

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов всех технических специальностей
и направлений подготовки
очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2023

УДК 539.3/6
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «31» августа 2023 г., протокол № 1

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко;
канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович;
ст. преподаватель С. В. Гонорова;
ст. преподаватель Е. Г. Кривоногова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебными и рабочими программами по дисциплинам «Механика материалов», «Соппротивление материалов», «Соппротивление материалов и теория упругости» для студентов всех технических специальностей и направлений подготовки.

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

1 Лабораторная работа № 9. Методика испытаний материалов на прочность при переменных напряжениях.....	4
1.1 Краткие теоретические сведения.....	4
1.2 План выполнения лабораторной работы.....	8
2 Лабораторная работа № 10. Опытная проверка теории косого изгиба.....	10
2.1 Краткие теоретические сведения.....	10
2.2 План выполнения лабораторной работы.....	13
3 Лабораторная работа № 11. Опытная проверка теории внецентренного растяжения.....	14
3.1 Краткие теоретические сведения.....	14
3.2 План выполнения лабораторной работы.....	17
4 Лабораторная работа № 12. Определение удлинения и жесткости винтовой цилиндрической пружины.....	18
4.1 Краткие теоретические сведения.....	18
4.2 План выполнения лабораторной работы.....	21
5 Лабораторная работа № 13. Опытная проверка теории продольного изгиба (определение критической силы при потере устойчивости).....	23
5.1 Краткие теоретические сведения.....	23
5.2 Методика опытного определения критической силы.....	27
5.3 План выполнения лабораторной работы.....	27
6 Лабораторная работа № 14. Определение опорного момента в статически неопределимой балке.....	28
6.1 Краткие теоретические сведения.....	28
6.2 Метод начальных параметров.....	30
6.3 Расчет опорного момента для заданной балки.....	31
6.4 План выполнения лабораторной работы.....	32
7 Лабораторная работа № 15. Опытная проверка теоремы о взаимности работ и перемещений.....	33
7.1 Краткие теоретические сведения.....	33
7.2 План выполнения лабораторной работы.....	36
Список литературы.....	37

1 Лабораторная работа № 9. Методика испытаний материалов на прочность при переменных напряжениях

Цель работы

Ознакомиться с методикой проведения испытаний материалов под действием переменных напряжений и методикой определения предела выносливости.

1.1 Краткие теоретические сведения

Многие детали за время своей службы многократно подвергаются действию периодически изменяющихся во времени нагрузок (напряжений). опыты показывают, что при этом детали разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем напряжения, вызванные действием статических нагрузок.

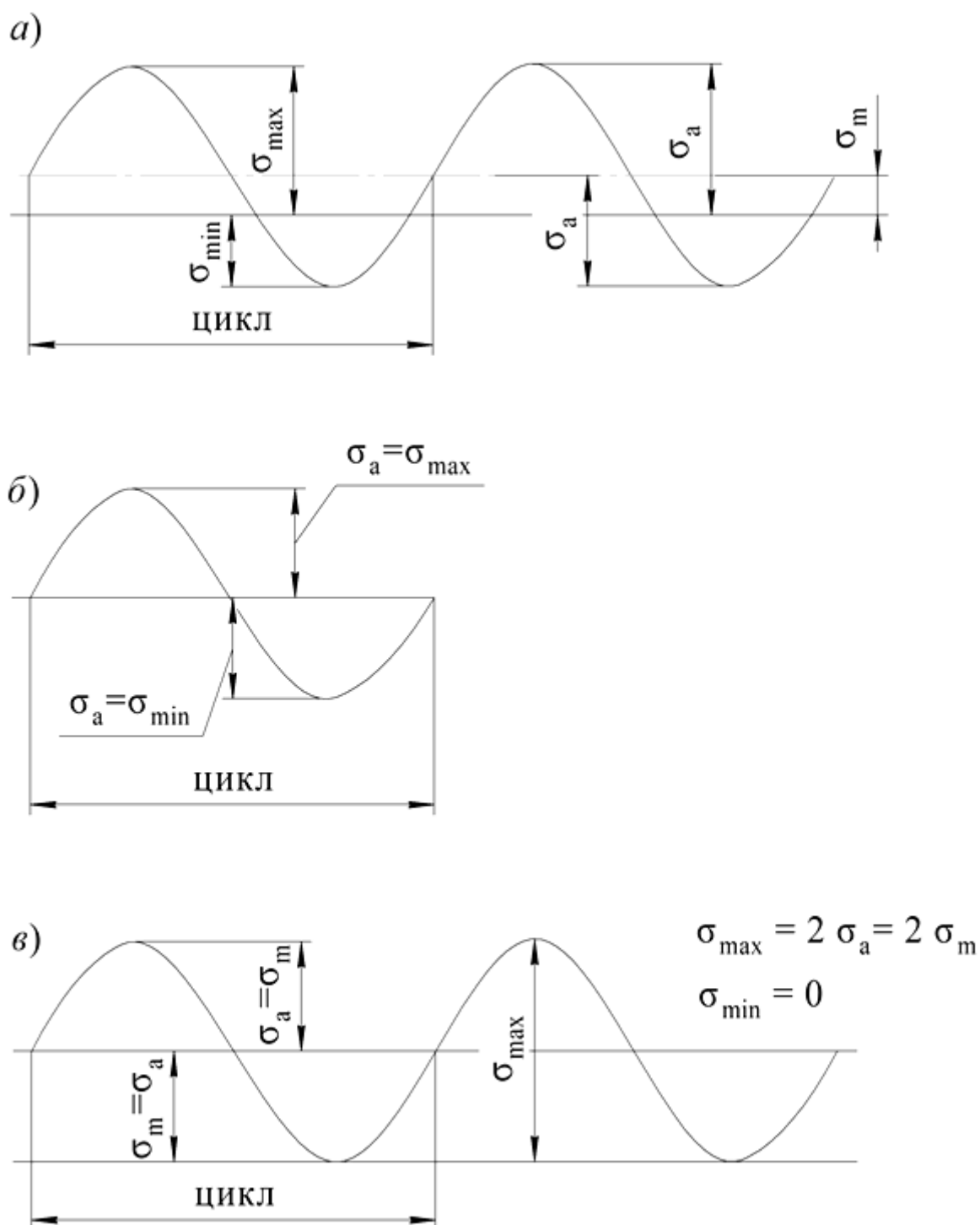
При действии циклических нагрузок разрушение происходит в результате возникновения и постепенного развития трещин. Природа усталостного разрушения обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Считается, что она кроется в неоднородности строения материалов. Отдельные кристаллы металла обладают различной прочностью в разных направлениях, поэтому при определенных напряжениях в отдельных кристаллах возникают пластические деформации.

При повторных нагрузках и разгрузках материал может упрочняться (явление наклепа), что ведёт к его охрупчиванию. В конце концов, при определенном числе повторений нагрузки способность материала к упрочнению исчерпывается и возникает микротрещина на одной из плоскостей скольжения кристаллов. Эта трещина является сильным концентратором напряжений и с учетом увеличивающегося ослабления сечения становится местом окончательного разрушения.

Таким образом, процесс постепенного накопления повреждений металла под действием переменных напряжений, приводящих к изменению структуры, свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению изделия называется **усталостью материала**, а способность материалов противостоять усталостному разрушению – **выносливостью материалов (усталостной прочностью)**.

Наибольшая величина периодически меняющегося напряжения, которому материал может сопротивляться без разрушения неограниченно долго, называется **пределом выносливости (усталости)** и обозначается σ_r , где индекс r является коэффициентом асимметрии цикла. Предел выносливости зависит от целого ряда факторов, в частности, от формы и размеров детали, способа её обработки, состояния поверхности детали, вида напряженно-деформированного состояния (изгиб, кручение и т. д.), закона изменения нагрузки во времени и т. п. Стальной образец, который выдержал 10^7 циклов (это число называется **базовым числом циклов**), может выдержать неограниченно много циклов нагружения. Поэтому для стальных образцов после прохождения 10^7 циклов опыты прекращают. Напряжение, соответствующее $N = 10^7$ циклов, принимается за предел выносливости материала.

Повторно-переменные нагрузки и возникающие напряжения изменяются во времени по различным законам. Наиболее распространенные графики изменения напряжений во времени приведены на рисунке 1.1.



a – график асимметричного цикла; *б* – график симметричного цикла; *в* – график пульсационного цикла

Рисунок 1.1 – Графики закона изменения напряжений во времени для разных циклов

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется **циклом**. Цикл переменных напряжений характеризуется следующими параметрами:

- максимальное напряжение (в алгебраическом смысле) σ_{\max} ;
- минимальное напряжение σ_{\min} ;
- среднее напряжение $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2$;
- амплитуда цикла $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$;
- коэффициент асимметрии цикла $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$.

Из рисунка 1.1 видно, что $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$, а $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$.

На усталостную прочность в основном влияют значения максимальных и минимальных напряжений цикла.

Для расчетов на прочность при действии повторно-переменных нагрузок необходимо знать предел выносливости материала. Он определяется путем испытания образцов на специальных машинах, однако такие испытания весьма дорогостоящи и требуют больших затрат времени. Испытания на усталость проводят при растяжении-сжатии, изгибе и кручении: при симметричных и асимметричных циклах напряжений или деформаций, при наличии или отсутствии концентраторов напряжений и агрессивных сред, при комнатной, повышенной или пониженной температурах, в много- или малоцикловой упругой и упругопластической областях.

Наиболее простым и распространенным является испытание образцов при симметричном цикле напряжений. Простейшим примером является вращающийся вал, работающий в центральной части на чистый изгиб под действием постоянной нагрузки (рисунок 1.2).

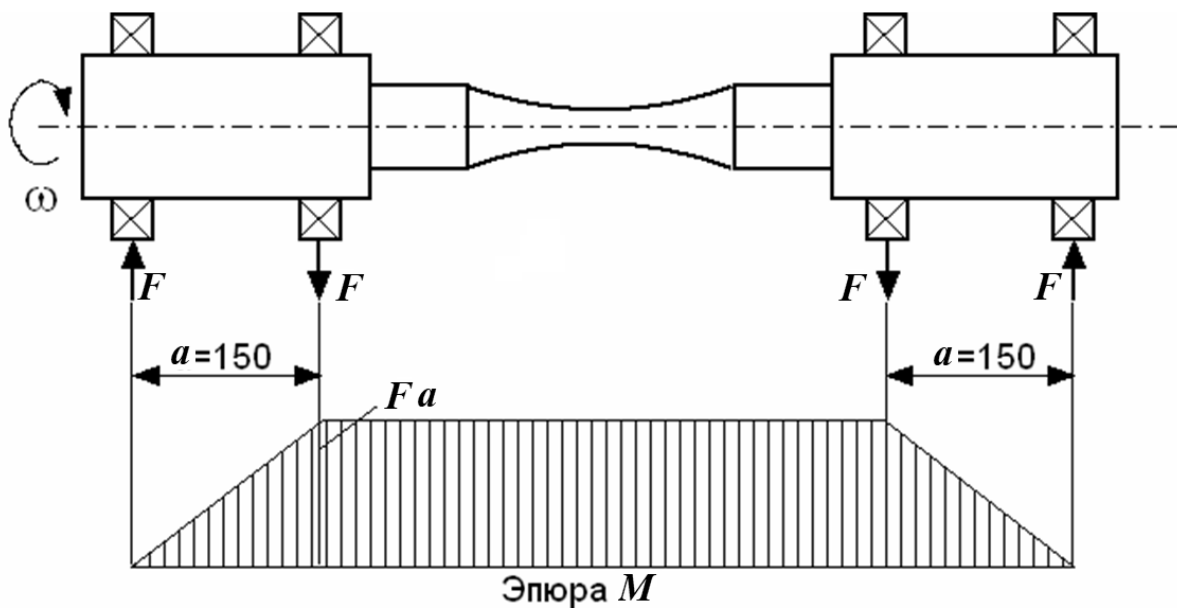


Рисунок 1.2 – Схема нагружения образца и эпюра изгибающих моментов

В начальный момент времени верхние слои образца сжаты. При повороте образца на 180° эти слои оказываются в растянутой области. Таким образом, при вращении образца материал будет испытывать попеременные напряжения, изменяющиеся по наружному диаметру от σ_{\max} до σ_{\min} . Эпюра распределения напряжений по высоте поперечного сечения при статическом изгибе образца изображена на рисунке 1.3.

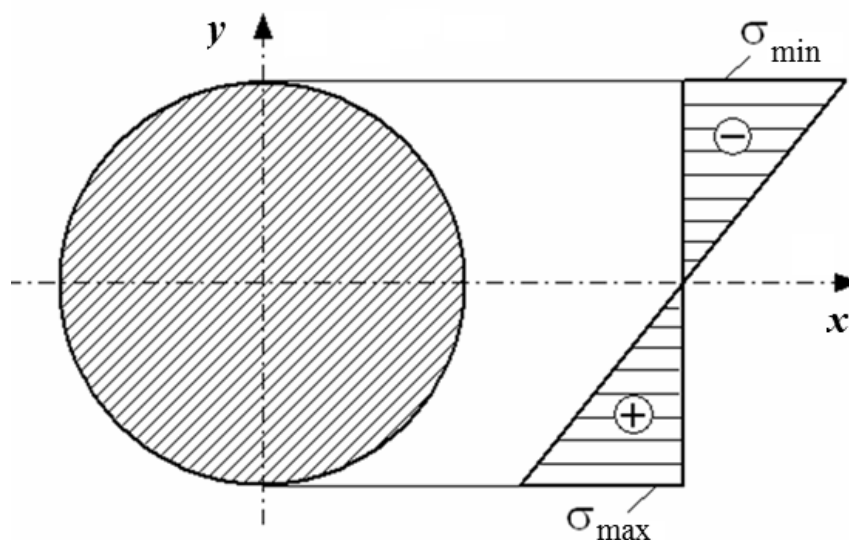


Рисунок 1.3 – Эпюра нормальных напряжений

Для проведения испытаний берут 6–12 одинаковых образцов диаметром 5...15 мм с полированной поверхностью. Первый образец циклически нагружают при высоком значении $\sigma_{\max} = 0,6 \cdot \sigma_s$ для того, чтобы он разрушился при сравнительно небольшом числе циклов N . Последующие образцы подвергают испытанию, но уже с меньшим напряжением, уменьшенным приблизительно на 20...40 МПа или 20 % от предыдущего напряжения, фиксируя число циклов до разрушения N_i . Естественно, что разрушение произойдет уже при большем числе циклов. В процессе испытания строят *диаграмму усталости* в координатах $\sigma_{\max} - N$ (рисунок 1.4).

Эта кривая характерна тем, что, начиная с некоторого напряжения, она асимптотически приближается к горизонтальной прямой линии. Это означает, что при определенном напряжении (предел выносливости σ_{-1}) образец может выдержать бесконечно большое число циклов, не разрушаясь.

Так как такие испытания носят долговременный характер, лабораторная работа делается теоретически, опираясь на известные значения предела выносливости материала (таблица 1.1).

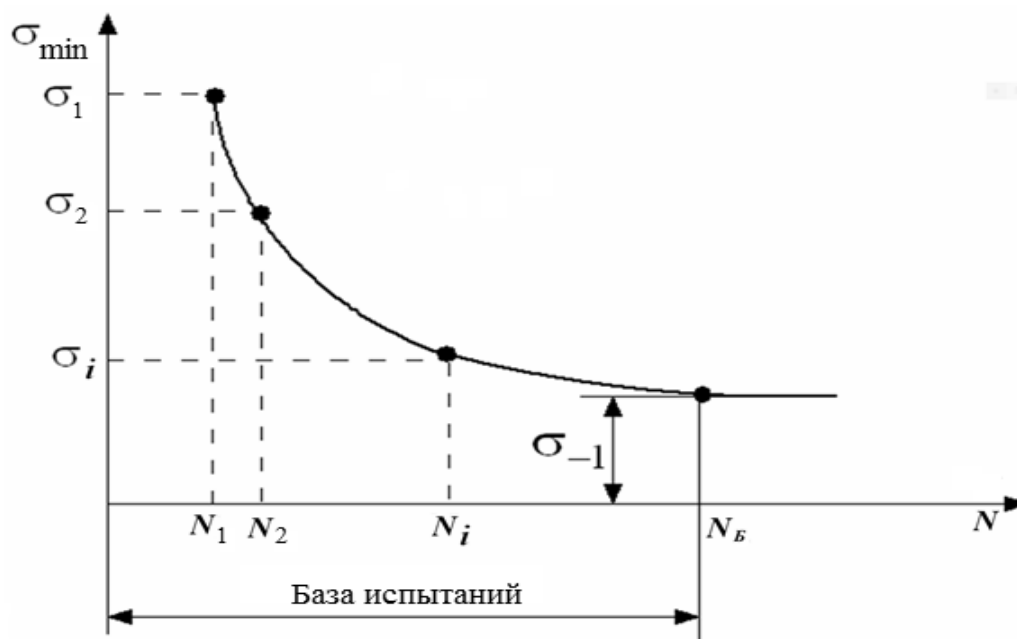


Рисунок 1.4 – Кривая усталости (кривая Веллера)

Таблица 1.1 – Механические характеристики сталей

Марка стали	Предел прочности σ_b , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Предел выносливости при симметричном цикле (изгиб) σ_{-1} , МПа
40	570...700	320	230...320
45	600...750	340	250...340
50	630...800	350	270...350
30Г	560...700	290	220...320

1.2 План выполнения лабораторной работы

1 В соответствии с заданием, выданным преподавателем, зафиксировать диаметр образца и материал, из которого он изготовлен, и количество образцов для испытаний.

2 Из таблицы 1.1 выписать значение предела прочности σ_b материала и определить максимальное напряжение первого образца по формуле

$$\sigma_1^{\max} = 0,6\sigma_b.$$

3 Произвести расчет изгибающей силы для первого образца согласно форме отчета.

4 Заполнить протокол предполагаемого испытания.

5 Заполнить таблицу журнала лабораторных работ с одновременным построением диаграммы усталости:

– принять число циклов, при котором разрушился первый образец, равным $N_1 = 0,5 \cdot 10^6$;

– нанести первую точку на диаграмму усталости с координатами σ_1, N_1 ;

- через первую и последнюю точку провести плавную кривую, подобную кривой Веллера, изображенной на рисунке 1.4;
- рассчитать максимальные напряжения для последующих образцов с учетом выбранного шага уменьшения (20...40 МПа);
- по построенной диаграмме и вычисленным значениям нормальных напряжений определить предположительное число циклов до разрушения промежуточных образцов;
- показать на диаграмме усталости предел выносливости материала.

6 Определить параметры цикла первого образца.

7 По известным значениям максимального нормального напряжения и периода цикла построить график изменения напряжений во времени для заданного образца и показать на нём параметры цикла.

Контрольные вопросы

1 Приведите примеры деталей и узлов техники, работающих в условиях переменных напряжений.

2 Дайте определения понятиям «усталость материалов», «выносливость материалов», «предел выносливости».

3 Как определяется амплитуда, среднее напряжение, коэффициент асимметрии цикла?

4 Назовите основные причины, приводящие к разрушению материалов при действии циклически изменяющихся напряжений.

5 Как влияет молекулярное и кристаллическое строение вещества на природу разрушения материала?

6 Имеет ли место концентрация напряжения в момент образования трещины в материале?

7 Какое минимальное число образцов должно быть в партии при испытании материалов на усталость?

8 При каком напряжении производят испытания первого образца?

9 Как должен быть обработан образец при испытании на усталость?

10 Что такое цикл?

11 Назовите базовое число циклов для стальных образцов.

12 В каких координатах строится диаграмма усталости для симметричного цикла?

2 Лабораторная работа № 10. Опытная проверка теории косоугольного изгиба

Цель работы

Ознакомиться с косоугольным изгибом консольной балки и сравнить опытные значения прогиба с теоретическими.

2.1 Краткие теоретические сведения

Косоугольным изгибом называется вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

В случае, представленном на рисунке 2.1, а, косоугольный изгиб испытывают сечения второго участка балки.

Косоугольный изгиб также имеет место в случае нагружения балки внешними силами или моментами, плоскость действия которых не совпадает с одной из главных центральных осей инерции сечения (рисунок 2.1, б). Косоугольный изгиб в данном случае испытывают все сечения по длине балки.

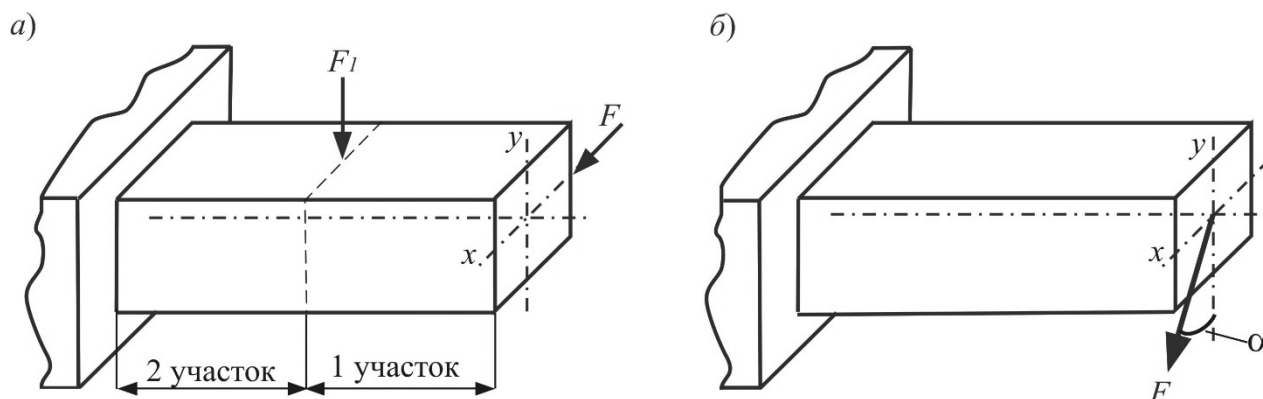


Рисунок 2.1 – Схемы нагружения

Для определения напряжений и деформаций при косоугольном изгибе используется принцип независимости действия сил. Это позволяет рассмотреть косоугольный изгиб как сочетание двух прямых изгибов относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения. **На основании принципа независимости действия сил величины напряжений и деформаций рассчитываются путем геометрического сложения.**

Для балки, изображенной на рисунке 2.2, а, можно рассчитать величину изгибающего момента в произвольном сечении с координатой z :

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (2.1)$$

где изгибающие моменты в плоскостях

$$M_x = |F_y z| = |F \cos \alpha z| = |M \cos \alpha|; \quad M_y = |F_x z| = |F \sin \alpha z| = |M \sin \alpha|.$$

Следовательно, плоскость действия полного момента проходит через центр тяжести сечения.

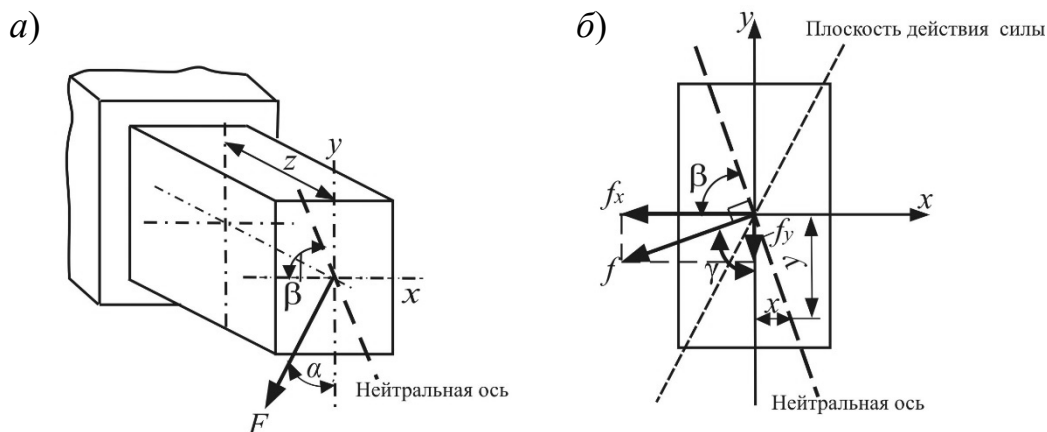


Рисунок 2.2 – К определению напряжений и деформаций

Напряжения при косом изгибе рассчитываются по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x, \quad (2.2)$$

где x, y – координаты рассматриваемых точек поперечного сечения относительно главных центральных осей.

Знаки «+» и «-» при расчете напряжений определяются действием изгибающего момента в рассматриваемой точке.

Величина полного прогиба (рисунок 2.2, б):

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (2.3)$$

Нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения (см. рисунок 2.2, б). Нормальные напряжения в центре тяжести поперечного сечения равны нулю, в чем можно убедиться, подставив в формулу (2.2) координаты центра тяжести $y = 0$ и $x = 0$.

Уравнение нейтральной оси представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат и записывается в виде (см. рисунок 2.2, б):

$$y = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x. \quad (2.4)$$

Положение нейтральной оси определяется углом наклона

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha. \quad (2.5)$$

Следовательно, в общем случае косоугольного изгиба выполняется условие $\beta \neq \alpha$.

Отсюда следует, что нейтральная ось не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента, или, как в случае нагружения, представленного на рисунке 2.2, a – плоскости действия нагрузки. Также нужно отметить, что положение нейтральной оси не зависит от величины изгибающего момента.

Если осевые моменты $I_x = I_y$, то $\beta = \alpha$. Тогда нейтральная ось будет перпендикулярна линии действия изгибающего момента и косоугольный изгиб невозможен.

Направление полного прогиба

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда на основании выражения (2.4) направление полного прогиба перпендикулярно к нейтральной оси:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\alpha. \quad (2.6)$$

Нормальные напряжения в точке поперечного сечения бруса при косоугольном изгибе, также как и в случае прямого изгиба, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нейтральной оси. Следовательно, наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси. Напряжения в этих точках рассчитываются при помощи формулы (2.2).

Существуют поперечные сечения с двумя осями симметрии (прямоугольник, двутавр и т. д.). Эти сечения имеют четыре выступающие угловые точки. Угловые точки наиболее удалены от обеих центральных осей.

В указанных сечениях опасные точки можно установить без определения положения нейтральной оси, учитывая свойства материала балки.

Для пластичного материала равноопасными будут две из четырех точек, в которых совпадают знаки напряжений σ_{M_x} и σ_{M_y} . Для бруса, изображенного на рисунке 2.3, a , опасными являются точки 1 и 2 соответственно.

Для хрупкого материала опасной является одна из четырех точек, в которой возникают наибольшие растягивающие напряжения (рисунок 2.3, b).

Проверка прочности в рассмотренных случаях осуществляется используя следующее неравенство:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (2.7)$$

Лабораторные испытания консольной балки при косоугольном изгибе позволяют

экспериментально подтвердить приведенные теоретические зависимости, сравнить опытные и теоретические величины прогибов.

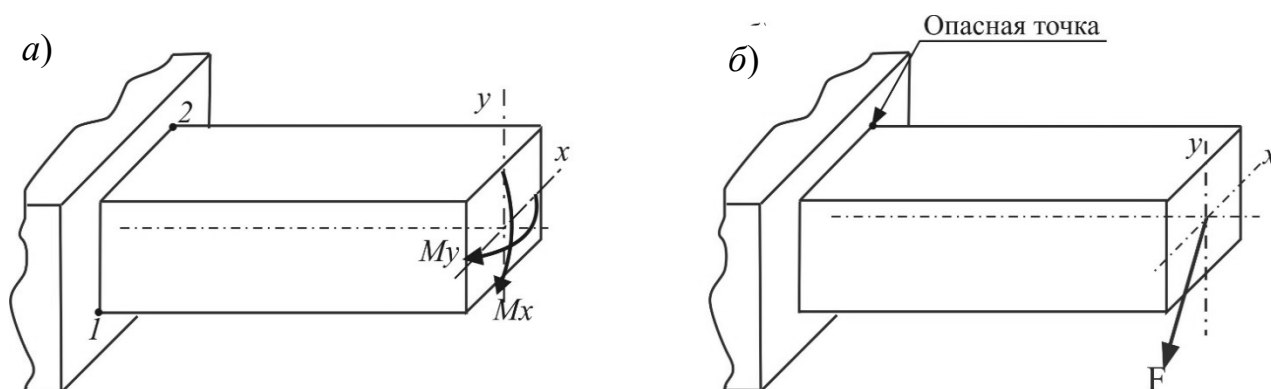
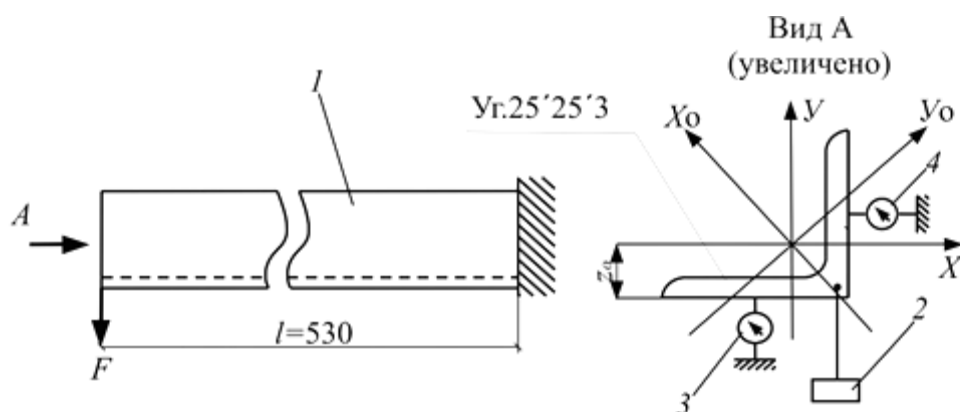


Рисунок 2.3 – Определение опасных точек

Испытания проводятся на лабораторной установке с использованием индикаторов часового типа. Схема установки изображена на рисунке 2.4.



l – консольная балка; 2 – гиревой подвес; 3, 4 – индикаторы часового типа

Рисунок 2.4 – Схема лабораторной установки

2.2 План выполнения лабораторной работы

- 1 Ознакомиться с методическими указаниями.
- 2 Ознакомиться с устройством лабораторной установки.
- 3 Получить исходные данные к выполнению лабораторной работы – нагрузку F .
- 4 Выполнить необходимые предварительные расчеты в соответствии с планом выполнения работы.
- 5 В заданном интервале усилий F произвести нагружение балки.
- 6 Для каждой ступени нагружения записать показания индикаторов в таблицу протокола испытаний.
- 7 Разгрузить балку.

8 В соответствии с формой отчета обработать результаты опыта и сформулировать выводы.

9 Представить преподавателю выполненный отчет по лабораторной работе.

Контрольные вопросы

1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?

2 В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?

3 Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?

4 Как определяется деформация при косом изгибе?

5 Может ли балка круглого или квадратного поперечного сечения испытывать косой изгиб?

6 В чем состоит принцип независимости действия сил при исследовании косого изгиба?

7 Как изменится величина полного прогиба при косом изгибе по сравнению с прогибом той же балки при прямом изгибе?

8 Как определить максимальную допускаемую нагрузку балки?

9 Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе?

10 Как направлен полный изгиб по отношению к нейтральной оси при косом изгибе?

11 Совпадает ли плоскость действия полного прогиба с плоскостью действия внешних сил при косом изгибе?

12 По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при косом изгибе?

3 Лабораторная работа № 11. Опытная проверка теории внецентренного растяжения

Цель работы

Исследовать закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении.

3.1 Краткие теоретические сведения

Внецентренное растяжение возникает при действии продольной внешней нагрузки, приложенной вне центра тяжести поперечного сечения бруса (рисунок 3.1). Следовательно, в нем возникают два вида деформаций: растяжение и изгиб. В поперечном сечении бруса действуют внутренние силовые факторы: продольная сила N и изгибающие моменты относительно осей X и Y соответственно:

$$N = F ; \quad (3.1)$$

$$M_x = F \cdot y_F; \quad (3.2)$$

$$M_y = F \cdot x_F, \quad (3.3)$$

где x_F, y_F – координаты точки приложения нагрузки.

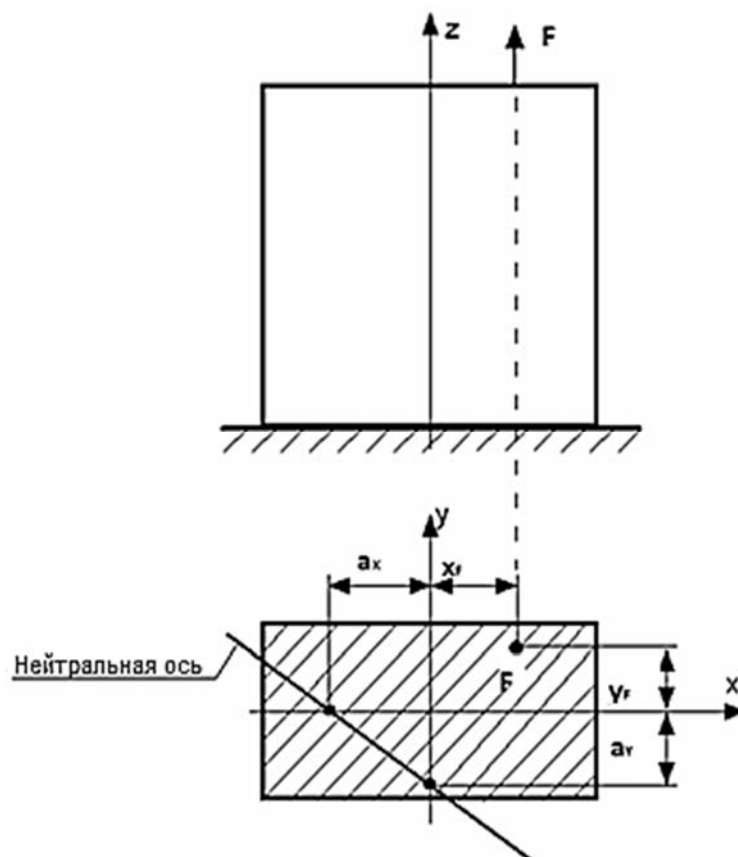


Рисунок 3.1 – Схема внецентренного растяжения

Нормальное напряжение в любой точке с произвольными координатами x и y согласно принципу независимости действия сил равно сумме напряжений от продольной силы и изгибающих моментов:

$$\sigma_i = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{F x_F x_i}{I_y} \pm \frac{F y_F y_i}{I_x}, \quad (3.4)$$

где x_i, y_i – координаты исследуемой точки.

Осевые моменты инерции сечения I_x и I_y можно представить в виде произведения квадрата радиуса инерции и площади поперечного сечения:

$$I_x = i_x^2 A; \quad I_y = i_y^2 A. \quad (3.5)$$

Тогда формула (3.4) будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right). \quad (3.6)$$

Знак перед формулой выбирается в зависимости от направления действия силы F . В скобках получается безразмерная величина, которая показывает во сколько раз выросли напряжения от того, что сила была приложена не в центре тяжести поперечного сечения.

Если точка приложения силы находится на одной из главных осей инерции сечения, то одно из слагаемых формулы (3.4) обращается в ноль. В данной лабораторной работе сила F приложена на оси X , соответственно $y_F = 0$, и формула (3.4) будет выглядеть как

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F x}{i_y^2} \right). \quad (3.7)$$

Согласно формуле (3.4) или (3.6) нормальные напряжения распределяются в плоскости поперечного сечения по **линейному закону**. Для определения опасных точек в сечении необходимо найти положение нейтральной линии, приравняв нормальные напряжения к нулю. Тогда отрезки a_x и a_y , отсекаемые нейтральной линией на осях X и Y , соответственно

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (3.8)$$

Знак «минус» показывает, что нейтральная линия всегда пересекает четверть, противоположную той, в которой приложена сила F . Напряжения будут максимальными в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Нейтральная линия может пересекать, касаться сечения или находиться за его пределами. Если нейтральная ось пересекает поперечное сечение, то она делит его на область сжатия и область растяжения. Если она не пересекает сечение, то во всех его точках напряжения имеют одинаковый знак, т. е. весь брус работает или на растяжение или на сжатие, в зависимости от того, какая была приложена сила.

Для брусьев, изготовленных из материалов плохо сопротивляющихся растяжению (чугун, бетон, кирпич и другие хрупкие материалы), важно прикладывать внецентренную силу так, чтобы исключить растянутую область при сжимающей нагрузке.

Ядро сечения – это область вокруг центра тяжести сечения, которая обладает следующим свойством: если внецентренно приложенная нагрузка расположена внутри ядра, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Для определения ядра сечения силу необходимо прикла-

дывать таким образом, чтобы нейтральная линия была касательной к контуру сечения, тогда точки приложения силы вычертят контуры ядра сечения. Если сила приложена на границе ядра сечения, то нейтральная ось будет только его касаться.

Для подтверждения теоретических суждений о линейном законе распределения нормальных напряжений по высоте сечения балки проводится эксперимент. В трех заданных точках поперечного сечения бруса наклеены тензорезисторы, показания которых фиксируются тензометрической станцией TS32L1. Полученные показания по специальной программе пересчитываются в напряжения и выводятся на монитор персонального компьютера.

Для повышения надежности результатов опыта к балке прикладывают несколько нагрузок равными ступенями.

Разность между последующим и предыдущим напряжениями показывают величину напряжения в точке соответствующей ступени нагрузок.

После определения опытных значений напряжений их следует сравнить с теоретическими значениями и определить процент погрешности эксперимента.

3.2 План выполнения лабораторной работы

- 1 Ознакомиться с методическими указаниями.
- 2 Произвести необходимые теоретические расчеты в отчете к лабораторной работе.
- 3 Показать на поперечном сечении положение нейтральной оси.
- 4 Ознакомиться со схемой закрепления образца на машине.
- 5 Ознакомиться с вопросами техники безопасности.
- 6 Ознакомиться с тензометрической станцией TS32L1 и испытательной машиной по инструкции с помощью преподавателя.
- 7 Нагрузить образец сосредоточенной силой с равномерным шагом (включает и выключает машину лаборант).
- 8 Снять показания напряжений с монитора компьютера для трех точек при каждой нагрузке.
- 9 Произвести обработку экспериментальных данных.
- 10 Определить погрешность опыта и сделать вывод по работе.
- 11 Сообщить преподавателю о выполнении работы, подписать отчет.

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется внецентренным растяжением или сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии?
- 3 По какой формуле определяют напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
- 4 Как определяется напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?

5 Что такое ядро сечения?

6 Какое положение занимает нейтральная линия, если продольная сила приложена на границе ядра сечения?

7 Для чего в лабораторной работе определяется нагрузка P_{III} ?

8 Какой измерительный прибор применялся в лабораторной работе?

9 Для каких материалов сжимающую нагрузку необходимо прикладывать в ядре сечения?

10 На какой машине производились испытания?

11 Что такое нейтральная линия и где она расположена в общем случае нагружения?

12 Почему напряжение в точке I отсутствует?

13 По какому закону в поперечном сечении распределяются нормальные напряжения?

14 Где необходимо прикладывать нагрузку, чтобы эпюра напряжений была постоянна по сечению?

15 Где необходимо приложить нагрузку, чтобы нейтральная линия являлась касательной к контуру сечения?

16 Какая осевая нагрузка создает большие по величине напряжения – приложенная в центре тяжести или вне его?

17 Относительно каких осей в данной лабораторной работе возникают изгибающие моменты?

4 Лабораторная работа № 12. Определение удлинения и жесткости винтовой цилиндрической пружины

Цель работы

Определить удлинение и жесткость пружины, построить характеристику пружины.

4.1 Краткие теоретические сведения

Витые пружины принадлежат к числу наиболее распространенных упругих элементов машиностроения. Они применяются в самых различных конструкциях как аккумуляторы упругой энергии амортизирующих, возвратно подающих и многих других механических устройств.

Витая пружина может рассматриваться как пространственно изогнутый брус. Ось бруса в простейшем случае представляет собой винтовую линию. Геометрическая форма осевой линии определяется средним диаметром пружины D , числом витков n и углом подъема α (рисунок 4.1). Подъем витка можно характеризовать также шагом пружины S :

$$S = \pi D t g \alpha . \quad (4.1)$$

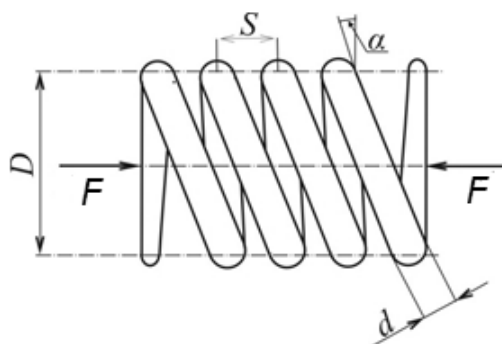


Рисунок 4.1 – Геометрические характеристики

Свойства пружин зависят от формы поперечного сечения витка. Обычно, пружины завиваются из круглой проволоки. Диаметр поперечного сечения проволоки обозначается через d . В этом случае геометрические характеристики сечения определяются при помощи выражений:

– площадь $A = \frac{\pi d^2}{4}$;

– полярный момент сопротивления $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$;

– полярный момент инерции $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

В зависимости от вида воспринимаемых рабочих нагрузок витые пружины подразделяются на пружины растяжения (рисунок 4.2, а), пружины сжатия (рисунок 4.2, б).

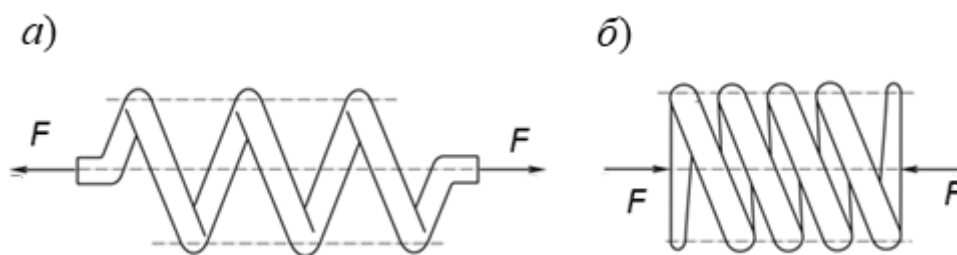


Рисунок 4.2 – Пружины растяжения и сжатия

Зависимость осевого перемещения (удлинения или осадки) пружины от осевой нагрузки называется характеристикой пружины.

Если пружина навита из круглой проволоки, то величину осевого перемещения (удлинение или укорочение) можно определить по формуле

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4}. \quad (4.2)$$

Усилие F , при котором осевое перемещение λ пружины равно единице (1 мм, 1 см и т. д.), называется *жесткостью пружины*.

Жесткость пружины можно определить, используя выражение

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n}. \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$\lambda = \frac{F}{C}. \quad (4.4)$$

Следовательно, увеличение числа витков n пропорционально увеличивает деформацию пружины λ и уменьшает ее жесткость. Увеличение диаметра проволоки повышает жесткость пружины, а увеличение диаметра пружины понижает ее.

При определении величины n для пружины растяжения отогнутая часть витков на концах во внимание не принимается. Для пружины сжатия из полного числа витков исключается примерно по 3/4 витка с каждого торца, поскольку эти витки поджаты при навивке к соседним и свободно деформироваться не могут. Таким образом, предполагается, что 1,5 витка в работе не участвуют.

В поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q и крутящий момент M_k (рисунок 4.3). Тогда на основании принципа независимости действия сил можно определить напряжения от этих внутренних силовых факторов.

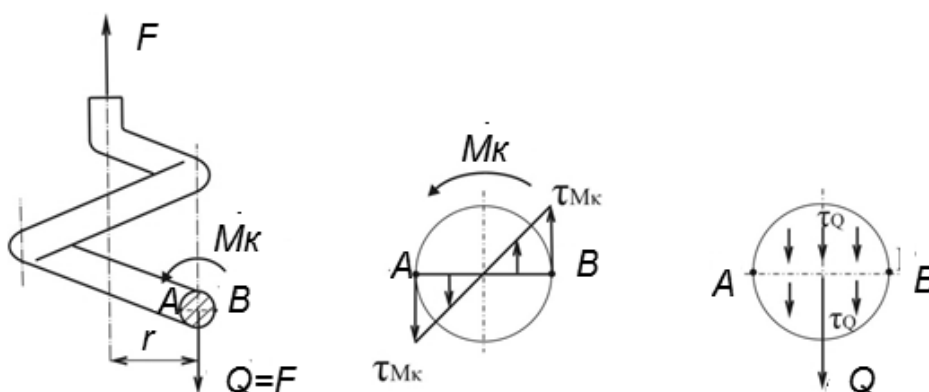


Рисунок 4.3 – Распределение напряжений

Касательные напряжения, вызванные действием поперечной силы Q , определяются выражением

$$\tau_Q = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}. \quad (4.5)$$

Касательные напряжения, вызванные действием крутящего момента (кручением):

$$\tau_{M_K} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{16FD}{\pi d^3 2}. \quad (4.6)$$

Распределение указанных напряжений показано на рисунке 4.3. Опасной точкой сечения является точка A , принадлежащая волокнам, расположенным со стороны оси пружины. В указанной точке возникают наибольшие касательные напряжения, величина которых рассчитывается по формуле

$$\tau_{\max} = \tau_Q + \tau_{M_K} = \frac{Q}{A} + \frac{M_K}{W_p} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{16FD}{\pi d^3 2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (4.7)$$

Для практических расчетов на прочность цилиндрических винтовых пружин вводят поправочный коэффициент k и условие прочности записывается в виде

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (4.8)$$

где величина поправочного коэффициента рассчитывается по формуле

$$k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1}.$$

Таким образом, можно констатировать, что увеличение среднего диаметра пружины приводит к увеличению касательных напряжений и снижению прочности. Увеличение диаметра проволоки приводит к уменьшению касательных напряжений и повышению прочности.

4.2 План выполнения лабораторной работы

1 Ознакомиться с устройством и принципом действия машины МИП-10-1 (рисунок 4.4).

2 С помощью штангенциркуля произвести измерения необходимых параметров испытываемой пружины.

3 Вычислить верхний предел допускаемой нагрузки.

4 Получить исходные данные к лабораторной работе – нагрузки на пружину. Рекомендуется принять нижнюю ступень нагружения $F = 20$ Н.

5 Произвести вычисления жесткости. Определить удлинения пружины для каждой ступени нагружения и заполнить таблицу журнала лабораторных работ.

6 Установить испытываемую пружину между головкой нагружения и грузоподъемной чашкой. Стрелка циферблатной головки при этом занимает начальное положение. Вывести указатель нагрузок на начальное положение (см. рисунок 4.4).

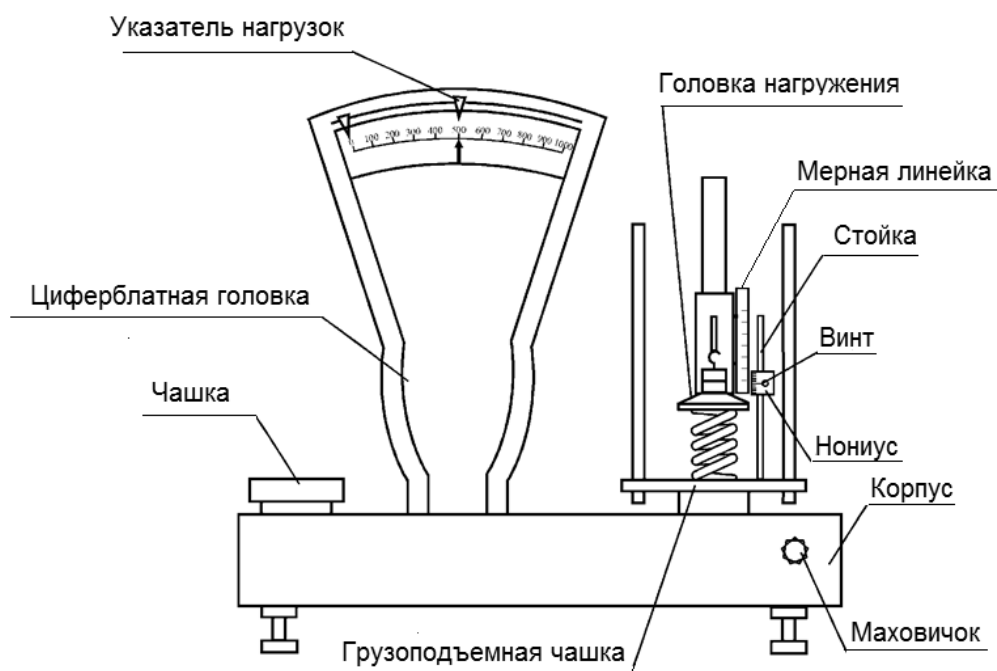


Рисунок 4.4 – Испытательная машина МИП-10-1

7 Переместить по стойке нониус до совмещения нулевого деления мерной линейки с нижней риской на нониусе. Зафиксировать нониус при помощи винта.

8 Установить на чашку груз, соответствующий первой ступени нагружения.

9 Вращением маховичка (медленное нагружение) установить стрелку силоизмерителя в начальное положение.

10 Снять показания деформации пружины с использованием мерной линейки и нониуса и записать его в таблицу 4.1 журнала (показание мерной линейки – n).

Таблица 4.1 – Данные опыта

Нагрузка F , Н		Показание мерной линейки, мм		Удлинение пружины, мм
F	ΔF	n	$\Delta n = \Delta \lambda_{on}$	λ_{on}
$F_1 = 20$				λ_{on1}
F_2				$\lambda_{on2} = \lambda_{on1} + \Delta \lambda_{on}^{cp}$
F_3				$\lambda_{on3} = \lambda_{on2} + \Delta \lambda_{on}^{cp}$
...				...
F_i				$\lambda_{oni} = \lambda_{on(i-1)} + \Delta \lambda_{on}^{cp}$
$\Delta F^{cp} =$		$\Delta \lambda_{on}^{cp} =$		

11 Установить на чашку груз, соответствующий второй ступени нагружения, и продолжить испытания в заданном диапазоне нагрузок.

12 По окончании испытаний обратным вращением маховичка разгрузить пружину.

13 Снять с чашки грузы и убрать рабочее место.

14 Рассчитать приращения показаний мерной линейки ($\Delta l = \Delta \lambda_{on}$), вычислить среднее значение $\Delta \lambda_{on}^{cp}$.

15 Определить опытные значения удлинений пружины.

Контрольные вопросы

1 Как устанавливается верхний предел нагружения пружины?

2 Как определяется удлинение пружины?

3 Какое соотношение существует между нагрузкой, удлинением и жесткостью пружины?

4 Как изменится удлинение пружины, если диаметр проволоки увеличится или уменьшится в n раз?

5 Как изменится удлинение пружины, если средний диаметр пружины увеличится или уменьшится в k раз?

6 Как изменится напряжение, если диаметр проволоки уменьшится или увеличится в k раз?

7 Как изменится напряжение, если средний диаметр пружины увеличится или уменьшится в k раз?

8 В каких единицах измеряется жесткость пружины?

9 Как изменится жесткость пружины, если диаметр пружины увеличить или уменьшить в k раз?

10 Как изменится жесткость пружины, если диаметр проволоки увеличить или уменьшить в k раз?

11 Как изменится жесткость пружины, если увеличится или уменьшится количество ее витков?

12 Как изменится напряжение, если число витков увеличится или уменьшится в n раз?

5 Лабораторная работа № 13. Опытная проверка теории продольного изгиба (определение критической силы при потере устойчивости)

Цель работы

Экспериментальное определение критической силы при продольном сжатии стержня большой гибкости.

5.1 Краткие теоретические сведения

Под *устойчивостью* стержня при действии сжимающей силы понимается его способность сохранять первоначальную прямолинейную форму равновесия. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия под действием осевой

сжимающей силы называется также *продольным изгибом* (рисунок 5.1).

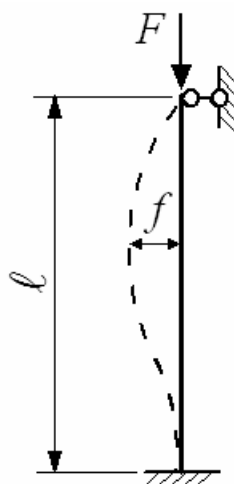


Рисунок 5.1 – Продольный изгиб стержня

Если сила невелика, то прямолинейная форма равновесия является *устойчивой*, т. к. после малого возмущения (например, приложения малой поперечной нагрузки) и последующего его устранения стержень возвращается в исходное прямолинейное состояние. При достаточно большой осевой нагрузке прямолинейная форма равновесия стержня становится *неустойчивой*: малое поперечное возмущение приводит к тому, что стержень остается в изогнутом состоянии и после устранения поперечной силы.

Величина сжимающей силы, при которой происходит потеря устойчивости стержня, называется *критической силой* $F_{кр}$. Таким образом, прямолинейное положение стержня при $F < F_{кр}$ является устойчивым, при $F = F_{кр}$ – безразличным, при $F > F_{кр}$ – неустойчивым. Увеличение нагрузки сверх критической приводит к быстрому росту деформаций и практически означает выход системы из строя.

Впервые задачу определения критической силы решил Леонард Эйлер для шарнирно закрепленного стержня, если возникающие в нем напряжения не превышают предела пропорциональности. Формула Эйлера с учетом разных условий закрепления сжатого стержня имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (5.1)$$

где E – модуль продольной упругости материала стержня;

I_{\min} – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения;

ℓ – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня.

Для стержня с шарнирным закреплением конечных сечений $\mu = 1$; с жестким защемлением конечных сечений $\mu = 0,5$; с жестким защемлением только одного конечного сечения $\mu = 2$; с жестким защемлением с одной стороны и шарнирным

закреплением с другой (см. рисунок 5.1) – $\mu = 0,7$.

Продольный изгиб стержня будет происходить в плоскости наименьшей жесткости (EI_{\min}), в которой действует наибольшая гибкость стержня λ .

Формула Эйлера (5.1) применима, если максимальная гибкость стержня λ больше предельной гибкости его материала λ_{np} :

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} \geq \lambda_{np} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ПЦ}}}}, \quad (5.2)$$

где i_{\min} – минимальный радиус инерции сечения стержня, $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$;

$\sigma_{\text{ПЦ}}$ – предел пропорциональности материала стержня;

A – площадь поперечного сечения стержня.

При меньших значениях гибкости ($\lambda < \lambda_{np}$) формула Эйлера не используется, т. к. потеря устойчивости происходит при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности $\sigma_{\text{ПЦ}}$. В этих случаях применяются эмпирические формулы, например, формула Ясинского:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\lambda) A, \quad (5.3)$$

где a, b – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала стержня.

Области применения формул иллюстрирует график, показанный на рисунке 5.2, где λ_0 – «нулевая» гибкость материала (для стали $\lambda_0 \approx 40$).

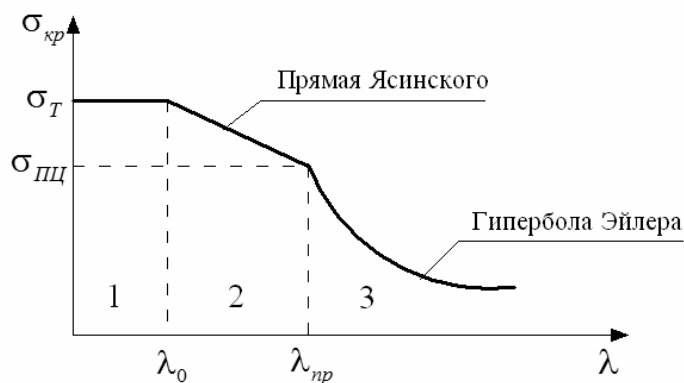


Рисунок 5.2 – Зависимость между критическим напряжением и гибкостью стержня

Участок 1 графика соответствует стержням *малой гибкости*:

$$\lambda \leq \lambda_0. \quad (5.4)$$

Стержни малой гибкости рассчитывают только на прочность без учета опасности продольного изгиба.

Участок 2 графика соответствует стержням *средней гибкости*:

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{np}. \quad (5.5)$$

Критические напряжения для стержней средней гибкости определяются по формуле Ф. С. Ясинского (5.3).

Участок 3 соответствует стержням *большой гибкости*:

$$\lambda \geq \lambda_{np}. \quad (5.6)$$

Расчет стержней большой гибкости ведется по формуле Эйлера (5.1).

Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластин и оболочек. В практике известны случаи, когда из-за потери устойчивости отдельных элементов (стержней) мосты, здания, сооружения разрушались, а машины, аппараты, приборы выходили из строя. Поэтому критическое состояние в реальных условиях эксплуатации считается недопустимым и избежать его позволяет введение необходимого запаса устойчивости. Таким образом, для гибких сжатых элементов расчет ведется и на прочность и на устойчивость.

Условие устойчивости для студентов машиностроительных специальностей имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\sigma p}} \leq \varphi[\sigma], \quad (5.7)$$

где σ – усредненное напряжение материала стержня;

$A_{\sigma p}$ – усредненная площадь (брутто) поперечного сечения стержня, без учета ослаблений;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала стержня на сжатие;

φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие или *коэффициент продольного изгиба*, который определяется по таблицам в зависимости от материала стержня и его гибкости.

Условие устойчивости для студентов строительных специальностей имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\sigma p}} \leq \varphi R \gamma_c, \quad (5.8)$$

где R – расчетное сопротивление материала на сжатие;

γ_c – коэффициент условия работы.

Можно условно считать, что правая часть в формулах (5.7) и (5.8) является допускаемым напряжением на устойчивость:

$$\sigma \leq [\sigma]_y. \quad (5.9)$$

Минимальное значение коэффициента запаса на устойчивость n_y равно отношению критической силы к допускаемой силе, полученной из условия устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]}. \quad (5.10)$$

5.2 Методика опытного определения критической силы

В лабораторной работе используется графический способ определения критической силы. С помощью индикатора часового типа измеряется стрела прогиба стержня f (максимальный прогиб) при возрастающей сжимающей силе F . Величина силы не должна превышать критического значения, рассчитанного теоретически.

График в координатах $F(f)$ представляет собой кривую линию, ордината асимптоты которой равна критической силе стержня.

График в координатах $F(F/f)$ представляет собой прямую линию, которая при пересечении с осью нагрузки (при нулевой абсциссе) указывает значение критической силы.

Опытное значение критической силы получается при усреднении результатов, полученных по двум графикам. Отклонение от теоретического значения получается в результате того, что реальная система всегда имеет некоторые недостатки: начальная кривизна стержня, внецентренное приложение нагрузки, неоднородность материала и др.

5.3 План выполнения лабораторной работы

1 Рассчитать геометрические характеристики для указанного преподавателем образца (стального или образца из оргстекла).

2 Определить теоретическое значение величины критической силы.

3 Ознакомиться с лабораторной установкой или стендом, схемой закрепления и способом нагружения образца.

В учебном лабораторном стенде НТЦ-13.01.15 нагружение *стального образца* большой гибкости производится с помощью винта. В нижнем опорном кронштейне стенда установлен весовой датчик для измерения величины сжимающей силы F . Для отображения показаний весового датчика служит измерительный прибор НТЦ-13.01.10 «Измеритель деформации тензометрический цифровой», цена деления которого $m = 1$ Н.

В лабораторной установке нагружение *образца из органического стекла* производится с помощью гирь разного веса (от 0,5 до 5 кг).

Для регистрации прогиба стержня в стенде и лабораторной установке используется индикатор часового типа с ценой деления $m = 0,01$ мм.

4 Заполнить протокол испытания.

5 Ознакомиться с принципом действия измерительных приборов.

6 Произвести нагружение образца (значения сил задаются преподавателем), снимая показания индикатора по соответствующей шкале (черной или красной).

7 Произвести обработку результатов опыта согласно форме отчета.

8 Построить графики зависимостей $F(f)$ и $F(F/f)$, определить по ним критическую силу.

9 Определить погрешность измерения.

10 Сделать общий вывод по работе.

11 Подписать отчет у преподавателя.

Контрольные вопросы

1 Что такое продольный изгиб?

2 В чем заключается явление потери устойчивости?

3 Какая сила называется критической?

4 По каким формулам находится величина критической силы? В каких случаях нужно применять ту или другую формулу?

5 От чего зависит гибкость стержня?

6 От чего зависит предельная гибкость материала?

7 Каким коэффициентом учитывается влияние способа закрепления концов стержня?

8 Зависит ли величина критической силы от упругих свойств материала стержня?

9 Восстановит ли стержень прямолинейную форму после снятия малого поперечного возмущения, если продольная сила не превышала критического значения? если превышала критическое значение?

10 Во сколько раз изменится величина критической силы стержня большой гибкости, если при испытании заменить опоры с жестким защемлением на шарнирные?

11 Чем отличается условие устойчивости от условия прочности продольно сжатого стержня?

12 Как обозначается коэффициент продольного изгиба?

13 Какая величина определяется индикатором часового типа?

14 Какая цель работы?

6 Лабораторная работа № 14. Определение опорного момента в статически неопределимой балке

Цель работы

Определить опытным путем опорный момент M_A в статически неопределимой балке и сравнить его с теоретическим значением.

6.1 Краткие теоретические сведения

В *плоской стержневой системе* центры тяжести всех поперечных сечений стержней расположены в одной плоскости. Простейшим примером такой

системы является балка, состоящая из одного стержня.

Если все нагрузки, приложенные к балке, лежат в одной плоскости, то для расчета реакций на опорах можно составить только три независимых уравнения статического равновесия. Если количество неизвестных реакций превышает количество уравнений статики, то такая система называется *статически неопределимой*. В этом случае для решения балки необходимо составить столько дополнительных деформационных уравнений, сколько раз балка статически неопределима.

Степень статической неопределимости S в простейших стержневых системах можно найти как разность между числом опорных реакций R и числом независимых уравнений статики C :

$$S = R - C. \quad (6.1)$$

Статически определимая балка имеет три опорные связи (три реакции). Примеры таких балок показаны на рисунке 6.1.

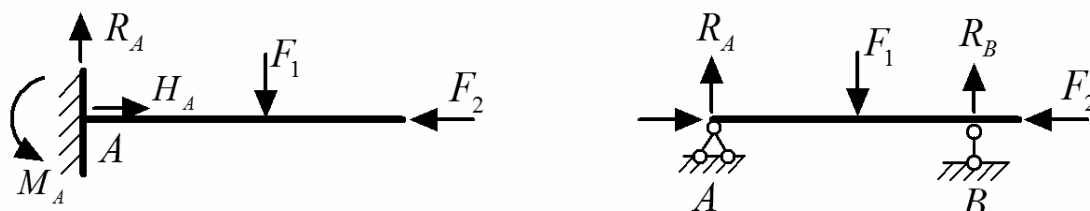


Рисунок 6.1 – Статически определимые балки

Наложение дополнительных связей переводит балку в разряд статически неопределимых. Степень статической неопределимости равна числу «лишних» связей.

В заданной балке число неизвестных реакций (связей) равно четырем: H_A , R_A , R_B , M_A (рисунок 6.2). Число необходимых связей для плоской системы равно трем. Получается, что балка имеет одну «лишнюю» связь, следовательно, она один раз статически неопределима: $S = R - C = 4 - 3 = 1$.

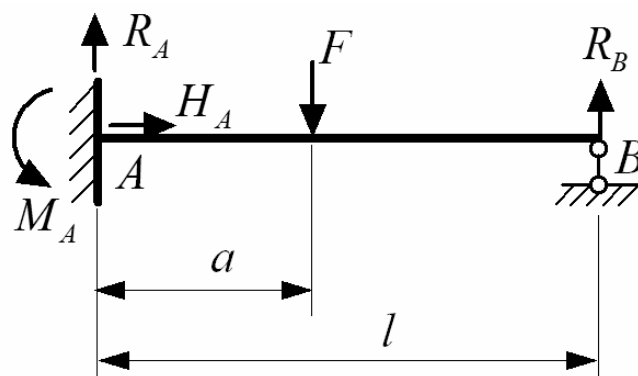


Рисунок 6.2 – Заданная балка

Уравнения статического равновесия для заданной балки имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad H_A = 0; \\ \sum Y = 0; \quad R_A - F + R_B = 0; \\ \sum M_B = 0; \quad M_A - R_A \cdot l + F \cdot (l - a) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для определения неизвестных реакций (R_A , R_B , M_A) следует дополнительно составить одно деформационное уравнение. Например, выразить прогиб опорного сечения B по методу начальных параметров.

6.2 Метод начальных параметров

Согласно методу начальных параметров начало координат следует располагать в крайнем левом сечении балки (рисунок 6.3).

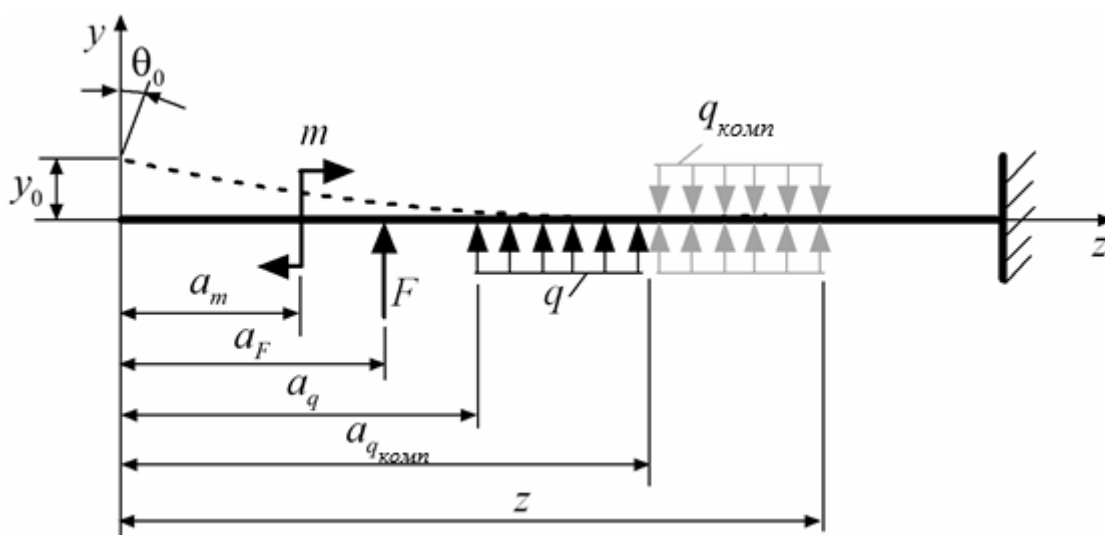


Рисунок 6.3 – Вспомогательная схема для метода начальных параметров

Уравнение прогибов в общем виде имеет вид:

$$\begin{aligned} EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \\ + \sum m_i \frac{(z - a_m)^2}{2!} + \sum F_j \frac{(z - a_F)^3}{3!} + \sum q_k \frac{(z - a_q)^4}{4!}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где y – прогиб искомого сечения, координата которого z ;
 EI_x – жесткость поперечного сечения при изгибе;
 y_0 – прогиб в начале координат (начальный параметр);

θ_0 – угол поворота в начале координат (начальный параметр);

m_i, F_j, q_k – нагрузка, включая реакции на опорах, расположенная левее рассматриваемого сечения;

a_m, a_F, a_q – координаты внешней нагрузки (для распределенной нагрузки указывается координата начала ее действия).

Если распределенная нагрузка не доходит до искомого сечения, то на «лишнем» участке вводится компенсирующая нагрузка той же интенсивности, но обратного знака.

Слагаемые в уравнении (6.3) считаются положительными, если их направление совпадает с направлением нагрузок, приведенных на рисунке 6.3.

Величина *начальных параметров* (прогиб и угол поворота в начале координат) в зависимости от условий закрепления балки будет соответственно равна (рисунок 6.4).

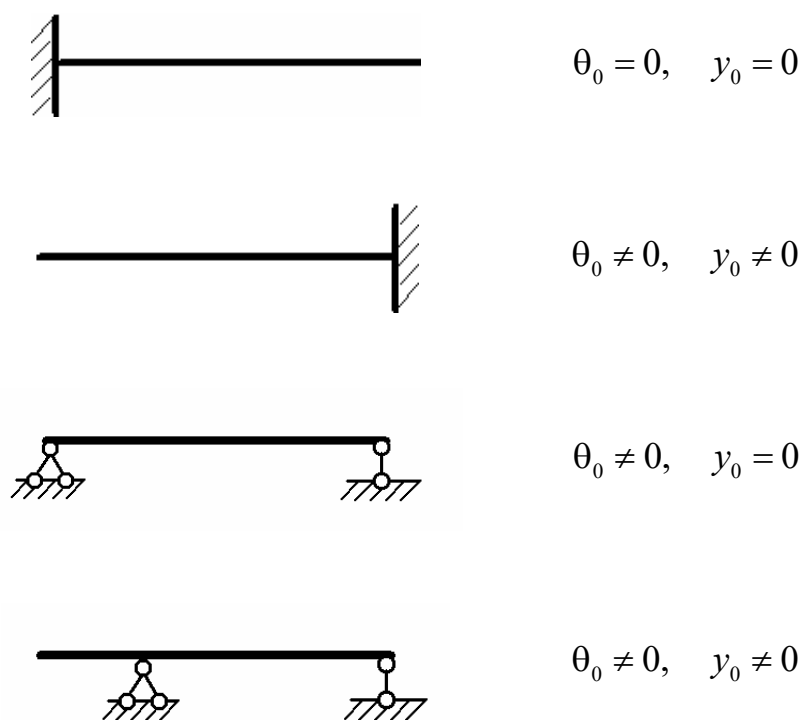


Рисунок 6.4 – Зависимость начальных параметров от условий закрепления балки

6.3 Расчет опорного момента для заданной балки

Начальные параметры для балки, используемой в лабораторной работе (см. рисунок 6.2), $\theta_0 = 0, \quad y_0 = 0$.

Тогда уравнение прогибов (6.3) относительно опоры B для заданной балки принимает вид:

$$EI_x y_B \Big|_{z=l} = -M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - F \frac{(l-a)^3}{6} = 0. \quad (6.4)$$

Решаем совместно уравнения (6.2) и (6.4):

$$\begin{aligned}M_A - R_A l + F(l - a) &= 0; \\-3M_A l^2 + R_A l^3 - F(l - a)^3 &= 0; \\R_A &= \frac{M_A + F(l - a)}{l}; \\-3M_A l^2 + \frac{M_A + F(l - a)}{l} l^3 - F(l - a)^3 &= 0; \\-2M_A l^2 + F(l - a)(l^2 - (l - a)^2) &= 0.\end{aligned}$$

Откуда теоретическое значение опорного момента

$$M_A = \frac{Fa(2l - a)(l - a)}{2l^2}. \quad (6.5)$$

6.4 План выполнения лабораторной работы

- 1 Получить у преподавателя данные по схеме нагружения статически неопределимой балки.
- 2 Определить теоретическое значение опорного момента по формуле (6.5).
- 3 Ознакомиться с лабораторной установкой.
- 4 Поместить кронштейн для нагрузки на расстояние a от левой опоры.
- 5 Выставить на левой опоре нулевое значение угла поворота θ_0 при разгруженной балке. Для этого совместить метку на противовесе с 7-м делением мерной линейки и установить на ноль шкалу индикатора часового типа.
- 6 Нагрузить балку силой 5 Н.
- 7 Перемещая противовес по мерной линейке, восстановить нулевое показание индикатора.
- 8 Зафиксировать в лабораторном журнале показание мерной линейки по метке на противовесе.
- 9 Произвести аналогичные измерения при нагрузке 10 и 15 Н.
- 10 Разгрузить балку, перевести противовес в крайнее правое положение.
- 11 Оформить отчет по лабораторной работе.
- 12 Подписать отчет у преподавателя.
- 13 Подготовиться к защите лабораторной работы.

Контрольные вопросы

- 1 Какова цель лабораторной работы?
- 2 Как определить степень статической неопределимости в системе?
- 3 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для n раз статически неопределимой балки?

4 Где находится начало координат для расчета по методу начальных параметров?

5 Напишите общий вид уравнения прогибов по методу начальных параметров.

6 Какие величины считаются начальными параметрами?

7 Как определить начальные параметры при различных случаях закрепления балки?

8 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при прямом поперечном изгибе?

9 Как выражается жесткость сечения при изгибе?

7 Лабораторная работа № 15. Опытная проверка теоремы о взаимности работ и перемещений

Цель работы

Проверить экспериментально справедливость теорем о взаимности работ и перемещений.

7.1 Краткие теоретические сведения

Статическая внешняя нагрузка постепенно возрастает от нуля до некоторого значения. Действие внешней силы вызывает деформации системы и перемещения отдельных ее точек. Если материал системы удовлетворяет закону Гука, то зависимость между нагрузкой и деформацией можно представить в виде

$$\Delta = \alpha F ,$$

где Δ – перемещение по направлению действия силы F ;

α – коэффициент пропорциональности, учитывающий особенности рассматриваемой системы.

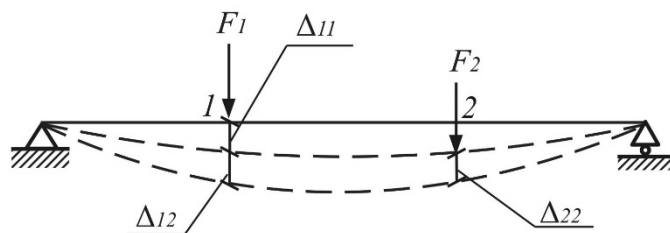
Работа, которую совершает статически приложенная сила F , определяется формулой

$$A = \frac{F\Delta}{2} . \quad (7.1)$$

Теорема о взаимности работ относится к числу общих теорем сопротивления материалов. Теорема о взаимности работ (теорема Бетти) основана на принципе независимости действия сил. Следовательно, теорема применима ко всем системам, к которым можно применить принцип независимости действия сил.

Рассмотрим линейно-деформируемую систему (балку) в двух состояниях (рисунок 7.1).

Первое состояние системы



Второе состояние системы

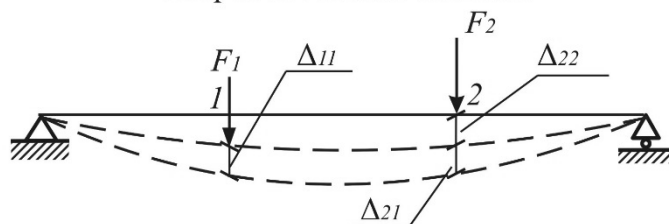


Рисунок 7.1 – Линейно-деформируемая система

В первом состоянии системы сначала к точке 1 приложим силу F_1 , а затем к деформированной балке приложим силу F_2 в точке 2. Во втором состоянии система будет вначале нагружена силой F_2 в точке 2. Далее, в точке 1 деформированной системы будет приложена сила F_1 . В обоих состояниях системы происходят линейные перемещения точек 1 и 2 под действием нагрузок (см. рисунок 7.1).

Линейные перемещения принято обозначать буквой Δ с двойным индексом: Δ_{ij} (где первый индекс i обозначает направление перемещения, второй индекс j указывает причину перемещения).

В соответствии с приведенным правилом обозначены перемещения на рисунке 7.1.

Определим работу, производимую внешними нагрузками на собственных перемещениях.

В первом состоянии сила F_1 совершает работу на перемещении Δ_{11} , которую можно определить, используя выражение (7.1):

$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}.$$

Аналогичное выражение можно записать для определения работы силы F_2 на перемещении Δ_{22} :

$$A_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}.$$

Можно предположить, что сила F_1 будет совершать работу на перемещении Δ_{12} , вызванном силой F_2 :

$$A_{12} = F_1 \Delta_{12}.$$

При вычислении работы A_{12} отсутствует множитель $1/2$, т. к. сила F_1 является постоянной величиной.

Таким образом, полная работа системы в первом состоянии, совершенная под действием усилий F_1 и F_2 :

$$A_1 = A_{11} + A_{22} + A_{12}.$$

Если рассмотреть второе состояние системы, то полная работа системы во втором состоянии:

$$A_1 = A_{22} + A_{21} + A_{11}.$$

Так как совершенная работа не зависит от порядка приложения нагрузок, то:

$$A_1 = A_2.$$

Следовательно:

$$A_{12} = A_{21} \text{ или } F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}. \quad (7.2)$$

Равенство (7.2) является математическим выражением теоремы о взаимности работ.

Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Выражение (7.2) для случая нагружения балки сосредоточенными моментами будет выглядеть следующим образом:

$$m_1 \Theta_{12} = m_2 \Theta_{21}. \quad (7.3)$$

При равенстве сил F_1 и F_2 на основании теоремы о взаимности работ (см. формулу (7.2)), получаем теорему о взаимности перемещений:

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (7.4)$$

Формулируется теорема о взаимности перемещений следующим образом.

Перемещение точки 1 под действием единичной силы, приложенной в точке 2, равно перемещению точки 2 под действием той же силы, приложенной в точке 1.

Если обе нагрузки являются равными моментами, то теорема о взаимности перемещений принимает вид:

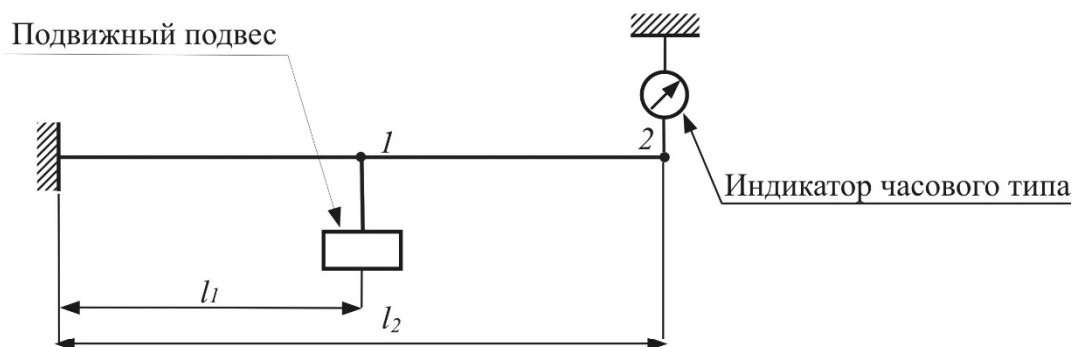
$$\Theta_{12} = \Theta_{21}.$$

Угол поворота сечения 1 под действием момента, приложенного в сечении 2 , равен, углу поворота сечения 2 от действия того же момента, но приложенного в сечении 1 .

Лабораторные испытания позволяют экспериментально подтвердить приведенные теоретические зависимости, сравнить опытные и теоретические величины прогибов и работ.

Испытания проводятся на лабораторной установке с использованием индикатора часового типа. Схема установки изображена на рисунке 7.2.

а)



б)

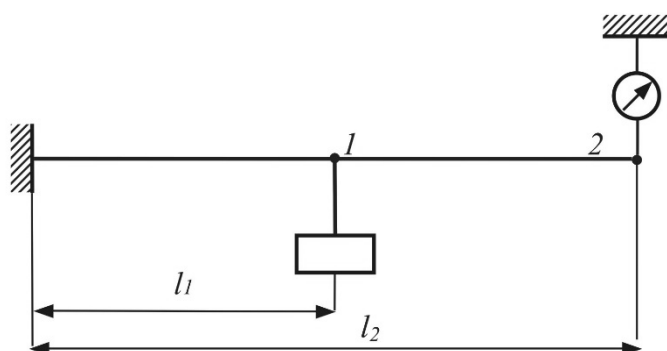


Рисунок 7.2 – Схема нагружения балки

7.2 План выполнения лабораторной работы

1 Ознакомиться с методическими указаниями.

2 Ознакомиться с устройством, схемами нагружения балки и установки измерительных приборов.

3 Получить исходные данные к выполнению лабораторной работы: расстояния l_1 и l_2 , а также величины нагрузок F_1 и F_2 .

4 Выполнить необходимые предварительные расчеты в соответствии с планом выполнения работы.

5 Установить подвижный гиревой подвес в точке 1 испытуемой консольной балки. Индикатор часового типа поместить в сечение 2 (см. рисунок 7.2, а).

6 В заданном интервале усилий F_1 произвести нагружение балки;

7 Для каждой ступени нагружения записать показания индикатора в таблицу журнала лабораторных работ.

8 Разгрузить балку.

- 9 Переместить подвижной гиревой подвес в сечение 2, а индикатор перемещений – в точку I (см. рисунок 7.2, б).
- 10 В заданном интервале усилий F_2 произвести нагружение балки.
- 11 Для каждой ступени нагружения записать показания в таблицу журнала лабораторных работ.
- 12 Разгрузить балку.
- 13 В соответствии с формой отчета обработать результаты опыта и сформулировать выводы.
- 14 Представить преподавателю выполненный отчет по лабораторной работе.

Контрольные вопросы

- 1 Как формулируется теорема о взаимности работ?
- 2 Как формулируется теорема о взаимности перемещений?
- 3 К каким системам применимы эти теоремы?
- 4 Какие перемещения могут возникать в системе под действием внешних нагрузок?
- 5 Какие перемещения возникают в заданной балке под действием сил F_1 и F_2 ?
- 6 При помощи какого прибора измеряются деформации?
- 7 Что представляет собой перемещение Δ_{11} ?
- 8 Что обозначает первый индекс перемещения Δ_{21} ?
- 9 Что обозначает второй индекс перемещения Δ_{22} ?

Список литературы

- 1 Сопротивление материалов: лабораторный практикум / Под ред. Ю. П. Подлеснова. – Брянск: БГТУ, 2010. – 119 с.
- 2 Методика и техника инженерного эксперимента: учебное пособие / Г. Л. Антипенко [и др.]; под общ. ред. В. П. Березиенко, В. Г. Лупачева. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2008. – 278 с.
- 3 Цурпал, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Цурпал, Н. П. Барабан, В. М. Швайко. – Киев: Вища школа, 1988. – 245 с.
- 4 Афанасьев, А. М. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / А. М. Афанасьев, В. А. Марьин. – Москва: Физматгиз, 1975. – 287 с.