$\vec{\psi}(\vec{X})$  – вектор функций ограничений-равенств,  $\vec{\psi}(\vec{X}) = [\psi_k(\vec{X})]$ ,  $k = \overline{1, M}$ ;

$N$  – количество прямых ограничений на параметры;

$L, M$  – количества функций ограничений-неравенств и ограничений-равенств.

Исходную задачу условной оптимизации можно преобразовать к задаче безусловной оптимизации. Для этого целевую функцию  $F(\vec{X})$  необходимо заменить функцией  $\Phi(\vec{X})$ , которая должна быть максимально близкой к функции  $F(\vec{X})$  в области работоспособности  $\vec{X}_p$ , а при выходе из этой области становиться существенно больше, чем функция  $F(\vec{X})$ . При нарушении ограничений, т. е. при выходе из области  $\vec{X}_p$ , налагается штраф, что приводит к ухудшению целевой функции  $\Phi(\vec{X})$ . Значение функции  $\Phi(\vec{X})$  вычисляется по формуле

$$\Phi(\vec{X}) = F(\vec{X}) + \theta_m(\vec{X}), \quad (70)$$

где  $\theta_m(\vec{X})$  – функция штрафа.

Такой метод решения задач условной оптимизации называют **методом штрафных функций**.

Для учёта ограничений-равенств (68) используется квадратичная функция штрафа

$$\theta_m(\vec{X}) = \sum_{k=1}^M r_{mk} [\psi_k(\vec{X})]^2, \quad (71)$$

где  $r_{mk}$  – параметр штрафа для  $k$ -й функции ограничения  $\psi_k(\vec{X})$  в  $m$ -м цикле поиска экстремума.

Согласно выражению (71) отклонение функции  $\psi_k(\vec{X})$  от нулевого значения сопровождается наложением штрафа на целевую функцию  $F(\vec{X})$ .

Для учёта ограничений-неравенств (67) используется несколько различных функций штрафа. Наиболее часто применяют функцию квадрата срезки, описываемую выражением

$$\theta_m(\vec{X}) = \sum_{j=1}^L r_{mk} [\min\{0, \psi_k(\vec{X})\}]^2. \quad (72)$$

Из выражения (72) следует, что при  $\psi_j(\vec{X}) > 0$  получаем  $\theta_m(\vec{X}) = 0$ , т. е. при выполнении условия данного ограничения штраф на целевую функцию  $F(\vec{X})$  не налагается.

Задача поиска безусловного экстремума целевой функции  $\Phi(\vec{X})$  решается многократно (не менее 3...5 раз) с различными значениями параметра штрафа  $r_{mk}$ , пока результаты поиска на смежных циклах  $(m-1)$  и  $m$  не окажутся достаточно близкими. После каждого цикла поиска вектор оптимизируемых параметров  $\vec{X}$  постепенно приближается к решению  $\vec{X}_y^*$ . Это обусловлено тем, что в каждом последующем цикле поиска параметр штрафа  $r_m$  ступенчато возрастает и усиливается влияние функции штрафа на функцию  $\Phi(\vec{X})$ .

Условие окончания поиска

$$|\Phi(\vec{X}^{(m)})| - |\Phi(\vec{X}^{(m-1)})| < \varepsilon, \quad (73)$$

где  $\varepsilon$  – предельная величина разности значений функции  $\Phi(\vec{X})$  в двух смежных циклах поиска  $m$  и  $(m-1)$ .

При выполнении условия (73) полученное значение вектора оптимизируемых параметров  $\vec{X}$  принимается в качестве решения задачи условной оптимизации  $\vec{X}_y^*$ .

На рисунке 3 приведен пример решения задачи поиска условного экстремума  $\vec{X}_y^*$ .

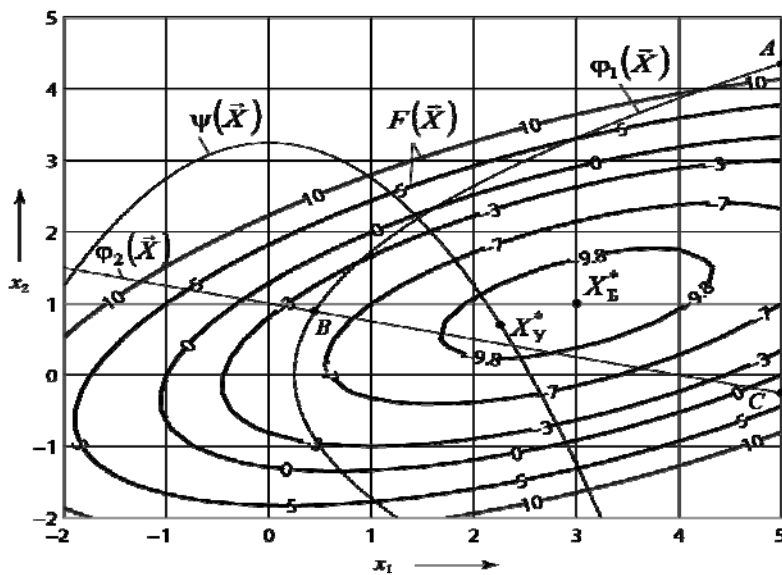


Рисунок 3 – Поиск условного экстремума целевой функции методом штрафных функций

Линии равных уровней целевой функции  $F(\vec{X})$  изображены жирными сплошными линиями и обозначена точка её безусловного экстремума  $\vec{X}_B^*$ . Ограничение-равенство  $\psi(\vec{X})$  и ограничения-неравенства  $\varphi_1(\vec{X})$  и  $\varphi_2(\vec{X})$  показаны тонкими сплошными линиями. Согласно этим ограничениям, решение должно находиться в области  $ABC$ . Однако необходимость выполнения условия функции ограничения-равенства  $\psi(\vec{X})$  требует, чтобы точка условного экстремума  $\vec{X}_y^*$  находилась на линии этого ограничения. Следовательно, ограничения-равенства более жёсткие, чем ограничения-неравенства. При наличии ограничения-равенства условный экстремум целевой функции  $\vec{X}_y^*$  находится на линии этого ограничения в точке, в которой целевая функция  $F(\vec{X})$  имеет наименьшее значение на линии ограничения-равенства  $\psi(\vec{X})$ . Точка условного экстремума  $\vec{X}_y^*$  обозначена кружком.

Поиск условного экстремума  $\vec{X}_y^*$  обычно осуществляется методом наискорейшего спуска. При этом задаётся начальная точка поиска  $\vec{X}_0$ .

На рисунке 4 приведена иллюстрация влияния ограничений на поверхность отклика и указаны значения высоты этой поверхности. Сравнивая между собой рисунки 3 и 4, легко видеть влияние функций штрафа  $\theta_m(\vec{X})$  на уровни функции  $\Phi(\vec{X})$ , обусловленное наложенными ограничениями  $\psi(\vec{X})$ ,  $\varphi_1(\vec{X})$  и  $\varphi_2(\vec{X})$ . Из рисунка 4 явно видно, что основное влияние на формирование функции штрафа в области условного экстремума оказывают функции ограничений  $\psi(\vec{X})$  и  $\varphi_2(\vec{X})$ . Точка условного экстремума на этом рисунке также обозначена кружком.

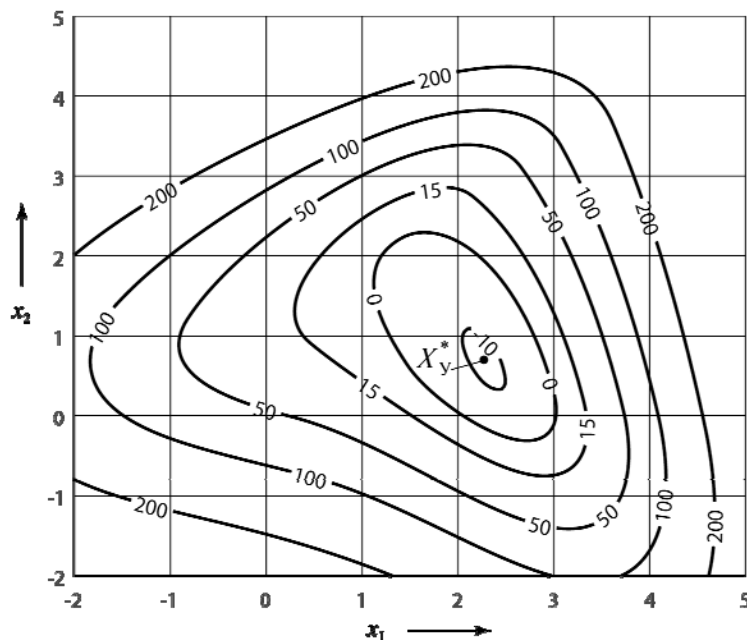


Рисунок 4 – Отображение линий равных уровней целевой функции с учётом влияния на неё штрафных функций

Для решения задачи условной оптимизации параметров технического объекта можно использовать программное обеспечение *LAB7\_Uslovnaja\_Optimizatsija*, разработанное в среде MATLAB. В программу вводятся выражения целевой функции и функций ограничений.

По результатам решения задачи условной оптимизации осуществляется построение графиков линий равных уровней целевой функции  $F(\vec{X})$ , функций ограничений  $\varphi_1(\vec{X})$ ,  $\varphi_2(\vec{X})$  и  $\psi(\vec{X})$  (см. рисунок 3), графиков линий равных уровней функции  $\Phi(\vec{X})$ , обусловленных влиянием функций ограничений (см. рисунок 4), а также графики поверхностей отклика целевой функции  $F(\vec{X})$  и функции  $\Phi(\vec{X})$ .

В отчёте по лабораторной работе также приводятся выражения целевой функции  $F(\vec{X})$ , функций ограничений  $\varphi_1(\vec{X})$ ,  $\varphi_2(\vec{X})$  и  $\psi(\vec{X})$ , составляются выражения функций штрафа  $\theta_m(\vec{X})$  для каждого ограничения и выражения функции  $\Phi(\vec{X})$ . Приводятся результаты поиска условного экстремума целевой функции.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Сущность решения задач условной оптимизации параметров технического объекта.
- 2 Математическая формулировка задачи условной оптимизации.
- 3 Виды ограничений при решении задач условной оптимизации параметров технического объекта.
- 4 Способ преобразования задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. Понятие штрафной функции.
- 5 Формирование функции штрафа при учёте ограничения-равенства.
- 6 Формирование функции штрафа при учёте ограничения-неравенства.
- 7 Алгоритм метода штрафных функций при поиске условного экстремума целевой функции.

## **Лабораторная работа № 8. Вероятностные характеристики процессов функционирования механизмов автомобиля в условиях случайных воздействий внешней среды**

При движении автомобиля в реальных дорожных условиях он находится под воздействиями внешней среды, характеристики которых носят случайный характер. В результате нагрузки всех механизмов автомобиля и скорости движения их конструктивных элементов также изменяются случайным образом. Следовательно, процессы их функционирования и показатели качества эффективности этих процессов имеют вероятностный характер. Для их оценки необходимо использовать методы статистического анализа.

При выполнении статистического анализа процессов функционирования автомобиля определяются оценки **математических ожиданий, дисперсий, корреляционных функций и спектральных плотностей** каждого случайного процесса, а также осуществляется построение характеристик **распределения вероятностей** этих процессов [1]. Обычно определяют эти характеристики для нагрузок в упругих элементах механизмов трансмиссии и подвески автомобиля, а также ускорений колебаний сосредоточенных масс. Так, для поддресоренной массы, водителя и пассажиров определяют максимальные и средние квадратические значения ускорений (СКЗУ) в низкочастотном диапазоне, в первых пяти октавных полосах частот, а также скорректированное по частоте СКЗУ на сиденьях и в характерных точках поддресоренной массы [2].

Для выполнения вероятностного анализа случайных процессов функционирования механизмов автомобиля необходимо получить графики их реализации во времени, т. е. некоторые множества дискретных значений исследуемых ординат, изменяемых во времени или по пути. Поскольку они являются следствием случайных внешних воздействий, то необходимо прежде всего иметь вероятностное описание их характеристик. Основное влияние на процессы функционирования механизмов автомобиля оказывают характеристики дорожных усло-



вий, прежде всего характеристики изменения уклонов дороги и неровностей дорожного покрытия – микропрофиля дороги [2].

Для описания характеристик микропрофиля дороги используют корреляционные функции. Эти функции получают в результате обработки реализации микропрофиля дороги. Полученные графики корреляционных функций аппроксимируют соответствующими аналитическими функциями. Используют два вида функций – экспоненциальную и экспоненциально-косинусную [1, 2]. Выражения этих функций имеют вид

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 e^{-\alpha|x_s|}; \quad (74)$$

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 e^{-\alpha|x_s|} \cos \beta x_s, \quad (75)$$

где  $R_q(x_s)$  – корреляционная функция;

$\sigma_q^2$  – дисперсия ординат  $q(x_s)$  микропрофиля дороги;

$x_s$  – аргумент корреляционной функции,  $x_s = n\Delta x$ ;

$\Delta x$  – дискретное приращение аргумента – шаг его изменения;

$n$  – номер дискретного значения аргумента;

$\alpha$  – коэффициент, характеризующий затухание корреляционной функции;

$\beta$  – коэффициент, характеризующий колебательный процесс.

Результирующее выражение корреляционной функции микропрофиля дороги представляет собой некоторую сумму этих функций, например,

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 (A_1 e^{-\alpha_1|x_s|} + A_2 e^{-\alpha_2|x_s|} \cos \beta_1 x_s + A_3 e^{-\alpha_3|x_s|} \cos \beta_2 x_s), \quad (76)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – коэффициенты влияния соответствующих составляющих корреляционной функции, причём  $A_1 + A_2 + A_3 = 1$ .

Коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  измеряются в 1/м.

Для формирования реализации микропрофиля дороги выбирают шаг дискретизации  $\Delta x$  и объём выборки  $N$ . Обычно принимают  $\Delta x = 0,5$  м, а минимальный объём выборки  $N = 200 \dots 500$ . Однако с целью повышения точности статистических оценок рекомендуется увеличивать значение  $N$ .

Возникающие под воздействием дорожных неровностей исследуемые процессы механизмов автомобиля также представляются в виде реализаций случайных процессов, на основании которых определяются их вероятностные характеристики.

Рассмотрим алгоритмы определения основных статистических оценок вероятностных характеристик случайных процессов  $x(t)$  [1].

#### **Плотность вероятности.**

Для оценки плотности вероятности случайного процесса  $x(t)$  используется массив чисел, составляющих его реализацию. Представим его в виде графика на рисунке 5.

Вначале необходимо произвести группировку данных массива. Для этого вся область изменения выборки от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  разбивается на  $k_{\text{гр}}$  интервалов одинаковой длины  $\Delta x$  и подсчитывается число элементов выборки, попавших в каждый из указанных интервалов  $n_j, j = 1, k_{\text{гр}}$ . Значениям  $x$ , находящимся в одном и том же интервале  $j$ , приписывается значение  $\bar{x}_j$ , которое соответствует середине данного интервала.

Для определения числа интервалов группирования  $k_{\text{гр}}$  используют различные полуэмпирические соотношения. Одно из них имеет вид

$$k_{\text{гр}} = 1 + 3,2 \lg N. \quad (77)$$

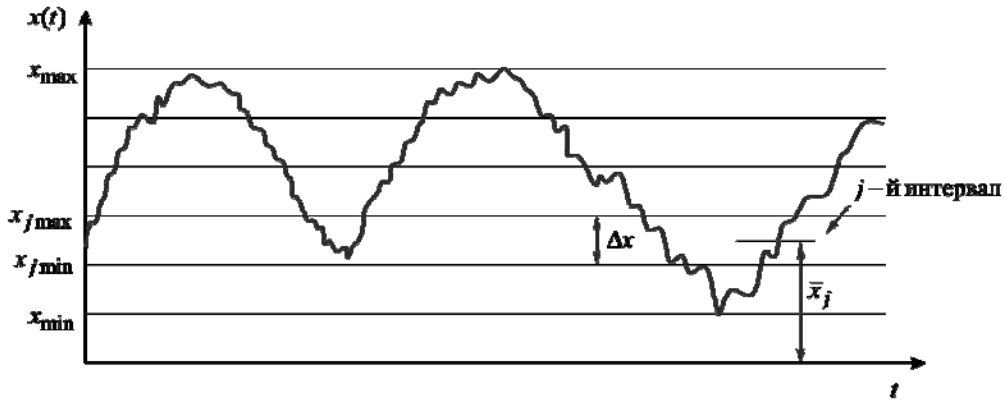


Рисунок 5 – Схема группирования элементов выборки случайного процесса  $x(t)$

Полученное значение  $k_{\text{Гр}}$  округляют в большую сторону до целого числа. Длину интервала вычисляют из соотношения

$$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / k_{\text{Гр}}. \quad (78)$$

Сгруппированные данные формируют эмпирическую функцию плотности вероятности

$$\hat{f}_N(x) = n_j / (N\Delta x) = v_j / \Delta x, \quad (79)$$

где  $v_j = n_j / N$  – относительная частота (частость).

Частость  $v_j$  является несмещённой состоятельной оценкой  $\hat{P}_j$  для вероятности попадания реализаций случайного процесса  $x_i, i = \overline{1, N}$  в  $j$ -й интервал группирования.

На рисунке 6 показана гистограмма распределения случайной величины  $x(t)$ .

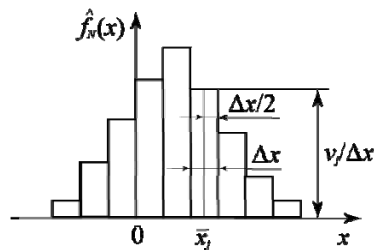


Рисунок 6 – Гистограмма распределения случайной величины  $x(t)$

Для выяснения близости эмпирического распределения какому-либо теоретическому распределению вычисляют оценку  $\chi^2$  критерия Пирсона:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^{k_{\text{Гр}}} (v_j - P_j)^2 / P_j, \quad (80)$$

где  $P_j$  – вероятность попадания случайной величины  $x(t)$  в  $j$ -й интервал, определяемая по выбранному теоретическому распределению.

Полученное значение  $\chi^2$  сравнивается с табличным  $\chi_{\alpha}^2$  с учётом числа степеней свободы  $k$  и уровня значимости  $q$  [1]. При  $\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2$  гипотеза о соответствии эмпирического

распределения выбранному теоретическому принимается.

Значение  $k$  определяется по формуле

$$k = k_{\text{тр}} - r_0 - 1, \quad (81)$$

где  $r_0$  – количество параметров распределения.

Например, параметрами нормального закона распределения являются математическое ожидание  $m_x$  и дисперсия  $\sigma_x^2$ , т. е.  $r_0 = 2$ .

#### **Фильтрация и центрирование ординат случайного процесса.**

Для определения корреляционной функции  $R_x(\tau)$  случайного процесса  $x(t)$  используются центрированные ординаты этого процесса  $x_i^\circ, i = \overline{1, N}$ . Для этого осуществляется фильтрация и центрирование ординат случайного процесса.

Фильтрация реализации случайного процесса производится с целью исключения нестационарностей и приведения его к стационарному виду. Случайный процесс представляется в виде

$$x(t) = \bar{x}(t) + x_i^\circ(t), \quad (82)$$

где  $\bar{x}(t)$  – текущее значение математического ожидания (текущее среднее) случайного процесса.

Для этой цели используют **фильтр низких частот** академика В. С. Пугачёва (рисунок 7). Этот фильтр имеет прямоугольную временную характеристику, описываемую выражением

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq 0,5\tau_\phi; \\ 0 & \text{при } |\tau| > 0,5\tau_\phi, \end{cases} \quad (83)$$

где  $\tau_\phi$  – память фильтра (длительность случайного процесса, покрываемую фильтром).

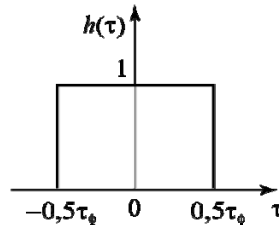


Рисунок 7 – Характеристика фильтра В. С. Пугачёва

Фильтр осуществляет усреднение значений некоторого количества ординат  $n_\phi$ , соответствующих памяти фильтра  $\tau_\phi$ :

$$n_\phi = \tau_\phi / \Delta t, \quad (84)$$

где  $\Delta t$  – шаг дискретизации процесса по времени.

Значение  $\tau_\phi$  выбирают согласно выражению

$$\tau_\phi = T/a, \quad (85)$$

где  $T$  – время реализации случайного процесса;

$a$  – некоторый коэффициент, отождествляемый с числом периодов составляющих случайного процесса, которые необходимо отфильтровать.

Для механических систем рекомендуют принимать  $a = 10$ .

С учётом (83) и (84) характеристика фильтра приводится к виду

$$h(n_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } |n_i| \leq 0,5n_\Phi; \\ 0 & \text{при } |n_i| > 0,5n_\Phi, \end{cases} \quad (86)$$

где  $n_i$  – порядковые номера текущих координат в интервале от  $-0,5n_\Phi$  до  $+0,5n_\Phi$ , покрываемых фильтром.

Оценка текущего значения математического ожидания  $\bar{x}_j(t)$  определяется по формуле

$$\bar{x}_j(t) = \frac{1}{n_\Phi + 1} \sum_{i=-0,5n_\Phi}^{0,5n_\Phi} h(n_i) x_{j+i}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (87)$$

Центрирование ординат реализации случайного процесса  $x(t)$  осуществляется согласно выражению

$$x_j^\circ = x_j - \bar{x}_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (88)$$

Недостающие значения ординат случайного процесса на начальном и конечном участках реализации можно заменять нулями.

#### Корреляционная функция.

Для дискретного случайного процесса корреляционную функцию вычисляют по формуле

$$R_x(\tau) = R_x(n\Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} x_i^\circ x_{i+n}^\circ, \quad (89)$$

где  $x_i^\circ$  – текущая центрированная ордината реализации процесса в момент времени  $t_i$ ;

$x_{i+n}^\circ$  – центрированная ордината в момент времени  $t_i + \tau$ ;

$N$  – объём выборки, определяющий размерность массива значений  $x_i^\circ$ ;

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$  – число, определяющее величину сдвига по оси абсцисс, причём  $n = \tau/\Delta t$ .

При  $n = 0$  получаем оценку дисперсии случайного процесса  $R_x(0) = \sigma_x^2$ . Значение  $R_x(\tau)$  при этом максимально (рисунок 8, а). С увеличением сдвига  $\tau$  значение  $R_x(\tau)$  уменьшается. При некотором значении  $\tau = \tau_0$  кривая  $R_x(\tau)$  пересекает ось абсцисс. Это значение называют **временем корреляции**. При  $\tau > \tau_0$  случайные значения функции  $x(t)$  практически независимы друг от друга.

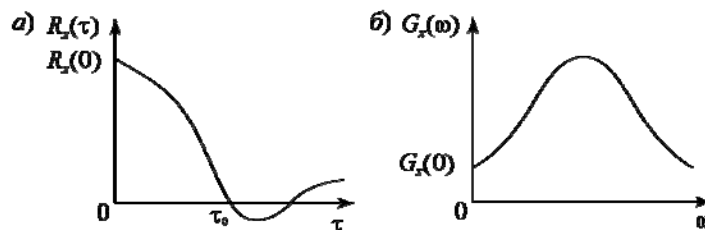


Рисунок 8 – Общий вид графиков корреляционной функции (а) и спектральной плотности (б)

Конечное значение  $R_x(\infty) = 0$ . В связи с этим при вычислении  $R_x(n\Delta t)$  по формуле (89) необходимо установить число  $n_{\max}$ , определяющее наибольший временной сдвиг

$\tau_{\max} = n_{\max} \Delta t$ . Величина  $n_{\max}$  определяет количество вычисляемых точек корреляционной функции  $R_x(\tau) = R_x(n\Delta t)$ . Как показывает опыт исследований, можно принимать  $n_{\max} \approx 0,1N$ .

При сравнении между собой корреляционных функций различных исследуемых случайных процессов используют их нормированные корреляционные функции, получаемые по формуле

$$\rho_x(\tau) = R_x(\tau) / \sigma_x^2. \quad (90)$$

### Спектральная плотность.

Спектральная плотность  $G_x(\omega)$  (рисунок 8, б) характеризует распределение дисперсии случайного процесса по частоте  $\omega$ .

Для получения графика спектральной плотности используют корреляционную функцию, осуществляя её сглаживание посредством **корреляционного окна**. Сглаживание представляет собой такую же процедуру фильтрации ординат функции  $R_x(\tau)$ , как и фильтрация ординат реализации случайного процесса  $x(t)$  низкочастотным фильтром  $h(\tau)$ . Используют функции сглаживания Бартлета, Хеннинга и Хэмминга [1]. Функция Бартлета имеет вид

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/\tau_{\max} & \text{при } |\tau| \leq \tau_{\max}; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_{\max}. \end{cases} \quad (91)$$

График функции корреляционного окна Бартлета показан на рисунке 9.

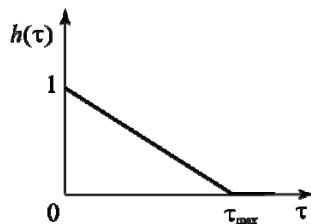


Рисунок 9 – График функции корреляционного окна Бартлета

Формула для вычисления спектральной плотности  $G_x(\omega)$  дискретного случайного процесса приведена в [1, с. 440, формула (10.122)]. Аргументом спектральной плотности является круговая частота  $\omega$ , рад/с.

Для выполнения лабораторной работы № 8 можно использовать программное обеспечение *LAB8\_MMA\_Statistik\_Analiz\_Podveski*, разработанное в среде MATLAB. В качестве примера исследуемого объекта используется упрощённый вариант подвески кузова автомобиля при движении по дороге со случайным микропрофилем. Производится определение вероятностных характеристик ускорений поддрессоренной и неподдрессоренной масс и человека на сиденье, а также усилий рессоры подвески и шины.

В отчёте необходимо привести полученные вероятностные характеристики микропрофиля дороги, ускорения поддрессоренной массы автомобиля, человека на сиденье и усилия рессоры подвески. Необходимо также составить динамическую модель подвески автомобиля, его математическую модель и указать параметры всех элементов подвески, при которых проводились исследования.

По результатам проведенных исследований необходимо сформулировать заключение о выполнении требований к качеству и эффективности подвески, принимая во внимание допустимые значения параметров оценки, приведенные в [2].

### **Контрольные вопросы**

- 1 Вероятностные оценки, используемые при анализе исследуемого случайного процесса функционирования технического объекта.
- 2 Определение математического ожидания по выборке ординат случайного процесса.
- 3 Определение дисперсии случайного процесса.
- 4 Используемые аналитические формулы для описания корреляционной функции ординат микропрофиля дорожного покрытия.
- 5 Гистограмма распределения случайной величины и содержание этапов её построения.
- 6 Оценка близости эмпирического распределения случайной величины какому-либо теоретическому распределению. Критерий оценки и способ его определения.
- 7 Основы фильтрации и центрирования ординат случайного процесса.
- 8 Характеристика фильтра низких частот академика В. С. Пугачёва. Назначение фильтра и методика его использования.
- 9 Определение корреляционной функции случайного процесса. Общий вид графика корреляционной функции. Время корреляции. Нормированная корреляционная функция.
- 10 Спектральная плотность и её использование при анализе вибронагруженности поддресоренной массы автомобиля и человека на сиденье.
- 11 Методика построения графика спектральной плотности на основе корреляционной функции случайного процесса. Вид функции корреляционного окна Бартлетта.

### **Список литературы**

- 1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание; Москва : ИНФРА-М, 2016. – 592 с.
- 2 **Тарасик, В. П.** Теория движения автомобиля : учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2022. – 576 с.
- 3 **Тарасик, В. П.** Теория автомобилей и двигателей : учебное пособие / В. П. Тарасик, М. П. Бренч. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2013. – 448 с.
- 4 Проектирование трансмиссий автомобилей : справочник / Под общ. ред. А. И. Гришкевича. – Москва : Машиностроение, 1984. – 272 с.
- 5 **Тарасик, В. П.** Физические основы структурно-матричного метода математического моделирования технических систем / В. П. Тарасик // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2016. – № 1 (50). – С. 87–99.
- 6 Математическое моделирование автомобилей : методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – 44 с.
- 7 Компьютерные модели автомобилей : методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – 48 с.
- 8 Теория автомобиля : методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – 44 с.
- 9 Теория автомобиля : методические рекомендации к курсовому проектированию для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / Сост. В. П. Тарасик. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – 47 с.