МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Техносферная безопасность и производственный дизайн»

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

***Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
15.03.06 «Мехатроника и робототехника»
очной формы обучения***

Могилев 2024

УДК 744
ББК 30.11
И62

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой ««Техносферная безопасность и производственный дизайн» «31» января 2024 г., протокол № 6

Составитель канд. техн. наук, доц. В. М. Акулич

Рецензент канд. техн. наук, доц. Е. В. Ильюшина

Методические рекомендации к практическим занятиям предназначены для студентов направления подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» очной формы обучения для изучения методов ортогонального проецирования, свойств проекций и методов преобразования чертежа, метода прямоугольного треугольника, теоремы о проецировании прямого угла, свойств проекций плоских углов, методов взаимного пересечения поверхностей.

Учебное издание

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Ответственный за выпуск	А. В. Щур
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/8. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Разработка и внедрение учебно-методических материалов в образовательный процесс улучшает самостоятельную работу студентов, способствует улучшению успеваемости студентов и повышению качества подготовки специалистов в техническом университете.

Инженерная графика относится к числу дисциплин, составляющих основу инженерного образования, неотъемлемую часть курса составляет раздел по начертательной геометрии. Начертательная геометрия является одной из фундаментальных наук.

Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование способов построения изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм. Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют представить мысленно форму предметов и их взаимное расположение в пространстве, определить их размеры, исследовать геометрические свойства, присущие изображаемому предмету.

Начертательная геометрия, вызывая усиленную работу пространственного воображения, развивает его. Она предлагает изучение пространственных форм в виде их плоских изображений на плоскостях – в виде проекций. Построение технических чертежей основано, как правило, на применении ортогонального проецирования.

Методические рекомендации составлены для выполнения индивидуальных заданий студентами в процессе изучения дисциплины «Инженерная графика».

Методические рекомендации содержат основные теоретические положения, способы и поэтапное выполнение эпюров, являются практическим руководством к самостоятельной работе студентов первого курса для выполнения и оформления индивидуальных графических заданий по темам «Геометрическое черчение», «Проекции плоской фигуры», «Метрические задачи», «Пересечение плоских фигур», «Пересечение поверхностей». Материал адаптирован к графической тетради-клише и лекционному курсу.

Методические рекомендации содержат алгоритмы построения задач и примеры выполнения графических построений.

Индивидуальные задания выполняются на отдельных листах формата А3 в соответствии с вариантами, выданными преподавателями.

1 Геометрическое черчение

1.1 Уклон

В технике широко распространены детали, у которых имеются элементы в виде наклоненных друг к другу плоскостей.

Их наличие обусловлено технологией изготовления (на прокатных станках металлургических предприятий) и конструктивными решениями по повышению прочности. Наклонные плоскости, примыкающие к горизонтальным полкам швеллера, рельса и двутавра, образуют уклон (рисунок 1.1). Его величина стандартная и имеет определенные размеры. Поэтому есть специальные правила построения этого элемента на чертежах деталей [1].

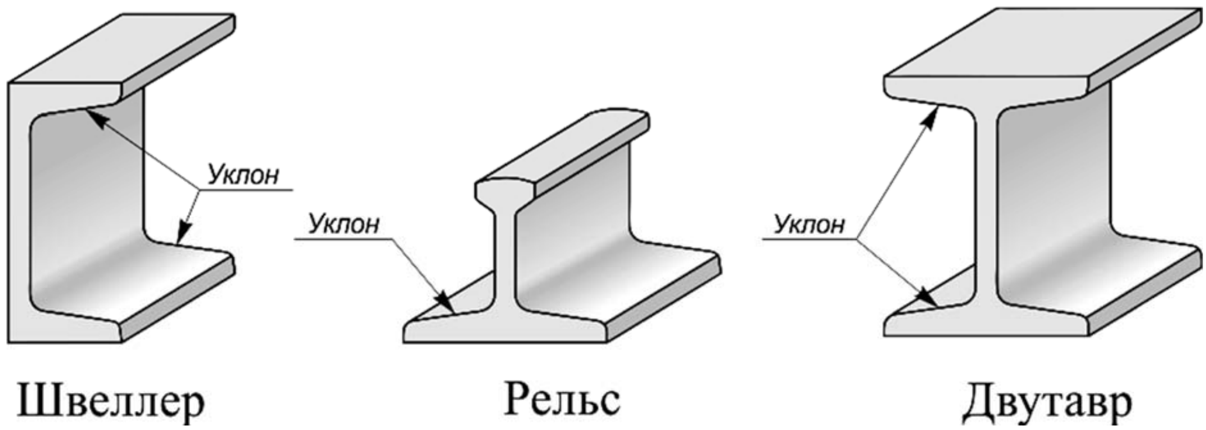
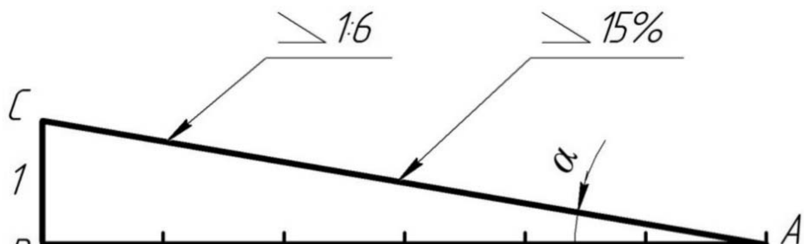


Рисунок 1.1 – Стальной фасонный прокат для металлоконструкций

Уклон – это величина, характеризующая наклон одной линии по отношению к другой. Она равна тангенсу угла между линиями и может быть выражена либо простой дробью, либо в процентах (рисунок 1.2).



$$i = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{6} = \mathrm{tg}\alpha$$

Рисунок 1.2 – Образование уклона двух прямых

Для обозначения величины уклона на чертежах от наклонного участка проводят линию-выноску со стрелкой, а на ее горизонтальной полке помещают знак «$\angle$» или знак «$\triangleright$», рядом с которым записывают величину уклона. Острый угол знака уклона должен быть направлен в сторону занижения.

В индивидуальных графических работах студентов требуется построить профиль фасонного проката с заданным уклоном *i* (рисунок 1.3).

Для этого вначале строят внешние контуры прокатного профиля по размерам *b* и *h*. Затем находят точки *C* и *B*. Далее, продлив линию полки профиля за точку *B*, откладывают на этой прямой требуемое по значению уклона *i* количество отрезков *BC* и находят точку *A*. Отрезок *AB* имеет заданный уклон *i*. Переходы этой наклонной линии в вертикальные линии-полки контура скругляют дугами радиусов *R* и *r*.

Уклон для верхней полки профиля строят аналогичным образом. В конце на чертеже приводят обозначение уклона. Допускается это делать один раз, если обе полки имеют одинаковый уклон.

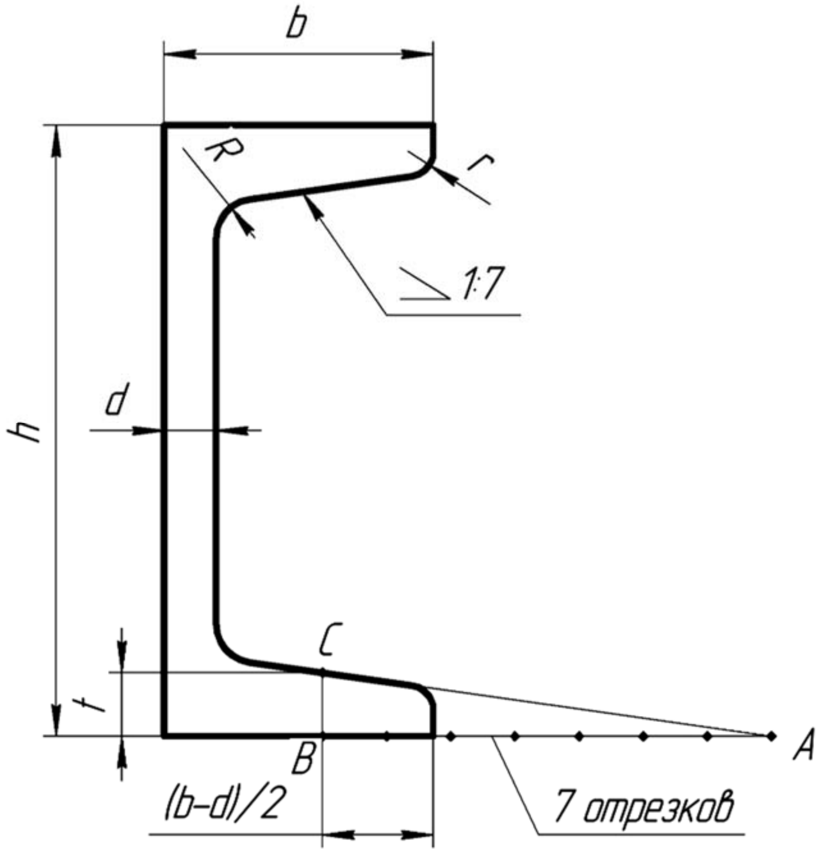


Рисунок 1.3 – Построение уклона полок швеллера

1.2 Конусность

Контуры некоторых деталей машиностроительного производства формируются комбинацией поверхностей вращения, в том числе и конических. Часто к коническим участкам не предъявляется особых требований, например, фаскам на валах и осях [2]. В некоторых случаях, а именно к посадочным поверхностям, требования по изготовлению довольно жесткие (рисунок 1.4).

Поэтому необходимо уметь строить и читать чертежи конических участков.

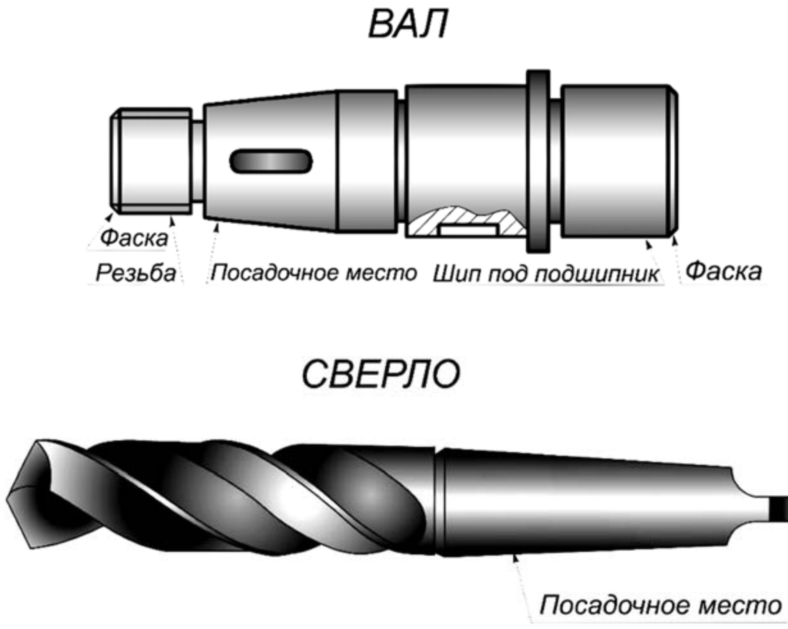


Рисунок 1.4 – Примеры деталей с коническими поверхностями

Конусностью называется отношение разности диаметров двух поперечных сечений конуса вращения к расстоянию между ними. Как видно из рисунка 1.5, конусность равна удвоенному уклону образующей конуса к его оси, $k = 2i$. Например, при $i = 1{:}6$ конусность $k = 2(1/6) = 1/3$.

Для усеченного конуса $k = 2\text{tg}\alpha = (D - d)/l$.

При построении деталей с заданной конусностью значения геометрических размеров d, D и l можно определять вычислением или пользоваться графическими приемами.

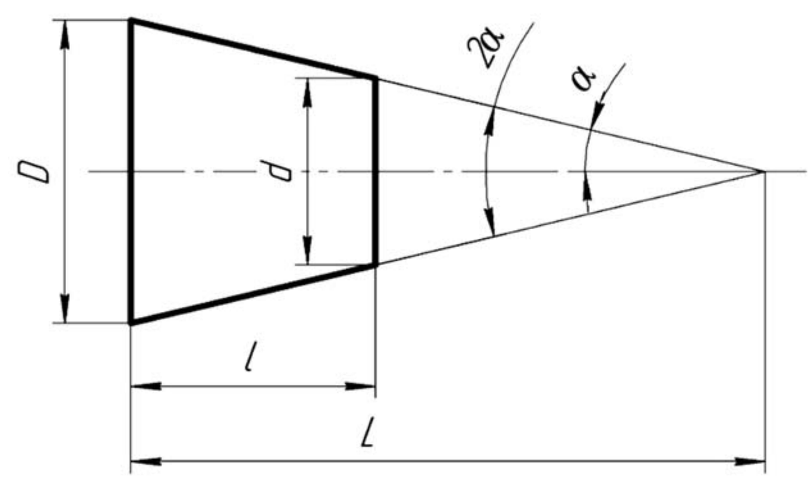


Рисунок 1.5 – Характеристика конусности

Пусть требуется построить конический хвостовик детали по заданным известным значениям большего диаметра D, его длины l и величины конусности $k = 1{:}5$ (рисунок 1.6).

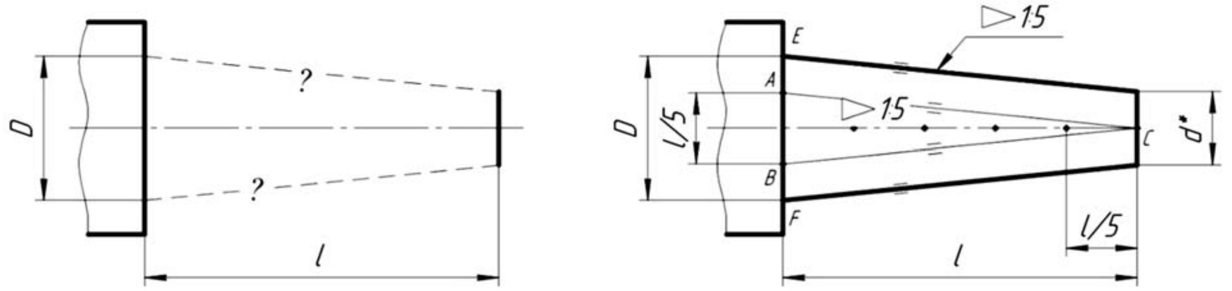


Рисунок 1.6 – Построение конусности на чертеже

Для этого величину *l* делят на пять равных частей. Полученные значения в миллиметрах откладывают симметрично по обе стороны оси от осевой линии конуса на уровне сечения диаметра *D* (точки *A* и *B*). Затем эти точки соединяют с точкой *C* на уровне искомого сечения диаметром d^*. Получился конус заданного угла с острой вершиной. Для построения требуемого изображения усеченного конуса следует от точек *E* и *F* провести параллельно *AC* и *BC* прямые до пересечения с границей конического участка длиной *l*.

Полученный чертеж следует дополнить обозначением конусности. Для этого используется знак равнобедренного треугольника «◁», вершина которого направляется в сторону вершины конуса. Рядом с ней указывается величина конусности в виде дроби ◁ 1:5. Знак с величиной конусности можно помещать над осевой линией конуса или на полке выносной линии со стрелкой. Тогда искомое значение размера (в данном случае *d*) можно не приводить или приводить со звездочкой «*», что воспринимается как справочный размер.

1.3 Сопряжения

При выполнении чертежей различного назначения часто приходится строить плавные переходы прямых линий и окружностей друг в друга, что называется сопряжением [3]. Широкое распространение такие работы получили в швейной промышленности, когда разрабатываются новые модели одежды и обуви. Выкройки этих моделей строят с помощью лекал (рисунок 1.7).

Рисунок 1.7 – Лекала

Конструирование лекал выполняется на основе сопряжений. Их существует довольно много типов, но наибольший интерес представляют сопряжения двух прямых, прямой и окружности, двух окружностей.

Построение сопряжения двух прямых дугой заданного радиуса сводится к нахождению центра дуги (рисунок 1.8). Для этого необходимо на расстоянии *R* возле каждой прямой провести параллельные прямые. Они пересекутся в точке O, которая и будет искомым центром. Далее из точки O опускают перпендикуляры на исходные прямые для нахождения начала A и конца B сопряжения. В завершение между ними проводят дугу заданного радиуса. Описанным образом можно получить сопряжения для прямых, находящихся под острым, прямым и тупым друг к другу углом.

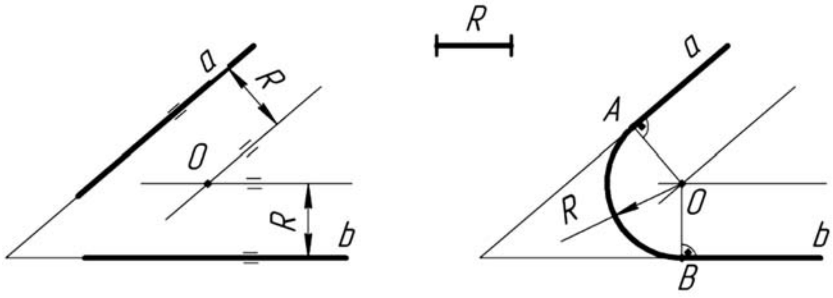


Рисунок 1.8 – Построение сопряжений двух прямых

Сопряжение прямой линии и окружности может быть внешним и внутренним. Основной задачей его построения также является определение центра дуги. Для внешнего сопряжения (рисунок 1.9) он находится на равном расстоянии от окружности и прямой, а именно в точке пересечения вспомогательной параллельной прямой, которая расположена от заданной на расстоянии R, и от дуги окружности радиусом $R_1 + R$, центр которой совпадает с центром заданной окружности. После нахождения центра сопряжения следует определить его начало и конец, для чего из центра O опускают на исходную прямую перпендикуляр и находят точку B. Затем, соединив центр окружности O_1 с центром O прямой, устанавливают точку A. Завершают построение проведением между A и B дуги радиусом R.

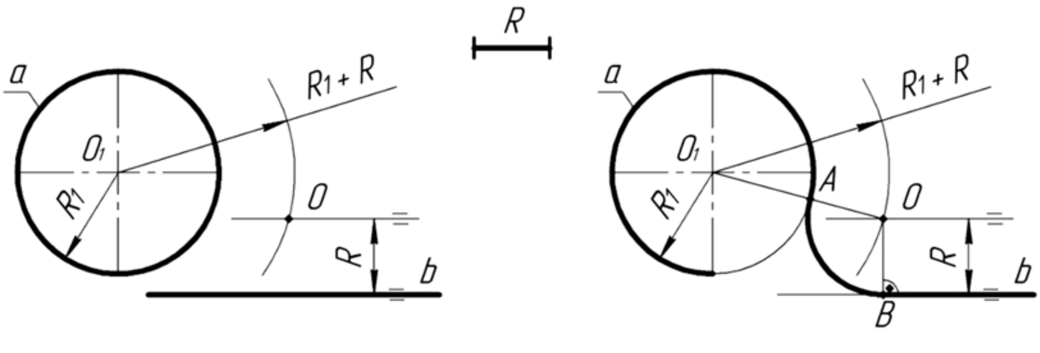


Рисунок 1.9 – Построение внешнего сопряжения прямой и окружности

Для внутреннего сопряжения (рисунок 1.10) радиус вспомогательной окружности равен либо радиусу $R - R_1$, либо разнице $R_1 - R$. Точка сопряжения A_1 будет лежать на линии центров O_1O или на ее продолжении.

Сопряжение двух окружностей также бывает внешним и внутренним (рисунки 1.11 и 1.12). Построение их сводится, как и в предыдущих случаях, к определению местоположения центра сопрягающей дуги. У внешнего сопря жения он находится в точке пересечения вспомогательных окружностей радиусами $R + R_1$ и $R + R_2$, у внутреннего радиусы вспомогательных дуг имеют значения $R - R_1$ и $R - R_2$. Нахождение точек A и B начала и конца сопряжения аналогично описанному выше.

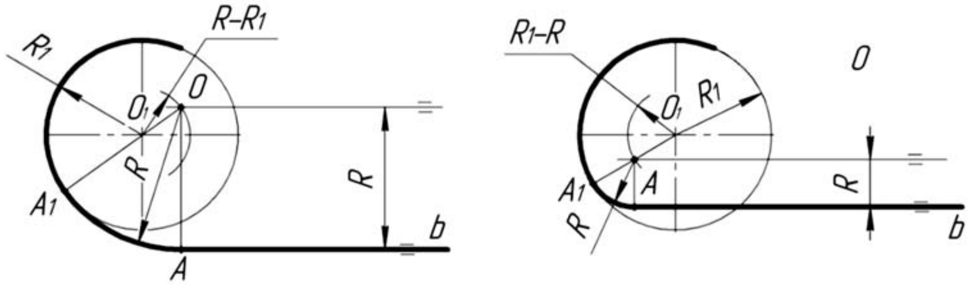


Рисунок 1.10 – Построение внутреннего сопряжения прямой и окружности

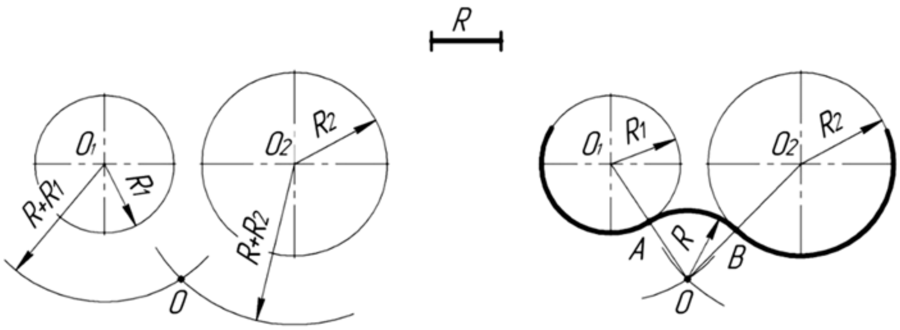


Рисунок 1.11 – Построение внешнего сопряжения двух окружностей

В случае внутреннего сопряжения радиус сопрягаемой дуги имеет значительно большую величину, чем радиусы исходных окружностей.

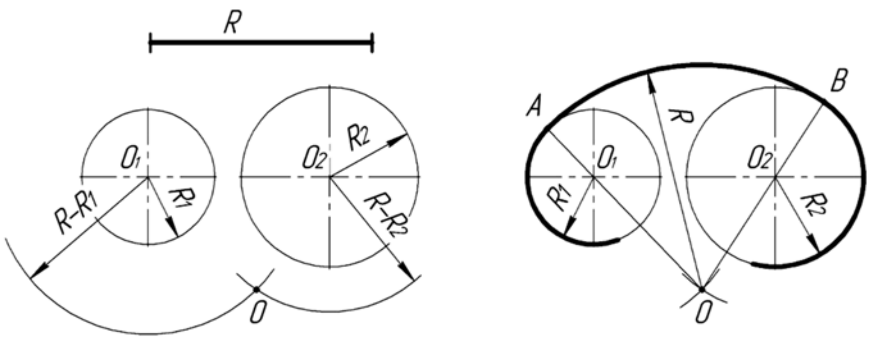


Рисунок 1.12 – Построение внутреннего сопряжения двух окружностей

Смешанным сопряжением дуг является сопряжение, при котором центр одной из сопрягаемых дуг (O_1) лежит за пределами сопрягающей их дуги радиуса R, а центр другой окружности (O_2) – внутри её. На рисунке 1.13 приведён пример смешанного сопряжения окружностей. Сначала находим центр сопряжения – точку O. Для нахождения центра сопряжения строим дуги окружностей с радиусами $R + R_1$, из центра окружности радиуса R_1 точки O_1, и $R - R_2$, из центра окружности радиуса R_2 точки O_2.

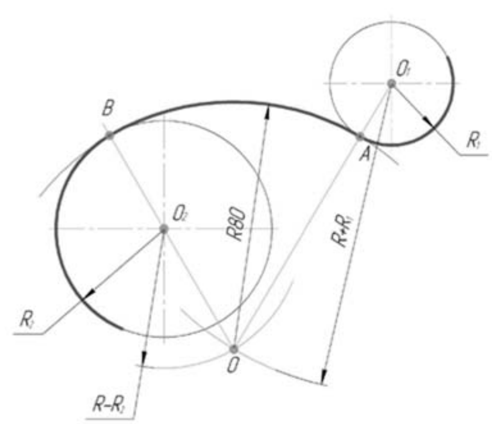


Рисунок 1.13 – Смешанное сопряжение окружностей

2 Проекции плоских фигур

2.1 Проекции равностороннего треугольника (варианты 1–10)

Необходимо построить равносторонний треугольник *ABC* с основанием *BC*, равным 100 мм, лежащим на прямой *MN*, и вершиной *A* на прямой *EF*. Определить углы наклона высоты *AK* к плоскостям проекций *V* и *H* [4, 5].

Вычертить чертеж Δ*ABC* по заданным размерам на плоскости (на правой стороне листа); проведя высоту *AK*, нанести размеры (рисунок 2.1).

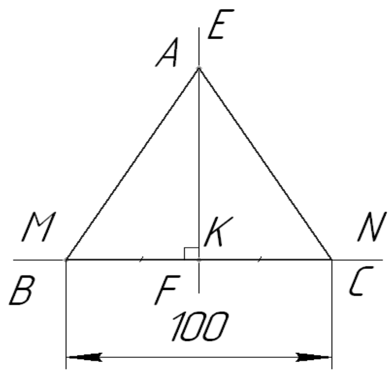


Рисунок 2.1 – Исходные данные

Построить недостающую фронтальную проекцию *E"F"* прямой *EF*, используя теорему о проецировании прямого угла. Точку *K* пересечения прямых *EF* и *MN* взять за основание высоты треугольника. От точки *K* на натуральной величине прямой *MN* по обе стороны отложить по 50 мм. Получатся точки *B* и *C*. Взять на прямой *EF* точку *F* и найти натуральную величину прямой *KF* методом прямоугольного треугольника.

Отложить на натуральной величине прямой *KF* натуральную величину высоты *AK* (*AK* взять из плоского чертежа).

Делением отрезка в данном соотношении найти на фронтальной проекции прямой *EF* истинное положение фронтальной проекции точки *A*. Соединить одноименные проекции точек *A*, *B* и *C*.

Определить углы наклона α и β высоты *AK* к плоскостям проекций *H* и *V* методом прямоугольного треугольника.

Обвести чертеж сплошной толстой основной линией, выделив проекции треугольника *ABC* и углы наклона α и β (рисунок 2.2).

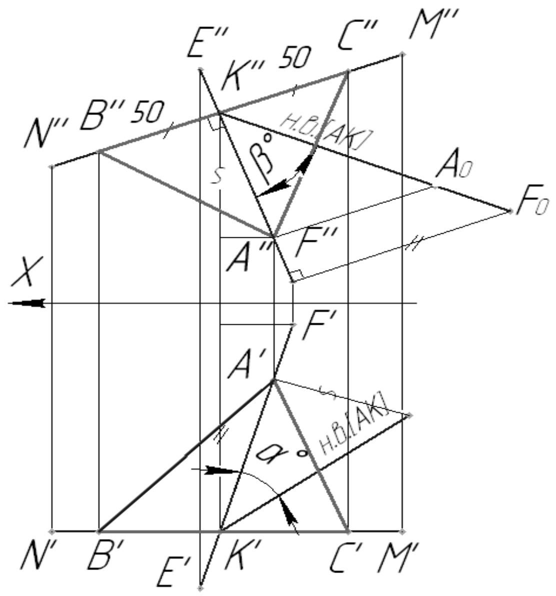


Рисунок 2.2 – Пример выполнения задания

2.2 Проекции параллелограмма (*варианты 11–20*)

Необходимо построить параллелограмм *АВСД* со стороной *BC*, равной 100 мм, расположенной на прямой *BM*, исходя из условия, что его высота *AK* лежит на прямой *EF* и длина боковой стороны равна 60 мм. Определить углы наклона высоты *AK* к плоскостям проекций *V* и *H* [4, 5].

От точки *B* влево на прямой *BM* отложить отрезок *BC* = 100 мм. Получается сторона параллелограмма *BC* = 100 мм.

Найти на прямой *EF* точку *A*, зная, что *AB* = 60 мм. По натуральной величине *BK* (из эпюра) и размеру боковой стороны параллелограмма *AB* (из условия задания) построить параллелограмм на плоскости (на правой стороне листа), нанести заданные размеры (рисунок 2.3).

Определить углы наклона высоты *AK* к плоскостям проекций *V* и *H*.

Построить недостающую проекцию прямой *EF*, используя теорему о проецировании прямого угла (точку *K* пересечения прямых *EF* и *BM* взять за основание высоты параллелограмма).

От точки *B* влево на натуральной величине прямой *BM* отложить отрезок *BC* = 100 мм. Получится точка *C*. На прямой *EF* взять точку *E*.

Найти натуральную величину прямой *KE* методом прямоугольного треугольника. Отложить на натуральной величине прямой *KE* натуральную величину высоты *АК* (*АК* взять из плоского чертежа). Делением отрезка в данном отношении найти на фронтальной проекции прямой *EF* истинное положение фронтальной проекции точки *А*.

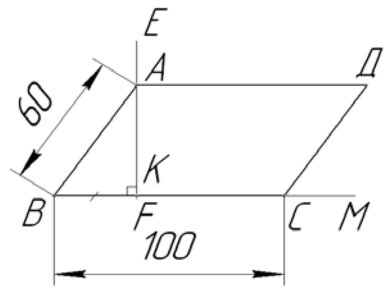


Рисунок 2.3 – Исходные данные

Соединить одноименные проекции точек *А* и *В*. Используя свойства сторон параллелограмма, построить его проекции.

Определить углы наклона α и β высоты *АК* к плоскости проекций *H* и *V* методом прямоугольного треугольника (рисунок 2.4).

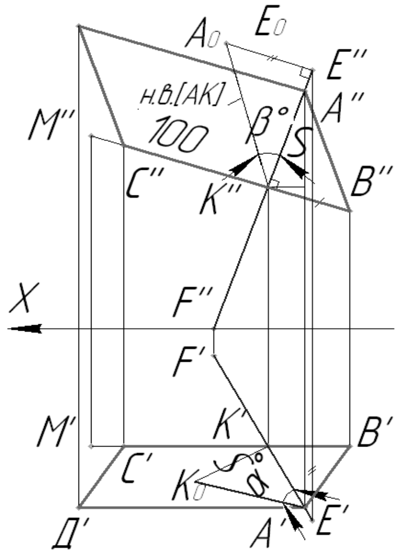


Рисунок 2.4 – Пример выполнения задания

Обвести чертеж сплошной толстой основной линией и выделить проекции параллелограмма *АВСД* и углы наклона α и β.

2.3 Проекции равнобедренной трапеции (*варианты 21–30*)

Необходимо построить равнобедренную трапецию *АВСД* с большим основанием *ВС*, расположенным на прямой *MN*, исходя из условия, что ее острый угол равен φ и меньшее основание трапеции равно высоте [4, 5].

Построить проекции высоты трапеции *АК*, опустив перпендикуляр из точки *A'* на прямую *M'N'*. Использовать теорему о проецировании прямого угла.

Найти натуральную величину высоты *АК* методом прямоугольного треугольника.

Зная натуральную величину высоты *АК* (из эпюра) и то, что острый угол трапеции равен 60°, а меньшее основание *АД* равно высоте *АК*, построить трапецию на плоскости (на правой половине листа), нанести заданные размеры и отметить равные отрезки (рисунок 2.5).

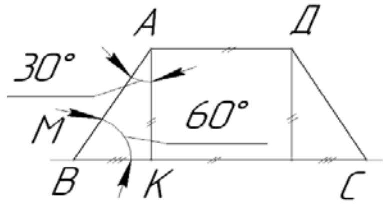


Рисунок 2.5 – Исходные данные

От точки *К'* на прямой *M'N'* отложить натуральную величину *ВК* (натуральную величину *ВК* взять из плоского чертежа).

Для нахождения точки *Д* необходимо через точки *А'* и *А''* провести линии, параллельные *M'N' M''N''*, и отложить от точки *А'* натуральную величину *АК* и затем найти ее фронтальную проекцию. Используя свойство трапеции, найти положение проекций точки *С* и соединить проекции полученных точек. Определить углы наклона α и β высоты *АК* к плоскостям *Н* и *V* методом прямоугольного треугольника (рисунок 2.6).

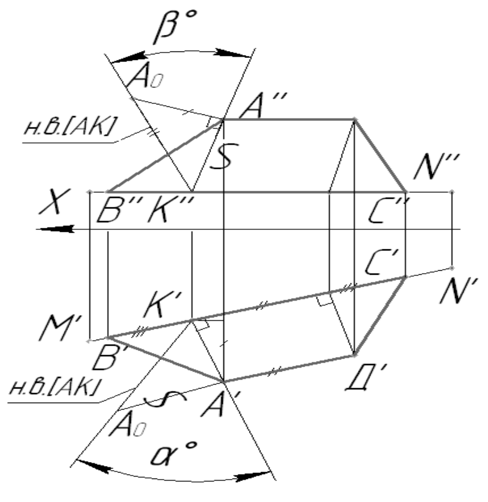


Рисунок 2.6 – Пример выполнения задания

Обвести чертеж сплошной толстой основной линией и выделить проекции трапеции *АВСД* и углы наклона α и β.

3 Пересечение плоских фигур

Задачи, связанные с решением вопросов взаимного расположения геометрических фигур на комплексном чертеже, называются позиционными.

Среди позиционных можно выделить две группы задач, представляющих наибольший практический интерес. К ним относятся задачи на взаимную принадлежность и задачи на взаимное пересечение [4, 6].

Решение позиционных задач на принадлежность предполагает работу с графически простыми линиями (например, прямой). Это необходимо для того, чтобы не усложнять построений на комплексном чертеже.

Задачи на взаимное пересечение связаны с построением точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым геометрическим образам, например, прямой и плоскости, двум плоскостям. Каждую из этих точек строят в пересечении двух вспомогательных линий. Эти линии должны быть графически простыми и принадлежать одной вспомогательной плоскости. Совокупность построенных общих точек позволяет построить линию пересечения геометрических образов.

Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения пользуются двумя способами: способом пересечения прямой с плоскостью и способом с использованием плоскостей-посредников.

Для решения данного эпюра рациональнее использовать способ пересечения прямой с плоскостью.

В общем случае для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью используются проецирующие плоскости. На рисунке 3.1 представлены плоскость (задана двумя пересекающимися прямыми a и b) и прямая l (в пространстве и на эпюре).

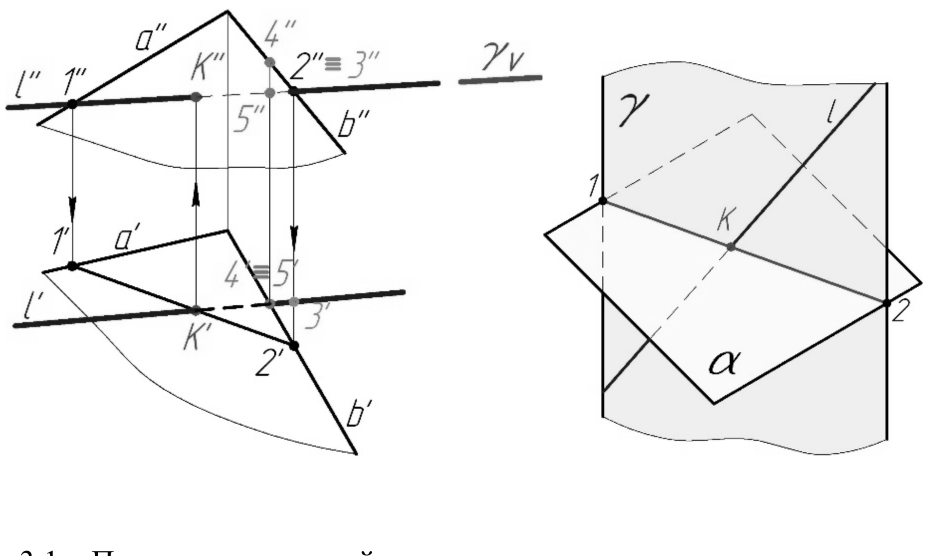


Рисунок 3.1 – Пересечение прямой с плоскостью

Для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью применяют следующий алгоритм:

– заключаем прямую l во фронтально-проецирующую плоскость γ. Ее фронтальная проекция – это линия, наклоненная к оси *ox*. Она совпадает с фронтальной проекцией прямой *l*;

– находим линию пересечения *1-2* заданной плоскости и плоскости γ. Ее фронтальная проекция *1*"-*2*" также совпадает с фронтальным следом γ" плоскости. Строим ее горизонтальную проекцию *1*'-*2*';

– точка *K*, полученная в результате пересечения прямой *l* с линией *1-2*, и есть искомая точка пересечения. На эпюре хорошо видна ее горизонтальная проекция *K*', как результат пересечения *l*' с проекцией *1*'-*2*'. Находим фронтальную проекцию *K*" точки *K*, как находящуюся на фронтальной проекции *l*" прямой *l*;

– определяем видимость частей прямой *l* с помощью конкурирующих точек двух скрещивающихся прямых.

Для нахождения линии пересечения двух плоскостей общего положения находим две точки пересечения сторон одного треугольника с плоскостью другого.

Если выберем сторону *EK*, то решение может выйти за пределы проекции треугольников, что потребует дополнительных построений и является нерациональным (рисунок 3.2).

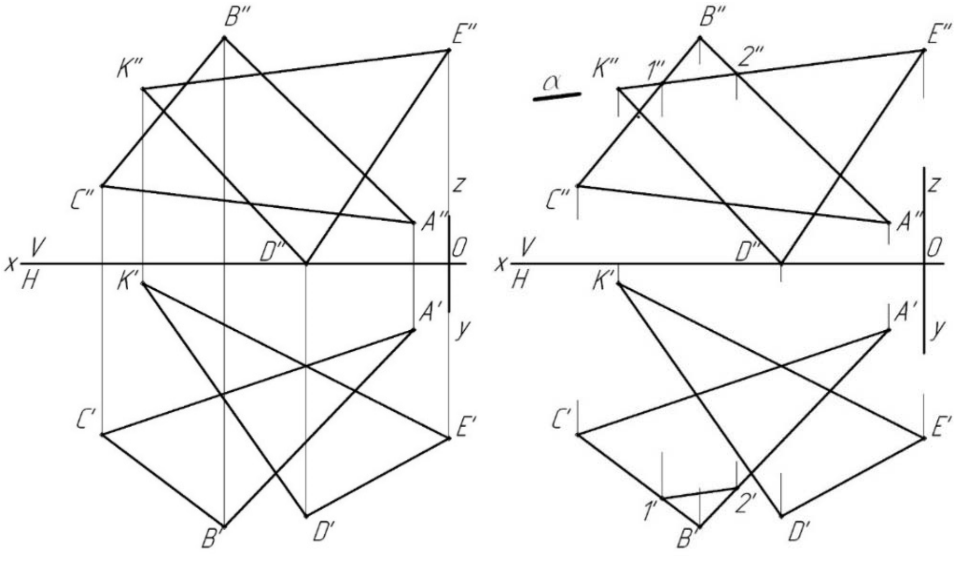


Рисунок 3.2 – Пересечение двух плоскостей общего положения

Предварительный анализ взаимного положения пересекающихся плоскостей общего положения позволил определить, что сторона *AB* пересекает плоскость треугольника *DEK* внутри его, сторона *KD* пересекает треугольник *ABC* тоже в пределах этого треугольника. Эти стороны и целесообразно выбрать для определения двух точек искомой прямой пересечения заданных треугольников.

План решения:

– заключаем прямую *K*"*D*" во фронтально-проецирующую плоскость β, которая отсекает у треугольника *ABC* вершину *C* по линии *3-4*;

– отмечаем фронтальные проекции точек *3*" и *4*";

– находим горизонтальные проекции точек *3'* и *4'*;

– соединяем их и определяем точку *F*, в которой сторона *KD* пересекает треугольник *ABC*.

Аналогично заключаем прямую *A''B''* во фронтально-проецирующую плоскость γ и с помощью промежуточных построений (фронтальные проекции точек *5''6''*; горизонтальные проекции точек *5'6'*) находим точку *G*, в которой сторона *AB* пересекает треугольник *DEK*. Таким образом, определены две точки *F* и *G* прямой линии пересечения треугольников *ABC* и *DEK* (рисунок 3.3).

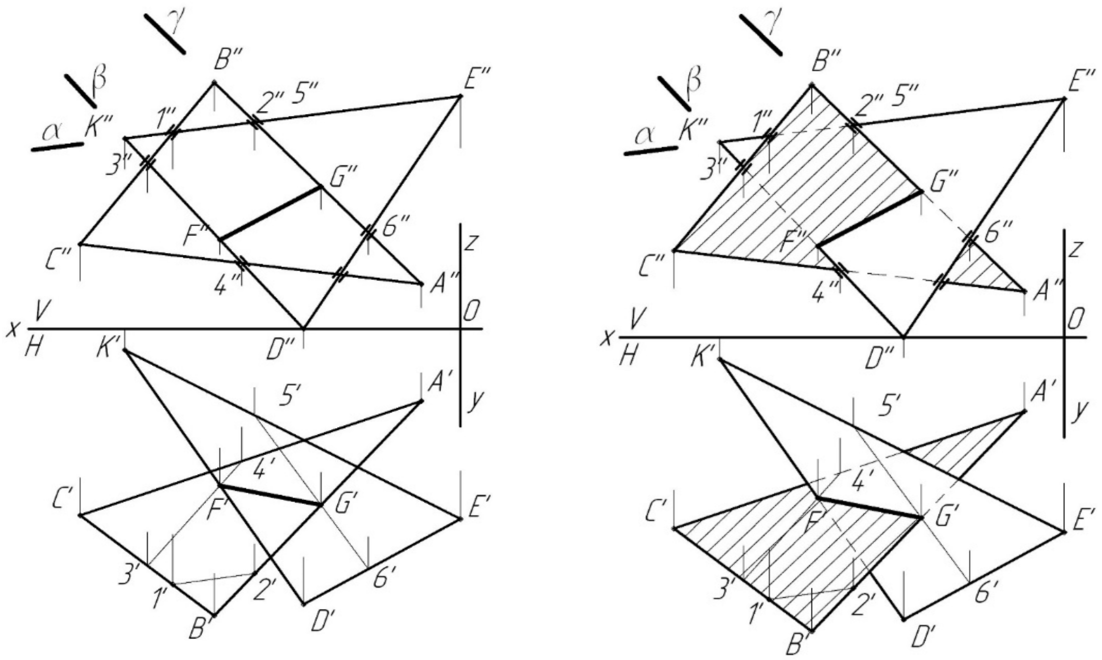


Рисунок 3.3 – Построение линии пересечение двух плоскостей общего положения

Определяем их видимость на проекциях чертежа с помощью конкурирующих точек двух скрещивающихся прямых. Как видно, часть линий одной плоскости закрываются другой плоскостью, и наоборот. Невидимые части линий изображены как штриховые линии. Наружные контуры проекций заданных фигур всегда видимые. Их надо обвести толстой линией в первую очередь. Во фронтальной плоскости можно использовать результаты предварительной оценки. У треугольника *D''E''K''* невидимыми будут части сторон между точками *F''3''* и *1''2''*, у треугольника *A''B''C''* – *D''4''* и *G''6''* (как показано на рисунке 3.3).

Для установления видимости треугольников в горизонтальной проекции оценим взаимное положение двух близко расположенных вершин *B'* и *D'*. Анализ их фронтальных проекций показывает, что точка *B''* выше точки *D''*. Поэтому линия *B'A'* на участке *B'G'* будет видимой, а в пределах треугольника *D'E'K'* – невидимой. Участок стороны *C'A'* в пределах треугольника *D'E'K'* тоже будет невидимым. У треугольника *D'E'K'* часть *K'F'* стороны будет также невидимой. Для большей наглядности на видимой части треугольника ABC можно выполнить штриховку.

Видимость линии на горизонтальной плоскости проекций определяется сравнением координат *Z* двух конкурирующих точек, на фронтальной плоскости проекций – сравнением координат *Y* двух конкурирующих точек, на профильной плоскости проекций – сравнением координат *X* двух конкурирующих точек.

4 Метрические задачи

Задача 1. Определить высоту пирамиды *SABC* способом перемены плоскостей проекций [4, 7].

Плоскость общего положения необходимо преобразовать в проецирующую плоскость. Перпендикуляр, опущенный из вершины *S* на проецирующую плоскость, является высотой пирамиды (рисунок 4.1).

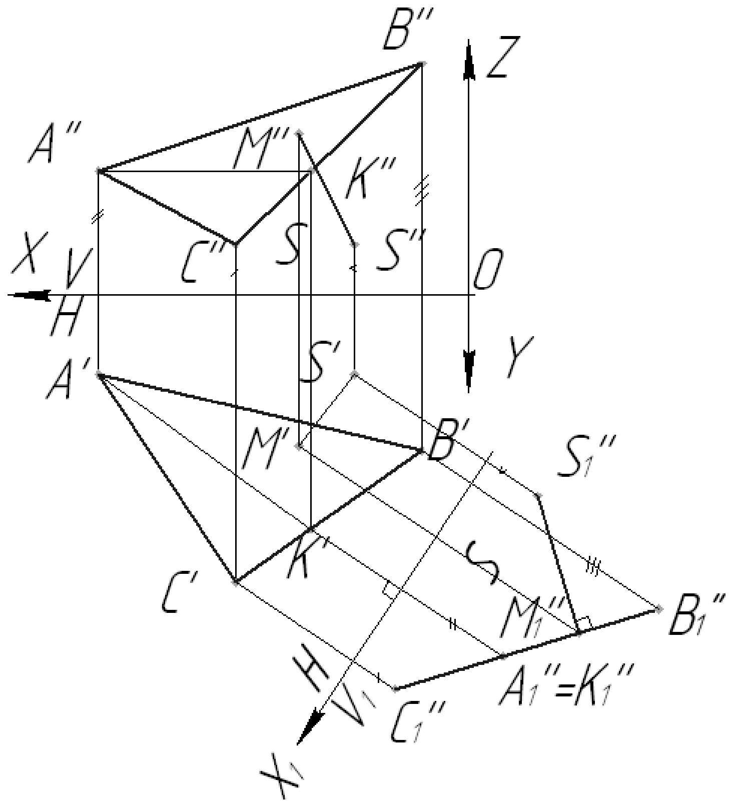


Рисунок 4.1 – Решение задачи 1

Построение на комплексном чертеже выполняется следующим образом:

– провести в плоскости основания *ABC* горизонталь *AK*;

– расположить новую ось проекций X_1 перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали *A'K'*;

– построить новые фронтальные проекции вершины S_1'' и основания пирамиды $A_1''B_1''C_1''$;

– расстояние $S_1''M_1''$ равно высоте пирамиды;

– построить горизонтальную и фронтальную проекции высоты пирамиды, возвратив точку *M* в систему *V/H*.

Задача 2. Дана пирамида *SABC*. Определить натуральный вид основания вращением вокруг горизонтали или фронтали [4, 7].

Для определения формы и размеров плоской фигуры нужно повернуть ее вокруг принадлежащей ей горизонтали (или фронтали) так, чтобы в результате этого вращения фигура расположилась параллельно плоскости *H* (*V*) (рисунок 4.2).

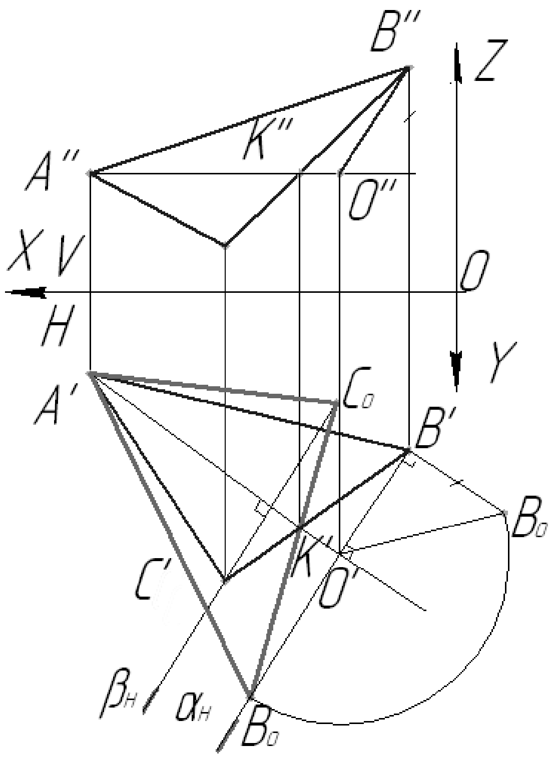


Рисунок 4.2 – Решение задачи 2

Построения на комплексном чертеже выполняется следующим образом:

– провести в основании пирамиды *ABC* горизонталь через точку *A*;

– вращать точку *B* вокруг горизонтали *AK*. Точка *B* описывает дугу окружности, лежащую в горизонтально-проецирующей плоскости α, перпендикулярной оси вращения *AK*, (точка *B* должна находиться на следе α_H);

– найти центр вращения точки *B* – точку *O*, опустив из точки *B* перпендикуляр на ось вращения *AK*;

– определить натуральную величину радиуса вращения точки $O'B_0$ методом прямоугольного треугольника;

– найти совмещенное положение точки *B* (точку B_0) на следе α_H;

– найти совмещенное положение точки *C*. По аналогии с точкой *B* она должна лежать в плоскости β, перпендикулярной оси вращения *AK*, и располагаться на следе плоскости β_H. Для определения совмещенного положения точки *C* можно не определять радиус вращения, а найти ее положение в пересечении прямой B_0K' и перпендикуляра, проведенного из точки *C'* к оси вращения *A'K'*;

– точка *A* находится на оси вращения, поэтому *A'* совпадает с A_0 ($A' = A_0$);

– соединить точки $A_0B_0C_0$, получится натуральный вид основания пирамиды.

Задача может быть решена вращением вокруг фронтали.

Задача 3. Дана пирамида *SABC*. Определить угол между гранью *AB* и основанием пирамиды способом перемены плоскостей проекций [4, 7].

Двугранный угол измеряется линейным углом, полученным в пересечении граней двугранного угла плоскостью, перпендикулярной двум граням, следовательно, и к линии их пересечения. Линию пересечения из прямой общего положения необходимо преобразовать в проецирующую прямую (рисунок 4.3).

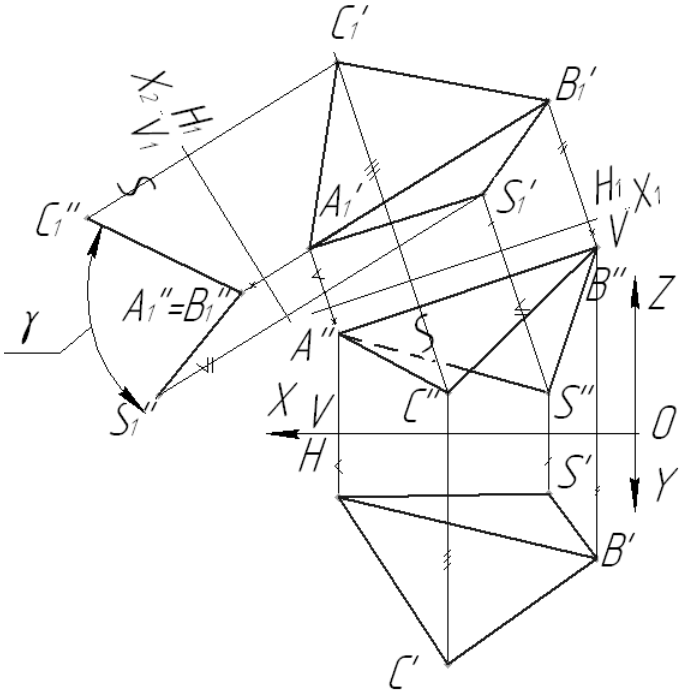


Рисунок 4.3 – Решение задачи 3

Построения на комплексном чертеже выполняется следующим образом:
– ввести плоскость H_1 параллельно ребру *AB*;
– построить горизонтальные проекции точек *A*, *B*, *C*, *S*;
– ввести плоскость V_1 перпендикулярно ребру *AB*;
– построить новые фронтальные проекции.

Задача 4. Дана пирамида *SABC*. Определить угол наклона основания к плоскостям *V* и *H* с помощью линии наибольшего наклона [4, 7].

Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (линия ската) перпендикулярна любой горизонтали плоскости. Линия наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций перпендикулярна любой фронтали плоскости. Провести в плоскости основания горизонталь и фронталь. Построить линии наибольшего наклона к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций. Определить углы наклона плоскости основания к плоскостям *H* и *V*.

Построения на комплексном чертеже выполняется следующим образом:
– провести горизонталь *AK* в плоскости основания *ABC*;
– построить линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости

проекций *BE*;

– используя способ прямоугольного треугольника, определить натуральную величину линии наибольшего наклона к плоскости *H* и угол α;

– провести фронталь *ВД* в плоскости основания *ABC*;

– построить линию наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций *AM*;

– используя способ прямоугольного треугольника, определить натуральную величину линии наибольшего наклона к плоскости *V* и угол β (рисунок 4.4).

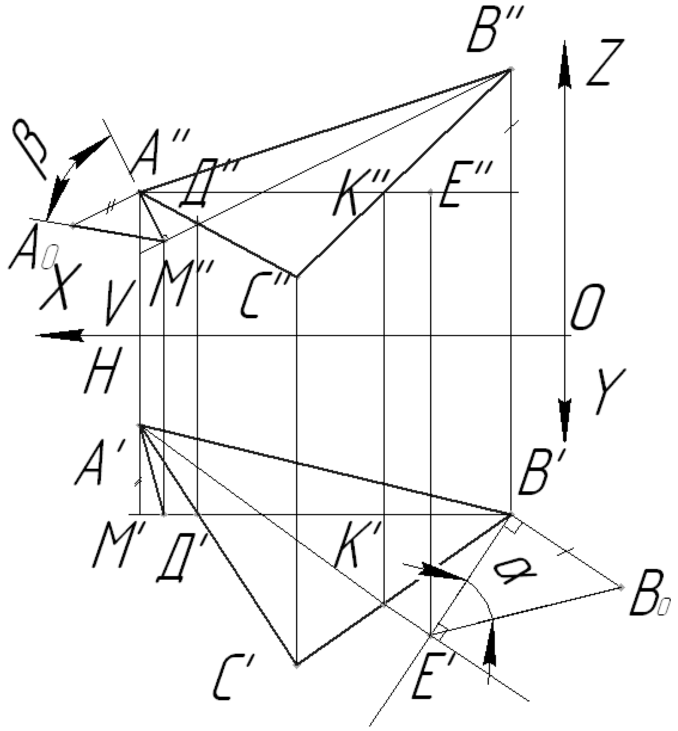


Рисунок 4.4 – Решение задачи 4

5 Пересечение поверхностей

5.1 Построение линий пересечения поверхностей, когда одна из них проецирующая

При решении задач, в которых приходится определять линии пересечения различных поверхностей, часто применяется метод секущих плоскостей. Наиболее простые решения бывают при пересечении линейчатых поверхностей.

Вспомогательную секущую плоскость следует выбирать так, чтобы она пересекала заданные поверхности по прямым образующим. В тех случаях, когда невозможно подобрать вспомогательную плоскость, пересекающую обе поверхности по прямолинейным образующим, можно ограничиться пересечением плоскостью по прямолинейным образующим только одной поверхности. Для того чтобы определить линию пересечения поверхностей, необходимо вводить не одну, а несколько плоскостей [4, 8].

Рассмотрим случай, когда одна из поверхностей находится в проецирующем положении. Это возможно только для призматических и цилиндрических поверхностей.

На рисунке 5.1 представлены два пересекающихся многогранника – четырехгранная пирамида и трехгранная призма. Призма является горизонтально-проецирующей поверхностью – ее грани расположены перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

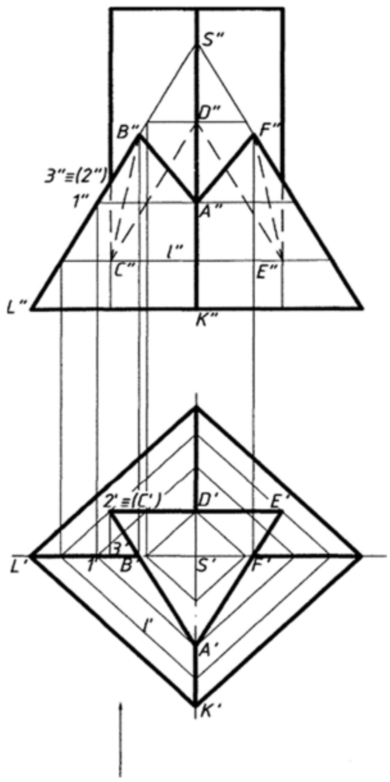


Рисунок 5.1 – Пересечение четырехгранной пирамиды и трехгранной призмы

Следовательно, в соответствии со свойствами проецирующих фигур, горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией призмы, и задача сводится к определению ее фронтальной проекции на основе принципа принадлежности. Так как линия пересечения многогранников представляет собой замкнутую пространственную ломаную линию *A–B–C–D–E–F–A*, то необходимо найти только вершины этой ломаной, т. е. точки A'', B'', C'', D'', E'', F''. Точку B'' можно найти сразу по линии проекционной связи, т. к. она находится на ребре *SL* пирамиды, то $B''\in S''L''$. Аналогично можно построить точку F''. А вот для нахождения точки A'' следует применить вспомогательные построения на основе принципа принадлежности. Так как точка *A* принадлежит одновременно и поверхности призмы и поверхности пирамиды, то через нее на поверхности пирамиды проводим прямую L', параллельную стороне основания *LK* пирамиды, находим точку $1'\in S'L'$, проецируем точку $1'$ на фронтальную проекцию и строим прямую $L''\parallel L''K''$, а затем по линии проекционной связи находим точку $A'' \in L''$.

Аналогично можно построить точки C'', D'', E''. Соединяя точки ломаной на фронтальной проекции, принимаем во внимание принадлежность их определенной грани и последовательность расположения точек, т. е. соединяем точки в таком же порядке, как и на горизонтальной проекции $A''–B''–C''–D''–E''–F''–A''$. Построив линию пересечения поверхностей, приступаем к определению ее видимости. В связи с тем, что на фронтальной плоскости проекции видимы две передние грани пирамиды, то видимыми будут линии $A''B''$ и $A''F''$ пересечения этих граней видимыми гранями прямой призмы; все другие участки пространственного шестиугольника – невидимые.

Для определения видимости ребер заданных многогранников воспользуемся конкурирующими точками двух скрещивающихся прямых. Например, возьмем конкурирующие точки *2* и *3*, одна из которых (точка *3*) лежит на ребре пирамиды *SL*, а вторая – на ребре призмы и $2' = C'$. Так как на горизонтальной проекции видно, что точка $3'$ расположена ниже, чем точка $2'$, значит, она находится ближе к наблюдателю и, следовательно, на фронтальной проекции видна точка $3''$, а она лежит на ребре *SL*. Следовательно, участок $L''B''$ ребра *SL* видимый. Аналогично можно определить видимость фигур и на других участках.

Рассмотрим построение трех проекций линии пересечения поверхностей на конкретном примере. Заданы прямой круговой конус и правильная пятигранная призма, боковая поверхность которой является фронтально-проецирующей. Исходя из свойств проецирующих фигур определяем, что фронтальная проекция линии пересечения уже есть – она совпадает с частью фронтальной проекции призмы и является пространственной ломаной кривой линией $1''–2''–3''–4''–5''–6''–7''–8''–9''–10''–11''–12''$. Точки *1* и *12* являются крайними точками линии пересечения и лежат на левой крайней образующей конуса. Поэтому их горизонтальные проекции могут быть найдены без дополнительных построений. Точки *2*, *5*, *9*, *10* являются точками пересечения ребер призмы с поверхностью конуса. Точки *4* и *8* являются точками, лежащими на очерковых образующих конуса на профильной плоскости проекций. Остальные точки являются промежуточными и служат для более точного построения кривых участков линии пересечения (рисунок 5.2).

Заданы прямой круговой конус и правильная пятигранная призма, боковая поверхность которой является фронтально-проецирующей. Исходя из свойств проецирующих фигур определяем, что фронтальная проекция линии пересечения уже есть – она совпадает с частью фронтальной проекции призмы и является пространственной ломаной кривой линией $1''–2''–3''–4''–5''–6''–7''–8''–9''–10''–11''–12''$. Точки *1* и *12* являются крайними точками линии пересечения и лежат на левой крайней образующей конуса. Поэтому их горизонтальные проекции могут быть найдены без дополнительных построений. Точки *2*, *5*, *9*, *10* являются точками пересечения ребер призмы с поверхностью конуса. Точки *4* и *8* являются точками, лежащими на очерковых образующих конуса на профильной плоскости проекций. Остальные точки являются промежуточными и служат для более точного построения кривых участков линии пересечения (рисунок 5.2).

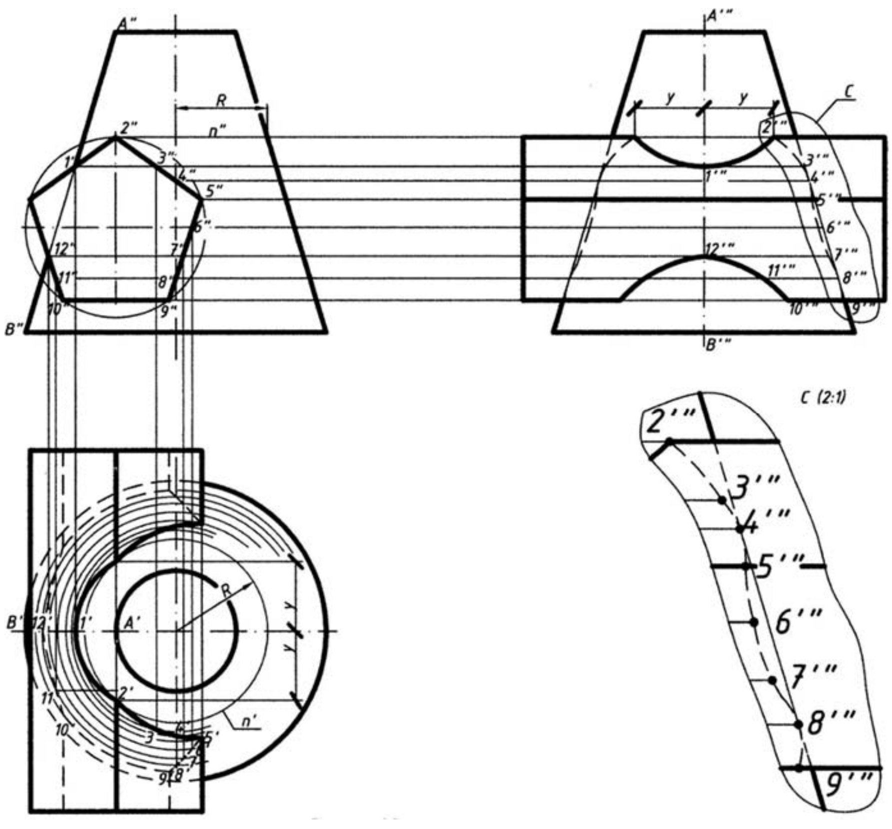


Рисунок 5.2 – Пересечение конуса и пятигранной призмы

Рассмотрим построение горизонтальной проекции линии пересечения поверхностей на примере точки *2*. Через точку *2″* на фронтальной проекции проведем на поверхности конуса параллель *n*, которая на плоскости *V* является прямой линией и расположена параллельно основанию конуса. На плоскость *H* параллель *n* проецируется в виде окружности радиусом *R*. В пересечении полученной окружности *n′* с верхним ребром призмы получаем точку *2″*. Аналогично можно найти все остальные точки линии пересечения, которые затем соединить плавной линией с помощью лекала с учетом видимости. Видимым будет участок *1′–2′–3′–4′–5′* линии пересечения, т. к. он лежит на двух верхних гранях призмы.

Теперь приступим к построению профильной проекции. Сначала следует построить профильные проекции заданных фигур, а затем – проекции точек линии пересечения. Точки *1‴*, *12‴*, *4‴*, *8‴* могут быть найдены с помощью линий связи на соответствующих проекциях образующих конуса (например, *1″* ∈ *A″B″*; *1‴* ∈ *A‴B‴* и т. д.). Для построения, например, точки *2‴*, нужно на горизонтальной линии связи, проведенной через точку *2″*, отложить от оси конуса координату «*y*», измеренную на горизонтальной проекции. Аналогично можно найти остальные точки и соединить их ломаной кривой с учетом видимости.

5.2 Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей

Линия пересечения поверхностей есть множество точек, принадлежащих одновременно обоим поверхностям. В общем случае, чтобы построить какую-либо точку этой линии, рассекают обе поверхности третьей вспомогательной плоскостью-посредником. Затем строят линии, по которым данные поверхности пересекаются с посредником.

На рисунке 5.3 представлены две сферы, которые пересекаются между собой.

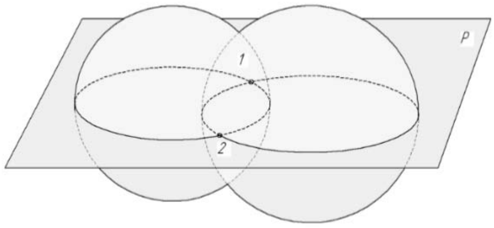


Рисунок 5.3 – Пересечение поверхностей методом секущих плоскостей-посредников

Для нахождения их общих точек *1* и *2* (точек линии пересечения) эти обе поверхности рассекаются третьей поверхностью-посредником плоскостью *P*. Эта плоскость рассекает обе поверхности по окружностям, которые, пересекаясь, дают общие точки *1* и *2*. Применив несколько плоскостей (горизонтальные плоскости уровня), получим ряд точек линии пересечения сфер.

Посредники следует выбирать таким образом, чтобы заданные поверхности пересекались ими по простейшим линиям: окружностям или прямым. В качестве поверхностей-посредников чаще всего применяют плоскости частного положения (плоскости уровня или проецирующие плоскости) и сферы.

Пусть требуется определить линию пересечения поверхности сферы с поверхностью тора (рисунок 5.4). Так как обе заданные поверхности являются поверхностями вращения, то линия их пересечения представляет пространственную кривую, для построения которой нужно найти ряд точек.

Для получения этих точек следует воспользоваться такими вспомогательными плоскостями, чтобы проекции линий пересечения с заданными поверхностями были бы наиболее простого вида. Такими плоскостями в данном случае являются горизонтальные плоскости (α, β, γ, σ), которые пересекают заданные поверхности по окружностям, проецирующимся на горизонтальную плоскость проекций без искажения. Взаимное пересечение горизонтальных проекций указанных окружностей определяет горизонтальные проекции точек, принадлежащих линии пересечения.

Сначала находим точки *1* и *6*, которые являются высшей и низшей точками линии пересечения. Это характерные точки линии пересечения. Точки *1″* и *6″* определяют сразу на фронтальной проекции без дополнительных построений как результат пересечения очерковых образующих заданных поверхностей. Так, в частности, в результате пересечения поверхностей сферы и тора горизонтальной плоскости α получены окружности радиусами R_1 и R_2. Эти окружности на горизонтальной проекции пересекаются в точках *2′* и *2₁′*, затем находим их на фронтальной плоскости по линии связи на следе α_V.

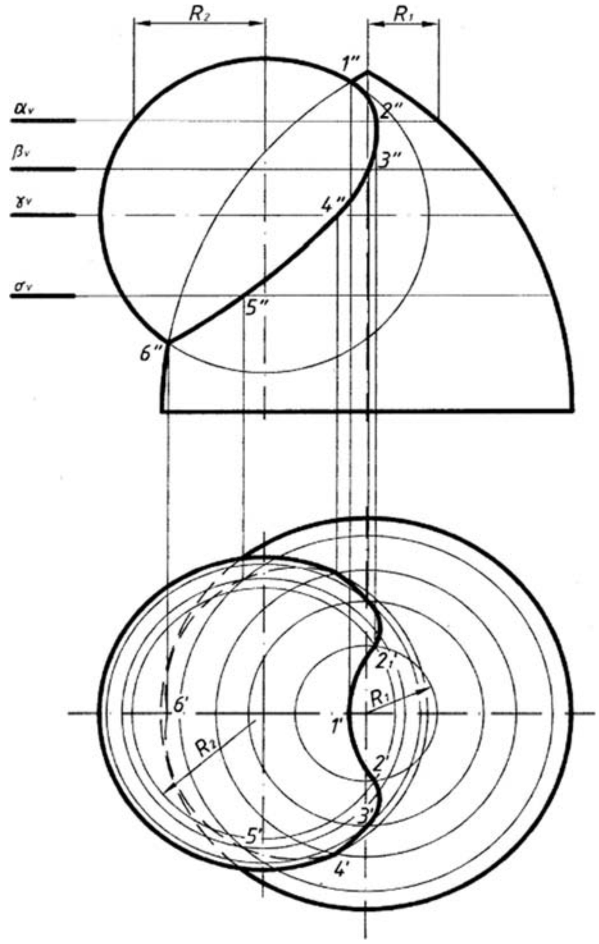


Рисунок 5.4 – Пересечение сферы и тора

Проведя ряд горизонтальных вспомогательных плоскостей, аналогичным образом найдем и другие точки, принадлежащие линии пересечения.

Точка *4* определена в пересечении поверхностей плоскостью γ, проходящей через экватор сферы и являющейся границей видимости на горизонтальной проекции. Все найденные точки следует последовательно соединить друг с другом плавной кривой линией.

5.3 Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих сфер

Способ вспомогательных секущих сфер может быть использован, если:

– заданные поверхности являются поверхностями вращения;

– оси заданных поверхностей пересекаются;

– оси поверхностей лежат в плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций.

Для того чтобы сферические поверхности использовать в качестве вспомогательных поверхностей при определении линии пересечения поверхностей двух тел вращения, за центр вспомогательных сферических поверхностей следует принимать точку пересечения осей заданных поверхностей.

На рисунке 5.5 приведен пример определения проекций точек линии пересечения поверхностей двух конусов, оси которых пересекаются в точке *O* и параллельны плоскости *V*. Сферическая поверхность радиусом R_1 с центром в точке *O* пересечет конические поверхности по окружностям, фронтальные проекции которых изобразятся в виде прямых *1″–2″* и *3″–4″*. Взаимное пересечение этих прямых определяет фронтальную проекцию *E″* точки *E*, принадлежащей линии пересечения.

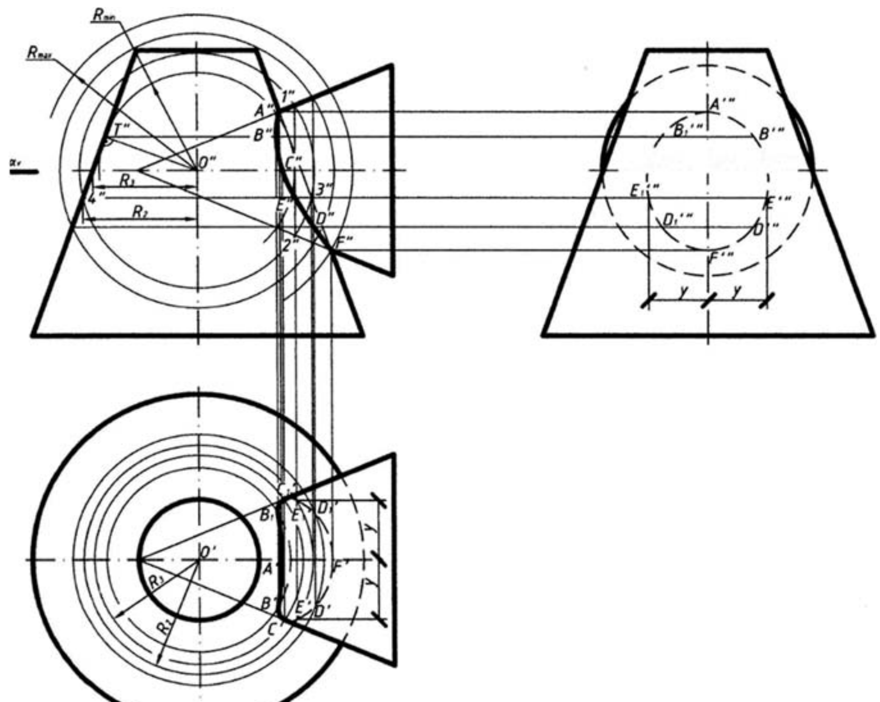


Рисунок 5.5 – Пересечение двух конусов

Проведя несколько сферических поверхностей с различными радиусами из того же центра, получим аналогичным образом ряд точек, принадлежащих линии пересечения. Минимальный радиус $R_{\min}$ сферической поверхности, которая может быть использована при решении задачи, равен радиусу сферы, касающейся одной из заданных поверхностей и пересекающей другую поверхность. В данном случае минимальный радиус сферической поверхности равен радиусу *O″T″* сферы, касающейся поверхности конуса с вертикальной осью, т. к. второй конус она при этом будет пересекать. С помощью сферы минимального радиуса найдена точка *B″*, принадлежащая искомой линии пересечения. Опорными точками линии пересечения являются точки *A″* и *F″*, которые определяются как точки пересечения очерковых образующих заданных поверхностей.

Найдя с помощью сфер различного радиуса ряд точек линии пересечения поверхностей, соединяем их плавной кривой линией.

На горизонтальной проекции строим точки линии пересечения исходя из условия ее принадлежности конусу с вертикальной осью. Например, для построения точки E' нужно построить параллель, проходящую через точки $3''$ и $4''$. На плоскости H она будет проецироваться в виде окружности радиусом R_2 и на ней по линии связи будут находиться точки E' и E_1'. Аналогично можно найти остальные точки. Для определения точек C' и C_1', делящих горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части, можно воспользоваться плоскостью γ, которая пересечет больший конус по окружности R_3, а меньший конус – по очерковому треугольнику. В результате их пересечения получим точки C' и C_1'.

Построение профильной проекции линии пересечения поверхностей сводится к построению третьей проекции точки по заданным фронтальной и горизонтальной и показано на чертеже на примере точки E'''. Профильная проекция линии пересечения поверхностей будет полностью невидимой, т. к. закрыта вертикально стоящим конусом.

Список литературы

1 Начертательная геометрия. Геометрическое и проекционное черчение: учебник / П. Н. Учаев [и др.]; под общ. ред. П. Н. Учаева. – Старый Оскол: ТНТ, 2017. – 340 с.

2 **Чекмарев, А. А.** Инженерная графика. Машиностроительное черчение: учебник / А. А. Чекмарев. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – 396 с.

3 **Чекмарев, А. А.** Инженерная графика: аудиторные задачи и задания: учебное пособие / А. А. Чекмарев. – 2-е изд., испр. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – 78 с.

4 **Швец, М. И.** Начертательная геометрия в тестовых задачах: учебное пособие / М. И. Швец, В. Н. Тимофеев, А. П. Пакулин. – Москва: КноРус, 2017. – 540 с.

5 **Арустамов, Х. А.** Сборник задач по начертательной геометрии с решениями типовых задач: учебное пособие / Х. А. Арустамов; под ред. А. А. Чекмарева. – 10-е изд. перераб. – Москва: КноРус, 2016. – 488 с.

6 **Хейфец, А. Л.** Компьютерная графика для строителей: учебник для академ. бакалавриата / А. Л. Хейфец, В. Н. Васильева, И. В. Буторина; под ред. А. Л. Хейфеца. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2017. – 204 с.

7 Метрические задачи. Инженерная графика. Начертательная геометрия и компьютерная графика: методические рекомендации для студентов всех специальностей и направлений подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 27.03.05 «Инноватика» / Сост. В. М. Акулич. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – 22 с.

8 Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика в задачах и примерах: учебное пособие / П. Н. Учаев [и др.]; под общ. ред. П. Н. Учаева. – Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 288 с.