МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» очной формы обучения

Часть 2

Могилев 2023

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «29» мая 2023 г., протокол № 12

Составители: канд. техн. наук, доц. Ю. В. Машин;
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов

Рецензент канд. техн. наук А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Теоретическая механика» для студентов направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» очной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, строительная механика и металлические конструкции и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» изучают теоретическую механику на протяжении 2-го и 3-го семестров.

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;

– выполнение и защита индивидуальных заданий;

– выполнение контрольных работ.

На практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;

– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. В установленные преподавателем сроки индивидуальные задания защищают во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не защитившие индивидуальные задания, не допускаются к зачету (экзамену) по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Динамика

2.1 Первая задача динамики точки

Закон инерции (первый закон Ньютона): если действующая на материальную точку система сил уравновешена, то точка находится в покое либо в состоянии прямолинейного и равномерного движения.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной системой отсчета. Инерциальную систему отсчета можно считать неподвижной.

Система отсчета, не обладающая вышеуказанными свойствами, называется неинерциальной системой отсчета. В последней точка, на которую не действуют силы, движется с ускорением, и ее скорость может меняться как по величине, так и по направлению.

Основной закон динамики (второй закон Ньютона): сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы.

Запись этого закона в векторной форме имеет вид:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}, \tag{2.1}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точку;
$\vec{a}$ – её ускорение;
m – масса точки.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона): две материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны вдоль одной прямой.

Закон независимости действия сил (закон суперпозиции сил): при действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка при действии на нее каждой силы в отдельности.

То есть если

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

то

$$m \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1; \; m \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – силы, действующие на материальную точку массой m;
$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – ускорения точки, вызванные силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \tag{2.2}$$

Первая задача: зная массу точки и закон ее движения, определить действующие на данную точку силы.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$, а необходимо определить F_X, F_Y, F_Z.

Первая задача динамики точки решается методом дифференцирования ее уравнений движения.

Задача 1. Материальная точка массой $m = 1{,}4$ кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке (рисунок 2.1).

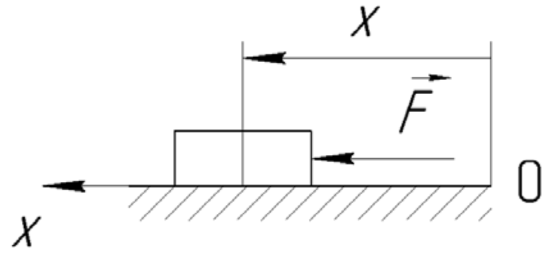


Рисунок 2.1

Решение

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Спроецируем это уравнение на ось X:

$$ma_X = \sum F_{kx}.$$

Определим значение проекции ускорения на ось X, для чего 2 раза продифференцируем по времени закон движения. Получим

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 12t + 6 \text{ м/с}; \qquad a_X = \frac{dVx}{dt} = 12 \text{ м/с}^2;$$

$$F = 1{,}4 \cdot 12 = 16{,}8 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 16{,}8$ Н.

Решить задачи 13.1.16, 13.1.24, 13.2.11, 13.2.18 из [5].

2.2 Вторая задача динамики точки

Зная массу точки и действующие на нее силы, определить закон движения данной точки.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, F_X, F_Y, F_Z, а необходимо определить $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$.

Вторая задача динамики точки решается интегрированием уравнений, определяющих закон изменения силы. При этом следует иметь в виду, что сила, действующая на материальную точку, может быть постоянной или зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости и др.

Задача 2. На материальную точку массой $m = 200$ кг, которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила $F = 10t^2$ (рисунок 2.2). Определить время t, при котором начнется движение точки.

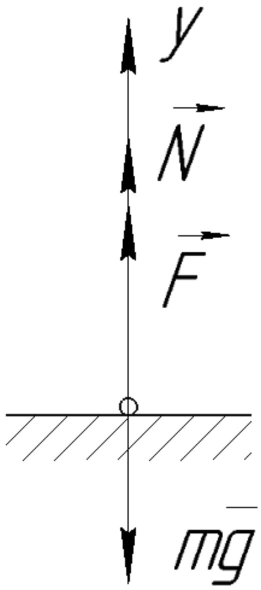


Рисунок 2.2

Решение

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$. Для условия данной задачи имеем $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$.

Спроецируем это уравнение на ось Y:

$$ma_Y = F - mg + N.$$

С учетом того, что в момент отрыва $N = 0$ и $a_Y = 0$, получим

$$0 = F - mg \;\Rightarrow\; F = mg.$$

С учетом исходных данных имеем

$$10t^2 = 200 \cdot 9{,}81 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{200 \cdot 9{,}81}{10}} = 14 \text{ с}.$$

Ответ: $F = 14$ с.

Задача 3. Материальная точка M массой m = 8 кг движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом R = 18 м (рисунок 2.3). Определить угол α в градусах между силой $\vec{F}$ и скоростью $\vec{V}$ в момент времени, когда скорость точки V = 3 м/с, а касательное ускорение $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2.

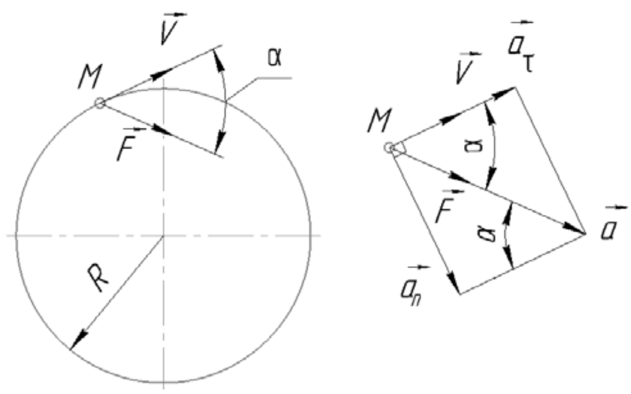


Рисунок 2.3

Решение

Так как сила $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, то вектор силы совпадает по направлению с вектором полного ускорения, а скорость при движении по окружности направляется по касательной и совпадает с касательным ускорением. Угол α – это угол между касательным и полным ускорением. Найдем значение нормального ускорения:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{3^2}{18} = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Исходя из построений, изображенных на рисунке 2.3, найдем значение угла α:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \mathrm{arctg}\,(1) = 45°.$$

Ответ: $\alpha = 45°$.

Задача 4. Материальная точка массой m = 18 кг движется в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 25$ Н (рисунок 2.4). Определить радиус кривизны траектории в момент времени, когда скорость точки V = 4 м/с, а векторы скорости и силы образуют между собой угол $\alpha = 55°$.

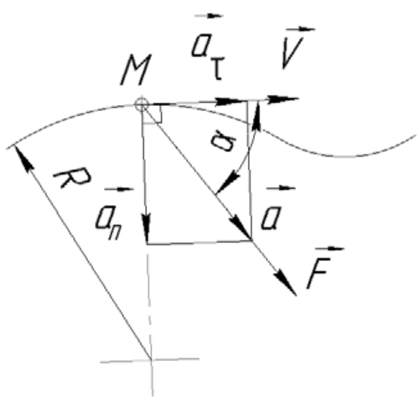


Рисунок 2.4

Решение

Так как сила $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, то вектор силы совпадает по направлению с вектором полного ускорения, а скорость при движении по криволинейной траектории направляется по касательной к траектории и совпадает с касательным ускорением. Угол α – это угол между вектором касательного и полного ускорений.

Находим полное ускорение точки:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{25}{18} = 1,389 \text{ м/с}^2.$$

В свою очередь,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad a_n = \sin\alpha \cdot a.$$

С учетом этого получим

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{\sin\alpha \cdot a} = \frac{4^2}{\sin 55° \cdot 1,389} = 14,06 \text{ м.}$$

Ответ: $\rho = 14,06$ м.

Решить задачи 13.2.25, 13.3.3, 13.3.12, 13.3.19 из [5].

2.3 Динамика относительного движения точки

До сих пор изучалось движение материальной точки по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета, т. е. системе отсчета, где справедливы законы Ньютона. Во многих случаях задачи динамики сводятся к исследованию движения в той или иной неинерциальной (подвижной) системе отсчета. Рассмотрим движение точки по отношению к подвижной системе отсчета. В этом случае основное уравнение динамики относительного движения материальной точки будет иметь вид:

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \tag{2.3}$$

где $\vec{a}_r$ – ускорение точки относительно подвижной системы отсчета.

Относительное движение материальной точки происходит под действием приложенных к точке сил при условии, что к ним присоединены переносная $\vec{\Phi}_e$ и кориолисова $\vec{\Phi}_c$ силы инерции.

При этом переносная и кориолисова силы инерции – это векторы, численно равные произведению массы точки на ее переносное $\vec{a}_e$ и кориолисово $\vec{a}_c$ ускорения. Направление сил инерции противоположно направлению одноименных им ускорений.

Условие относительного покоя можно получить из основного уравнения динамики относительного движения материальной точки путем подстановки в уравнение (2.3) нулевых значений $\vec{a}_r$ и $\vec{\Phi}_c$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{2.4}$$

Задача 5. Шарик *M* массой m = 0,2 кг движется со скоростью V = 19,62 м/с относительно вертикальной трубки *2*, которая на расстоянии l = 0,5 м прикреплена к вертикальному валу *1*. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с (рисунок 2.5). Определить переносную силу инерции шарика.

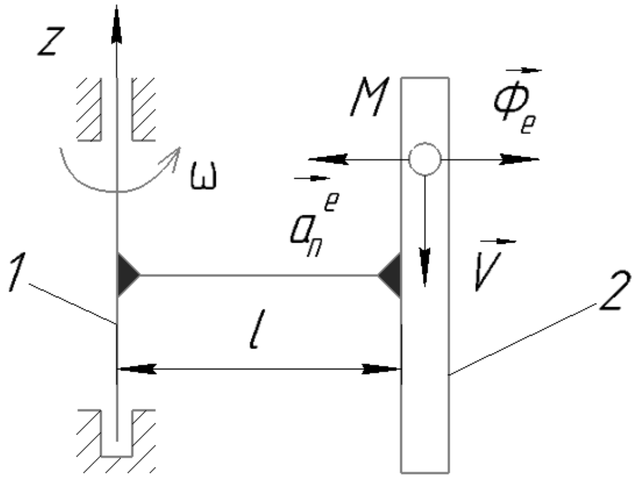


Рисунок 2.5

Решение

Переносная сила инерции может быть рассчитана согласно формуле $\Phi_e = m \cdot a_e$. Определим переносное ускорение точки.

Так как переносным движением является вращение трубки вокруг оси *Z*, то переносным движением точки является движение по окружности радиусом l. При этом ускорение точки можно разложить на две составляющие ускорения (a_e^n и a_e^τ), т. е.

$$a_e = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2}\ .$$

В свою очередь,

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot l = 5^2 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot l = 0 \cdot 0{,}5 = 0 \text{ м/с}^2, \quad \text{т. к. } \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$a_e = \sqrt{12{,}5^2 + 0^2} = 12{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $\Phi_e = m \cdot a_e = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5$ Н.

Ответ: $\Phi_e = 2{,}5$ Н.

Задача 6. Штатив с математическим маятником движется по наклонной плоскости вниз (рисунок 2.6) с ускорением $a = g \cdot \sin\alpha$. Определить угол β в положении относительного покоя шарика, если угол $\alpha = 10°$.

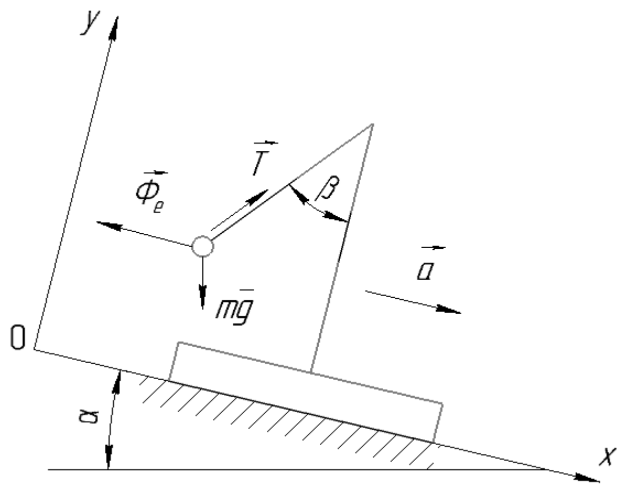


Рисунок 2.6

Решение

Запишем основное уравнение динамики относительного покоя:

$$m\vec{a}_r = \vec{T} + \vec{\Phi}_e + m\vec{g}\ .$$

Спроецируем данное уравнение на оси *X* и *Y,* при этом учтем, что $a_r = 0$:

$$OX\text{: } 0 = -\Phi_e + mg \cdot \sin\alpha + T \cdot \sin\beta\,;$$
$$OY\text{: } 0 = T \cdot \cos\beta - mg \cdot \cos\alpha\ .$$

Из второго уравнения выразим *T* и подставим в первое уравнение:

$$T = \frac{mg \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}\ .$$

$$\Phi_e - mg \cdot \sin\alpha = T \cdot \sin\beta \ \text{ или } \ \Phi_e - mg \cdot \sin\alpha = \frac{mg \cdot \cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \sin\beta\ .$$

С учетом того, что

$$\Phi_e = m \cdot a_e = mg \cdot \sin\alpha\,,$$

получим

$$mg \cdot \sin\alpha - mg \cdot \sin\alpha = mg \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta .$$

Так как $\cos\alpha \neq 0$, то $\mathrm{tg}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

Ответ: $\beta = 0$.

2.4 Свободные колебания точки

Общим признаком всех колебательных движений является их многократная повторяемость через определенные промежутки времени. Колебательное движение материальной точки происходит при условии наличия восстанавливающей силы.

Восстанавливающая сила – сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия.

Проекция восстанавливающей силы на ось *OX* может быть найдена из выражения

$$F_x = -\, c \cdot x, \tag{2.5}$$

где c – коэффициент пропорциональности.

Кроме восстанавливающей силы, при колебаниях на точку может действовать также возмущающая сила, т. е. такая сила, которая зависит от времени. Обычно в качестве возмущающей силы рассматривают силу, проекция которой на ось *OX* определяется следующим выражением:

$$Q_x = H \cdot \sin(p \cdot t + \delta) \;, \tag{2.6}$$

где H, p, δ – некоторые постоянные величины.

При колебаниях возникает сила сопротивления. Обычно эту силу рассматривают как функцию скорости движения точки и называют силой вязкого трения. При этом ее проекция на ось *OX* определяется из выражения

$$R_x = -b \cdot \dot{x} \,, \tag{2.7}$$

где b – коэффициент пропорциональности.

В зависимости от наличия восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления колебания материальной точки классифицируются следующим образом.

1 Свободные колебания, при которых присутствует только восстанавливающая сила. Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0 \,, \tag{2.8}$$

где k – циклическая (круговая) частота колебаний (число колебаний за 2π с).

При колебании груза на пружине циклическая частота может быть определена как

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,, \tag{2.9}$$

где c – жесткость пружины;

m – масса груза.

В случае свободных колебаний их период определится согласно выражению

$$T = \frac{2\pi}{k}\,. \tag{2.10}$$

2 Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебания) – это колебания при наличии восстанавливающей силы и силы сопротивления.

3 Вынужденные колебания возникают, когда в колебательном процессе участвуют восстанавливающая и возмущающая силы.

Задача 7. Определить период свободных вертикальных колебаний груза массой m = 80 кг, который прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c = 2 кН/м (рисунок 2.7).

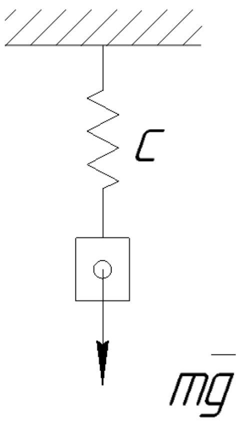


Рисунок 2.7

Решение

Период колебаний определим по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k}\,,$$

где k – угловая частота свободных вертикальных колебаний,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{80}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} = 1{,}256 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}256$ с.

Задача 8. Определить угловую частоту свободных вертикальных колебаний груза массой $m = 2$ кг, если коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = c_3 = 300$ Н/м (рисунок 2.8).

Решение

Угловая частота свободных вертикальных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}},$$

где $c_{экв}$ – эквивалентная жесткость системы пружин.

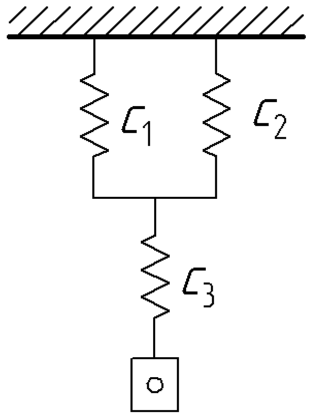


Рисунок 2.8

Так как система состоит из пружин, соединенных и последовательно, и параллельно, то определим вначале эквивалентную жесткость параллельно соединенных пружин c_{12}:

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 300 + 300 = 600 \text{ Н/м.}$$

Далее определим последовательное соединение пружин:

$$\frac{1}{c_{экв}} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_3} = \frac{c_3 + c_{12}}{c_{12} \cdot c_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{экв} = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_3 + c_{12}} = \frac{600 \cdot 300}{300 + 600} = \frac{180000}{900} = 200 \text{ Н/м.}$$

Тогда

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $k = 10$ с$^{-1}$.

Решить задачи 13.4.6, 13.4.14, 13.4.18, 13.4.25 из [5].

2.5 Динамика материальной точки

1 Запишите уравнение динамики относительного движения материальной точки.
2 Запишите формулу для определения модуля кориолисовой силы инерции.
3 Запишите уравнение относительного покоя материальной точки.
4 Сформулируйте основные понятия динамики.
5 Запишите основное уравнение динамики для свободной и несвободной материальных точек.
6 Что можно определить, зная массу точки и силы, на нее действующие?
7 Назовите основные виды сил, действующих на материальную точку. Приведите примеры переменных сил.

Решить задачи 13.4.4, 13.4.17, 13.4.25, 13.7.3, 13.7.8 из [5].

2.6 Теорема о движении центра масс

Механическая система – любая совокупность взаимосвязанных между собой материальных точек. Действующие на механическую систему силы подразделяются на внешние $\vec{F}^E$ и внутренние $\vec{F}^J$, активные $\vec{F}$ и реакции связей $\vec{R}$.

Внешние силы – силы, действующие на точки (тела) механической системы со стороны точек (тел), не входящих в данную механическую систему. Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками (телами) самой механической системы.

В силу третьего закона Ньютона главный вектор и главный момент внутренних сил относительно произвольной точки *O* равны нулю, т. е.

$$\vec{R}_{Г}^{J} = 0; \;\; \vec{M}_{ГО}^{J} = 0. \qquad (2.11)$$

Несмотря на это, движение системы происходит под действием внешних и внутренних сил.

Центром масс или центром инерции механической системы называется геометрическая точка, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}; \qquad (2.12)$$

$$x_c = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M}; \; y_c = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M}; \; z_c = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M}, \qquad (2.13)$$

где m_i – масса *i*-й материальной точки системы;

$\vec{r}_i$ – радиус-вектор этой точки;

x_i, y_i, z_i – координаты точки;

M – масса всей системы, $M = \sum m_i$.

Теорема о движении центра масс звучит следующим образом: центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему:

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_{Г}^{E}. \qquad (2.14)$$

Из теоремы о движении центра масс механической системы следует, что движение всей механической системы можно рассматривать как движение одной точки – центра масс.

Используя вышеописанные уравнения, можно определять движение центра масс системы, не определяя движения отдельных ее точек.

Задача 9. Тело *1* массой $m_1 = 4$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей (рисунок 2.9). На какое расстояние переместится тело *1*, когда однородный стержень *2* массой $m_2 = 2$ кг и длиной $l = 0{,}6$ м, опускаясь под действием силы тяжести, займет вертикальное положение? В начальный момент система находилась в покое.

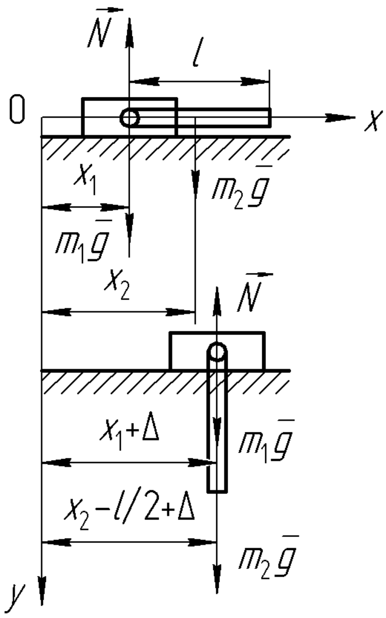


Рисунок 2.9

Решение

Выберем начало системы отсчета. Расстояние от оси *Y* до центра масс *1* тела обозначим X_1, а до тела *2* – X_2. Предположим, что при перемещении тела *2* в вертикальное положение вся система сместится вправо на расстояние Δ согласно теореме о сохранении положения центра масс. Координата центра масс первого тела будет равна $X_1 + \Delta$, а второго – $X_2 - l/2 + \Delta$.

Запишем уравнения для определения центра масс всей системы для первого и второго положений:

$$X_{C1} = \frac{m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2}{m_1 + m_2}; \; X_{C2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta)}{m_1 + m_2}.$$

Так как $\sum F_{ix}^E = 0$, следовательно, $X_{C1} = X_{C2}$.

Тогда

$$\frac{m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta)}{m_1 + m_2}.$$

Решим полученное уравнение:

$$m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta);$$

$$m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = m_1 \cdot X_1 + m_1 \cdot \Delta + m_2 \cdot X_2 - m_2 \cdot l/2 + m_2 \cdot \Delta;$$

$$0 = m_1 \cdot \Delta - m_2 \cdot l/2 + m_2 \cdot \Delta \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{m_2 \cdot l/2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}6/2}{4+2} = 0{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta = 0{,}1$ м.

Задача 10. Тело *1* массой $m_1 = 0{,}7$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей (рисунок 2.10). Определить ускорение тела *1* в момент времени $t = 0{,}25$ с, если относительно него под действием внутренних сил системы движется тело *2* массой $m_2 = 0{,}1$ кг согласно уравнению $S = \sin 4t$.

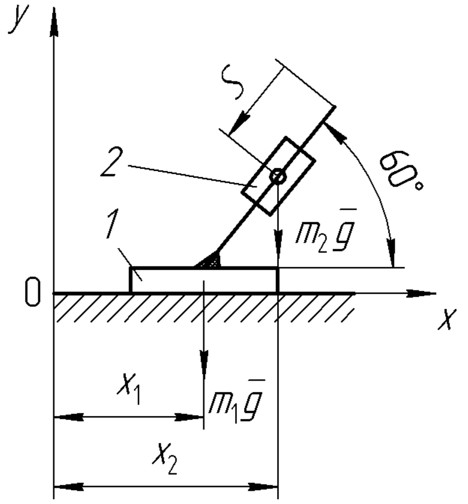


Рисунок 2.10

Решение

Выберем начало системы отсчета. Расстояние от оси *Y* до центра масс тела *1* обозначим X_1, а до тела *2* – X_2. При перемещении тела *2* в нижнее положение вся система должна сместиться вправо на расстояние Δ согласно теореме о сохранении центра масс. Координата центра масс первого тела будет равна $X_1+\Delta$, а второго – $X_2 - S\cdot\cos 60° + \Delta$.

Запишем уравнения для определения центра масс всей системы в первом и втором положениях:

$$X_{C1}=\frac{m_1\cdot X_1+m_2\cdot X_2}{m_1+m_2};\quad X_{C2}=\frac{m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2-S\cdot\cos 60°+\Delta)}{m_1+m_2}.$$

Так как $\sum F_{ix}^E=0$, следовательно, $X_{C1}=X_{C2}$.

Тогда

$$\frac{m_1\cdot X_1+m_2\cdot X_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2-S\cdot\cos 60°+\Delta)}{m_1+m_2}.$$

Решим полученное уравнение:

$$m_1\cdot X_1+m_2\cdot X_2=m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2-S\cdot\cos 60°+\Delta);$$

$$m_1\cdot X_1+m_2\cdot X_2=m_1\cdot X_1+m_1\cdot\Delta+m_2\cdot X_2-m_2\cdot S\cdot\cos 60°+m_2\cdot\Delta;$$

$$0=m_1\cdot\Delta-m_2\cdot S\cdot\cos 60°+m_2\cdot\Delta;$$

$$\Delta=\frac{m_2\cdot S\cdot\cos 60°}{m_1+m_2}=\frac{0{,}1\cdot\sin 4t\cdot\cos 60°}{0{,}7+0{,}1}=0{,}0625\cdot\sin 4t\ \text{м}.$$

Для определения ускорения тела *1* необходимо дважды продифференцировать по времени полученную зависимость:

$$V=\frac{d\Delta}{dt}=0{,}0625\cdot\cos 4t\cdot 4;$$

$$a=\frac{dV}{dt}=-0{,}0625\cdot 4\cdot\sin 4t\cdot 4=-\sin 4\cdot 0{,}25=-0{,}841\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a = -0{,}841$ м/с^2.

Решить задачи 14.1.13, 14.1.15, 14.1.16, 14.1.20, 14.1.21 из [5].

2.7 Теорема об изменении количества движения

Количество движения материальной точки – это вектор, имеющий направление вектора скорости и равный произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v} . \tag{2.15}$$

Производная по времени от количества движения материальной точки равна равнодействующей сил, действующих на точку:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \sum \vec{F} . \tag{2.16}$$

Данное утверждение – это теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме. Выражение теоремы об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме имеет вид:

$$\vec{q} - \vec{q}_0 = \vec{S} . \tag{2.17}$$

Изменение количества движения материальной точки $\vec{q} - \vec{q}_0$ за некоторый промежуток времени t – t_0 равно импульсу $\vec{S}$ равнодействующей сил, действующих на точку за тот же промежуток времени:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt . \tag{2.18}$$

Если сила $\vec{F} = \text{const}$, то импульс силы

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot (t - t_0) . \tag{2.19}$$

Количество движения механической системы – вектор, равный сумме векторов количеств движения всех точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i . \tag{2.20}$$

Равенство (2.20) можно представить в виде

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C . \tag{2.21}$$

Таким образом, количество движения механической системы есть вектор, равный произведению массы системы на скорость центра масс данной механической системы.

Производная от вектора количества движения механической системы по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{Г}^{E} . \tag{2.22}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: изменение количества движения механической системы равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на систему:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_o = \vec{S}_{Г}^{E} , \tag{2.23}$$

где $\vec{S}_{Г}^{E}$ – импульс главного вектора внешних сил равен векторной сумме импульсов составляющих сил,

$$\vec{S}_{Г}^{E} = \sum \vec{S}_{i}^{E} . \tag{2.24}$$

Задача 11. Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Относительно трубки движется шарик *M* массой m = 0,2 кг со скоростью $V_r = 4$ м/с (рисунок 2.11). Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние *OM* = 0,4 м.

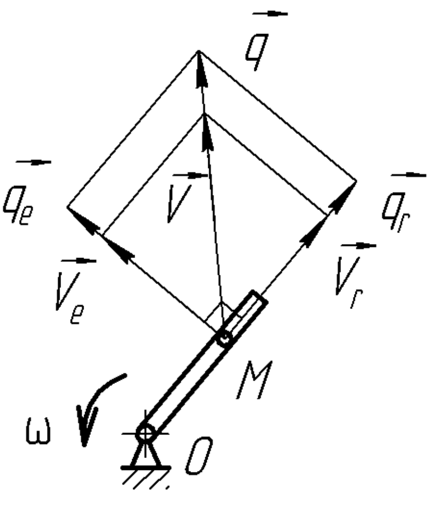


Рисунок 2.11

Решение

Количество движения определяется по формуле

$$q = m \cdot V ,$$

где V – абсолютная скорость точки, $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$.

Скорость шарика в переносном движении найдем с учетом того, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e$:

$$V_e = \omega \cdot OM = 10 \cdot 0{,}4 = 4 \text{ м/с}.$$

$$V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}657 \text{ м/с}.$$

Тогда

$$q = m \cdot V = 0{,}2 \cdot 5{,}657 = 1{,}13 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: $q = 1{,}13$ кг$\cdot$м/с.

Задача 12. Материальная точка M массой $m = 1$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $V = 4$ м/с. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на эту точку за время ее движения из первого положения во второе (рисунок 2.12).

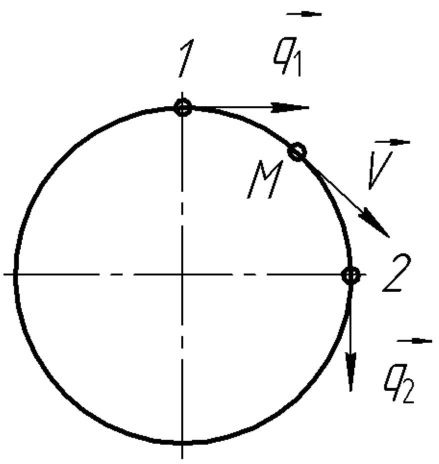


Рисунок 2.12

Решение

Так как скорость точки в первом и втором положениях постоянная, то модули количества движения в первом и втором положениях будут равны и определяются как

$$q_1 = q_2 = m \cdot V = 1 \cdot 4 = 4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Тогда

$$S = \sqrt{q_2^2 + q_1^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}66 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: $Q = 5{,}66$ кг·м/с.

Задача 13. По горизонтальному участку пути движутся два вагона, массы которых $m_1 = 6 \cdot 10^4$ кг, $m_2 = 2 \cdot 10^4$ кг и скорости $V_1 = 1$ м/с, $V_2 = 3$ м/с. Второй вагон догоняет первый и сцепляется с ним. Пренебрегая сопротивлением движению, определить скорость вагонов после сцепления.

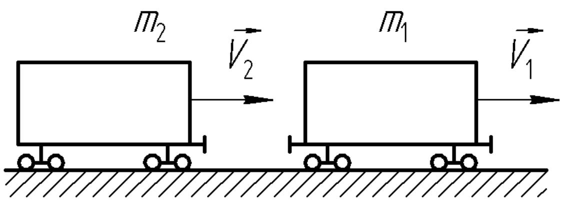


Рисунок 2.13

Решение

Согласно теореме об изменении количества движения импульс внешних сил

$$S^E = Q_2 - Q_1,$$

где $Q_1 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$;
$Q_2 = (m_2 + m_1) \cdot V$.

Так как к системе никаких внешних сил не было приложено, то $S^E = 0$, $Q_2 = Q_1$. Следовательно,

$$(m_2 + m_1) \cdot V - (m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2) = 0 .$$

$$V = \frac{(m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2)}{(m_2 + m_1)} = \frac{(6 \cdot 10^4 \cdot 1 + 2 \cdot 10^4 \cdot 3)}{(6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V = 1{,}5$ м/с.

Решить задачи 14.2.25, 14.2.27, 14.2.28, 14.3.8, 14.3.19 из [5].

2.8 Теорема об изменении кинетического момента

При поступательном движении мерой инерции твердого тела является масса. При вращательном движении инертность тела определяется распределением его массы относительно оси вращения, т. е. моментом инерции.

Момент инерции тела относительно полюса – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до полюса:

$$I_0 = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\,. \tag{2.25}$$

Момент инерции относительно оси – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до оси:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)\,. \tag{2.26}$$

Радиус инерции определяет то расстояние от оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы она имела тот же момент инерции, как и рассматриваемое тело:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}\,. \tag{2.27}$$

Для определения моментов инерции относительно параллельных осей используется теорема Гюйгенса – Штейнера, согласно которой момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между ними:

$$I_z = I_{zc} + m \cdot d^2\,. \tag{2.28}$$

Для однородных простейших симметричных тел формулы для определения моментов инерции имеются в соответствующей справочной литературе. Так, например, для однородного тела, имеющего форму диска, момент инерции относительно оси диска определяется как

$$I_z = \frac{m \cdot R^2}{2}\,.$$

Моментом количества движения материальной точки относительно центра O называется вектор

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = \vec{r} \times \vec{q}\,, \tag{2.29}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки относительно точки O.

При движении точки в плоскости относительно некоторого центра O ее кинетический момент относительно данного центра может быть определен как алгебраическая величина следующим образом (поступательное движение):

$$l_O = m \cdot v \cdot h, \tag{2.30}$$

где h – кратчайшее расстояние между точкой O и вектором скорости $\vec{v}$.

Главный момент количеств движения материальных точек механической системы относительно некоторого центра O является кинетическим моментом системы относительно данного центра O и определяется как

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_i . \tag{2.31}$$

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на его угловую скорость:

$$L_z = I_z \cdot \omega . \tag{2.32}$$

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра O равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O . \tag{2.33}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени вектора кинетического момента системы относительно некоторого центра O равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}^{E}_{ГО} . \tag{2.34}$$

Задача 14. Трубка вращается вокруг вертикальной оси OZ (рисунок 2.14), ее момент инерции $I_z = 0{,}075$ кг·м^2. По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой $m = 0{,}1$ кг. Когда шарик находится на оси OZ, угловая скорость $\omega_0 = 4$ рад/с. При каком расстоянии l угловая скорость будет $\omega_1 = 3$ рад/с?

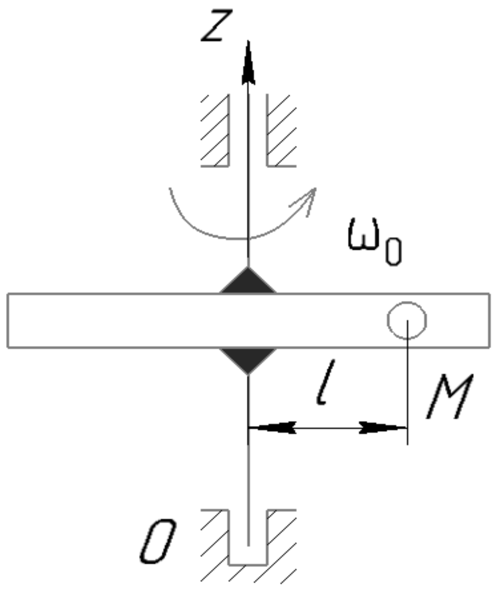


Рисунок 2.14

Решение

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что

$$I_0 \cdot \omega_0 = I_1 \cdot \omega_1,$$

где I – момент инерции системы, $I = I_z + I_{M.T}$; $I_0 = I_z + I_{M.T1}$; $I_1 = I_z + I_{M.T2}$.

Момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась на оси вращения,

$$I_{M.T1} = m \cdot l^2 = 0{,}1 \cdot 0^2 = 0.$$

Момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась от оси вращения на расстоянии l,

$$I_{M.T2} = m \cdot l^2 = 0{,}1 l^2.$$

Тогда согласно теореме о сохранении кинетического момента имеем

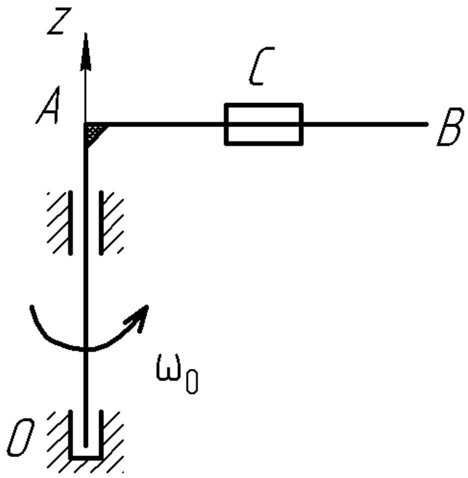
$$I_z \cdot \omega_0 = \left(I_z + 0{,}1 l^2\right)\omega_1 \Rightarrow \frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} = I_z + 0{,}1 l^2 \Rightarrow \frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} - I_z = 0{,}1 l^2.$$

Находим l:

$$l^2 = \frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1\omega_1} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1\omega_1}} = \sqrt{\frac{0{,}075 \cdot 4 - 0{,}075 \cdot 3}{0{,}13}} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 0{,}5$ м.

Задача 15. По стержню AB движется ползун C согласно закону $AC = 0{,}2 + 1{,}2t$ (рисунок 2.15). Ползун считать материальной точкой массой $m = 1$ кг. Момент инерции вала OA относительно оси Z $I_z = 2{,}5$ кг · м^2. Определить угловую скорость вала в момент времени $t_1 = 1$ с, если начальная угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с.



Решение

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что

$$I_0 \cdot \omega_0 = I \cdot \omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}.$$

При $t_0 = 0$ имеем $I_0 = I_z + AC^2 \cdot m$, а при $t_1 = 1$ с имеем $I = I_z + AC^2 \cdot m$.

В итоге получим

Рисунок 2.15

$$\omega = \frac{I_z + AC^2 \cdot \omega_0}{I_z + AC^2} = \frac{2,5 + \left(0,2 + 1,2 \cdot 0\right)^2 \cdot 10}{2,5 + \left(0,2 + 1,2 \cdot 1\right)^2} = 5,695 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega = 5,695$ рад/с.

Решить задачи 14.5.13, 14.5.16, 14.6.5, 14.6.10, 16.1.14, 16.1.23 из [5].

2.9 Работа и мощность силы

В общем случае работа силы на конечном перемещении M_1M_2

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot ds \cdot \cos\alpha. \tag{2.35}$$

Данная формула является наиболее общей для вычисления работы силы на конечном перемещении. Она применяется в следующих случаях:

1) когда точка под действием силы перемещается по криволинейной траектории;

2) когда точка перемещается по прямой, но сила переменна по величине и/или по направлению.

Работа A постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$, действующей на прямолинейном перемещении $\vec{s}$ материальной точки, есть произведение модуля силы F, модуля перемещения s и косинуса угла α между векторами силы и перемещения:

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha. \tag{2.36}$$

Единицей измерения работы в СИ является 1 джоуль (1 Дж).

Работа силы тяжести

$$A = \pm m \cdot g \cdot h. \qquad (2.37)$$

Работа силы упругости

$$A = -\frac{c \cdot h^2}{2}, \qquad (2.38)$$

где h – деформация пружины.

Работа момента силы

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi. \qquad (2.39)$$

Если момент $M_z = \mathrm{const}$, то формула (2.39) примет следующий вид:

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2.40)$$

Задача 16. На тело действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$. Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой $x_0 = 0$ в положение с координатой $x_1 = 1$ м (рисунок 2.16).

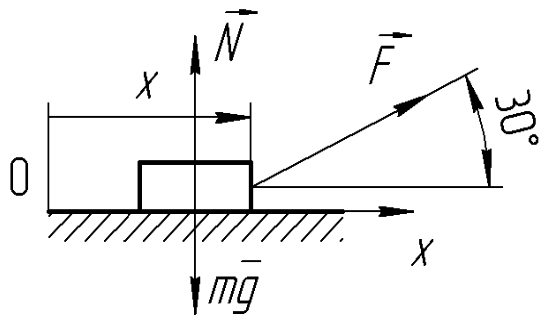


Рисунок 2.16

Решение

Работа силы определяется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F \cdot x \cdot \cos 30° \Rightarrow A = \int_0^1 4x^3 \cdot dx \cdot \cos 30°;$$

$$A = 4 \cdot \cos 30° \int_0^1 x^3 dx; \quad A = 4 \cdot \cos 30° \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = 4 \cdot \cos 30° \frac{1^4}{4} = \cos 30° \cdot 1^4 = 0{,}866 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 0{,}866$ Дж.

Задача 17. Цилиндр, масса которого m = 1 кг, радиус r = 0,173 м, катится без скольжения (рисунок 2.17). Определить суммарную работу силы тяжести и силы сопротивления качению, если ось цилиндра переместилась на расстояние S = 1 м и коэффициент трения качения $\delta = 0{,}01$ м.

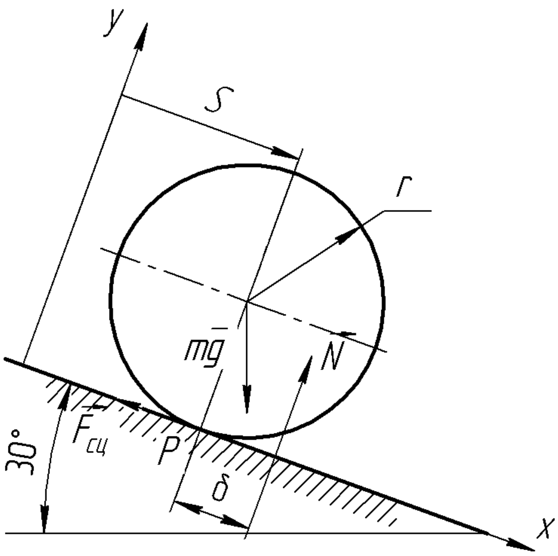


Рисунок 2.17

Решение

Работа силы тяжести

$$A_{mg} = mg \cdot S \cdot \cos(90 - 30°).$$

Работа момента силы сопротивления качению

$$A_M = -M \cdot \varphi = -N \cdot \delta \cdot \varphi.$$

Спроецируем все силы на ось *OY:*

$$\sum F_{iy} = 0;\ N - mg \cdot \cos 30° = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = mg \cdot \cos 30°.$$

$$S = \varphi \cdot r \ \Rightarrow \ \varphi = \frac{S}{r}.$$

Тогда работа момента силы сопротивления качению

$$A_M = -mg \cdot \cos 30° \cdot \delta \cdot \frac{S}{r}.$$

Сумма работы сил

$$\sum A = A_{mg} + A_M = mg \cdot S \cdot \cos(90 - 30°) - mg \cdot \cos 30° \cdot \delta \cdot \frac{S}{r} =$$

$$= 1 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot \cos 60° - 1 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}01 \cdot \frac{1}{0{,}173} = 4{,}41 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\sum A = 4{,}41$ Дж.

Решить задачи 15.1.4, 15.1.8, 15.1.14, 15.1.16, 15.1.17 из [5].

2.10 Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, численно равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}. \qquad (2.41)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий составляющих ее точек:

$$T = \sum T_i \,. \tag{2.42}$$

Кинетическая энергия твердого тела в случае его поступательного движения

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2}, \tag{2.43}$$

где v_C – скорость центра масс твердого тела;

M – масса твердого тела.

В случае вращательного движения твердого тела с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси z

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}, \tag{2.44}$$

где J_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}. \tag{2.45}$$

Теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i \,. \tag{2.46}$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I \,, \tag{2.47}$$

где A_i^E – работа равнодействующей внешних сил, действующих на i-ю материальную точку;

A_i^I – работа равнодействующей внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку.

Если механическая система является неизменяемой, т. е. в которой расстояния между любыми двумя точками во все время остаются постоянным, то для данной системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E . \tag{2.48}$$

Задача 18. Однородный стержень, масса которого m = 1 кг и длина AB = 1 м, вращается вокруг оси OZ по закону $\varphi = 2t^3$ (рисунок 2.18). Определить кинетическую энергию стержня в момент времени t = 1 с.

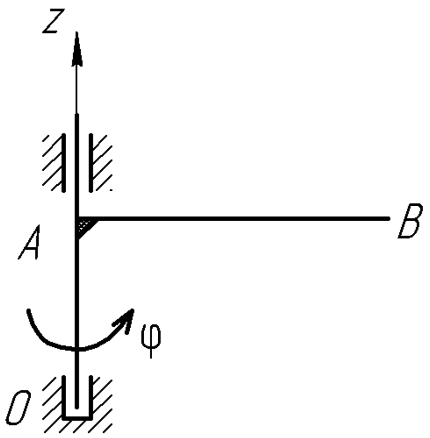


Рисунок 2.18

Решение

Кинетическая энергия при вращательном движении

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2},$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \left(2t^3\right)' = 2 \cdot 3t^2 = 6t^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$ рад/с.

Момент инерции стержня, если ось вращения проходит через конец стержня,

$$I_z = \frac{m \cdot l^2}{3} = \frac{m \cdot AB^2}{3} = \frac{3 \cdot 1^2}{3} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Тогда $T = \dfrac{1 \cdot 6^2}{2} = 18$ Дж.

Ответ: $T = 18$ Дж.

Задача 19. Груз массой m = 4 кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиусом R = 0,4 м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения I = 0,2 кг · м^2 (рисунок 2.19). Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза V = 2 м/с.

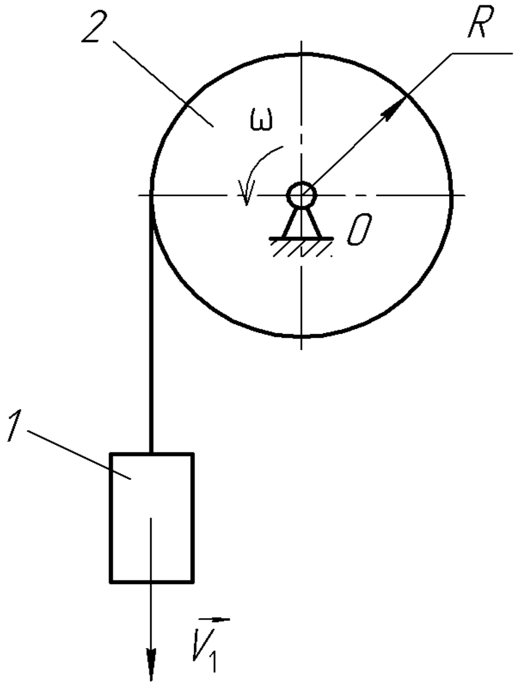


Рисунок 2.19

Решение

Кинетическая энергия системы состоит из суммы кинетических энергий двух тел:

$$\sum T = T_1 + T_2 .$$

Груз совершает поступательное движение. Его кинетическая энергия определится по формуле

$$T_1 = \frac{m \cdot V^2}{2} = \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 8 \text{ Дж.}$$

Цилиндр совершает вращательное движение. Его кинетическая энергия определится по формуле

$$T_2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2} .$$

Так как груз движется со скоростью V, то и трос движется с такой же скоростью. Соответственно, угловая скорость цилиндра

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2}{0,4} = 5 \text{ рад/с.}$$

Тогда

$$T_2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 5^2}{2} = 2,5 \text{ Дж; } \sum T = 8 + 2,5 = 10,5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\sum T = 10,5$ Дж.

Задача 20. Определить скорость груза *2* в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $S = 4$ м, если массы грузов $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг. Система тел вначале находилась в покое (рисунок 2.20).

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A^E .$$

Определим кинетическую энергию механической системы:

$$T = T_1 + T_2; \quad T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}; \qquad T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2}.$$

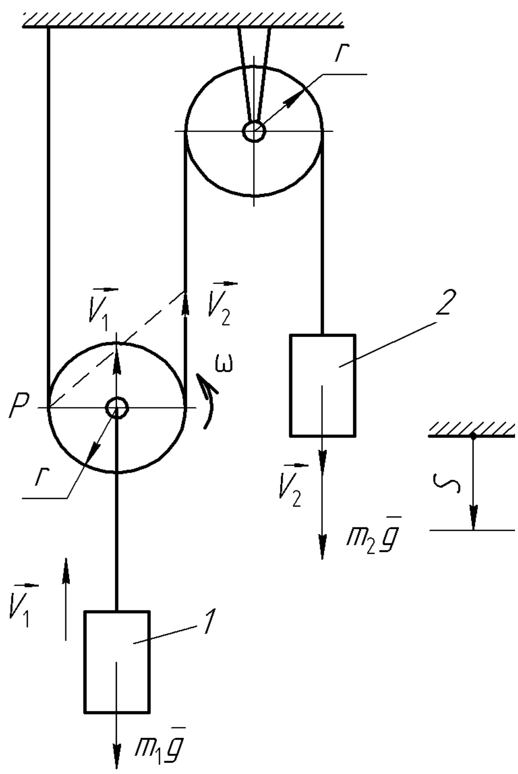


Рисунок 2.20

Скорость первого тела выразим через скорость второго тела:

$$V_1 = \frac{V_2}{2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \frac{V_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{V_2^2}{8};$$

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2};$$

$$T = m_1 \frac{V_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right).$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе.

Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы тяжести не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения S:

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2}; \qquad A_2 = m_2 \cdot g \cdot S;$$

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2} + m_2 \cdot g \cdot S = -2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 143{,}15 \text{ Дж.}$$

$$V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) = 143{,}15 \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{143{,}15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right)}} = 7{,}56 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_2 = 7{,}56$ м/с.

Решить задачи 15.5.5, 15.5.7, 15.7.7, 15.7.8, 15.7.10 из [5].

2.11 Динамика плоского движения тела

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же как центр масс. Поэтому поступательное движение тела сводится к исследованию движения любой его точки. Дифференциальными уравнениями поступательного движения будут являться проекции теоремы о движении центра масс на оси координат, где произвольной точкой будет центр масс:

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{Xi}^E; \quad M \cdot \ddot{y}_C = \sum F_{Yi}^E; \quad M \cdot \ddot{z}_C = \sum F_{Zi}^E. \qquad (2.49)$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$I_Z \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_Z^E. \qquad (2.50)$$

Произведение углового ускорения тела на осевой момент инерции равно сумме моментов внешних сил относительно оси вращения.

Дифференциальные уравнения плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела могут быть представлены как поступательное движение вместе с центром масс и вращательное движение вокруг оси *OZ*:

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{Xi}^E; \quad M \cdot \ddot{y}_C = \sum F_{Yi}^E; \quad I_{Zc} \cdot \varepsilon = \sum M_{Zc}^E, \qquad (2.51)$$

где I_{Zc} – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс.

Задача 21. Определить радиус инерции шкива, масса которого $m = 50$ кг и радиус $R = 0{,}5$ м, если под действием силы натяжения троса $T = 18t$ он вращается вокруг оси *OZ* по закону $\varphi = t^3/3 + 3t$ (рисунок 2.21).

Решение

Используем дифференциальное уравнение вращательного движения тел

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z^E,$$

где M_z^E – момент силы *T* относительно оси *OZ*, $M_z^E = T \cdot R = 18t \cdot 0{,}5 = 9t$.

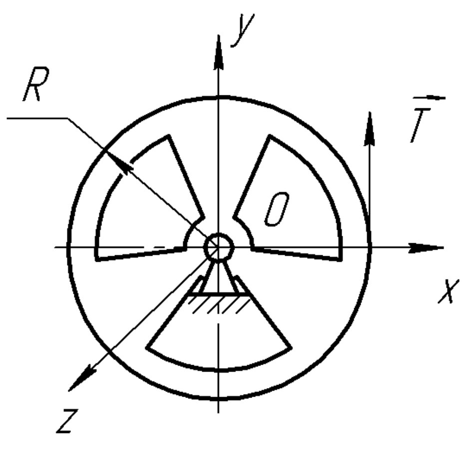


Рисунок 2.21

$$I_z = i^2 \cdot m\,;\ \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{t^3}{3} + 3t\right)' = 3\frac{t^2}{3} + 3 = t^2 + 3\,; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2t\,;$$

$$i^2 \cdot m \cdot 2t = 9t\,;\ i^2 = \frac{9t}{2t \cdot m} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{9t}{2t \cdot m}} = \sqrt{\frac{9}{2 \cdot 50}} = 0{,}3 \text{ м.}$$

Ответ: $i = 0{,}3$ м.

Задача 22. На какой угол повернется за 1 с маховик, масса которого m = 1,5 кг и радиус инерции i = 0,1 м, если он начинает вращаться из состояния покоя под действием главного момента внешних сил M_z^E = 0,15 Н · м (рисунок 2.22)?

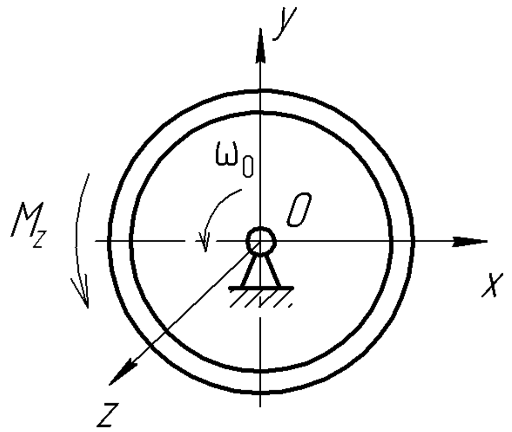


Рисунок 2.22

Решение

Используем дифференциальное уравнение вращательного движения тел

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z^E.$$

$$I_z = i^2 \cdot m = 0{,}1^2 \cdot 1{,}5 = 0{,}015 \text{ кг} \cdot \text{м}^2\,;$$

$$\varepsilon = \frac{M_z^E}{I_z} = \frac{0{,}15}{0{,}015} = 10 \text{ рад/с}^2 = \text{const}\,;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \quad \varepsilon \cdot dt = d\omega \Rightarrow 10 \cdot dt = d\omega \Rightarrow 10\int_0^t dt = \int_0^\omega d\omega \Rightarrow 10t = \omega.$$

С учетом того, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, получим

$$\omega \cdot dt = d\varphi \Rightarrow 10t \cdot dt = d\varphi \Rightarrow 10\int_0^t t \cdot dt = \int_0^\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{10 \cdot t^2}{2} = \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ рад.}$$

Ответ: $\varphi = 5$ рад.

Решить задачи 16.2.9, 16.2.15, 16.2.16, 16.2.17 из [5].

2.12 Принцип Даламбера

Применение метода кинетостатики в теоретической механике даёт возможность решать методами статики многие задачи динамики. Особенно удобно использовать этот метод для учёта динамических нагрузок при силовых расчётах инженерных сооружений и конструкций.

Метод кинетостатики требует введения понятия даламберовой силы инерции.

Даламберова сила инерции – это вектор, имеющий размерность силы, по модулю равный произведению массы на ускорение, направленный противоположно ему, который можно включать в систему действующих на частицу сил и в процессе математических преобразований обращаться с ним, как с обычной силой:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}\,. \tag{2.52}$$

Принцип Даламбера для материальной точки

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{R}_i + \bar{\Phi} = 0\,. \tag{2.53}$$

Векторная сумма активных сил, действующих на точку, реакций связей и даламберовой силы инерции равна нулю.

Принцип Даламбера для механической системы

$$\sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0; \quad \sum M_{Oi}^E + \sum M_{Oi}^R + \sum M_{Oi}^\Phi = 0\,, \tag{2.54}$$

где $\sum \bar{F}_i^E$ – сумма внешних активных сил;

$\sum \bar{R}_i$ – сумма реакций связи со стороны тел, не входящих в систему;

$\sum \bar{\Phi}_i$ – сумма сил инерции точек;

$\sum \bar{M}_{Oi}^E$ – сумма моментов внешних активных сил относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum \bar{M}_{Oi}^R$ – сумма моментов внешних реакций относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum M_{Oi}^\Phi$ – сумма моментов сил инерции относительно того же центра.

Таким образом, условия динамического равновесия имеют вид:

$$\vec{R}_\Gamma^E + \vec{R}_\Gamma^\Phi = 0; \qquad \vec{M}_{\Gamma O}^E + \vec{M}_{\Gamma O}^\Phi = 0\,. \tag{2.55}$$

Главные вектор и главный момент внешних и даламберовых сил инерции равны нулю для любой механической системы.

Задача 23. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0{,}6t^2$ (рисунок 2.23). Определить натяжение каната, если радиус R = 0,4 м.

Решение

Согласно принципу Даламбера $\vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{R} = 0$.

Спроецируем данное уравнение на ось x:

$$-m \cdot g - \Phi_\tau + T = 0 \Rightarrow T = m \cdot g + \Phi_\tau\,.$$

На тело действует только касательное ускорение, поэтому сила инерции груза

$$\Phi_\tau = m \cdot a_\tau .$$

В свою очередь,

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r ,$$

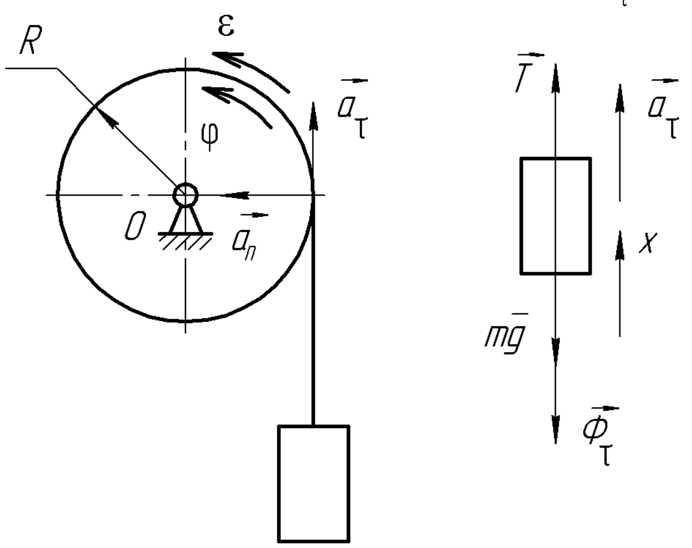


Рисунок 2.23

где ε – угловое ускорение барабана,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 1,2 \text{ рад/с}^2.$$

Соответственно, имеем

$$a_\tau = 1,2 \cdot 0,4 = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Тогда натяжение троса

$$T = m \cdot g + m \cdot a_\tau = m(g + a_\tau) =$$
$$= 60(9,81 + 0,48) = 617,4 \text{ Н}.$$

Ответ: $T = 617,4$ Н.

Задача 24. Материальная точка массой $m = 2$ кг скользит по негладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F = 10$ Н, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтальной плоскостью (рисунок 2.24). Определить ускорение материальной точки, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.

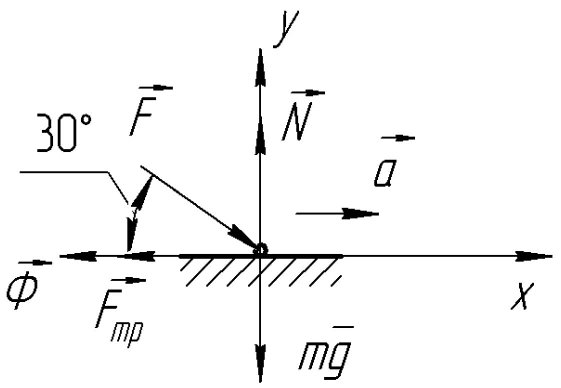


Рисунок 2.24

Решение

Согласно принципу Даламбера

$$\vec{F} + \vec{\Phi} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP} = 0 .$$

Спроецируем данное уравнение на ось x:

$$-\Phi - F_{тр} + F \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{тр} = N \cdot f .$$

Спроецируем данное уравнение на ось y:

$$N - mg - F \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg + F \cdot \sin\alpha .$$

$$-\varPhi-(mg+F\cdot\sin\alpha)\cdot f+F\cdot\cos\alpha=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\cdot a-(mg+F\cdot\sin\alpha)\cdot f+F\cdot\cos\alpha=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot a=-m\cdot g\cdot f-F\cdot\sin\alpha\cdot f+F\cdot\cos\alpha.$$

$$a=\frac{-m\cdot g\cdot f-F\cdot\sin\alpha\cdot f+F\cdot\cos\alpha}{m}=$$

$$=\frac{-2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}1-10\cdot\sin 30^\circ\cdot 0{,}1+10\cdot\cos 30^\circ}{2}=3{,}1\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a=3{,}1$ м/с^2.

2.13 Общее уравнение статики

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если $\vec{F}_i$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных к i-й точке, а $\vec{R}_i$ – реакция связей этой точки, то $\vec{F}_i+\vec{R}_i=0$ (рисунок 2.25).

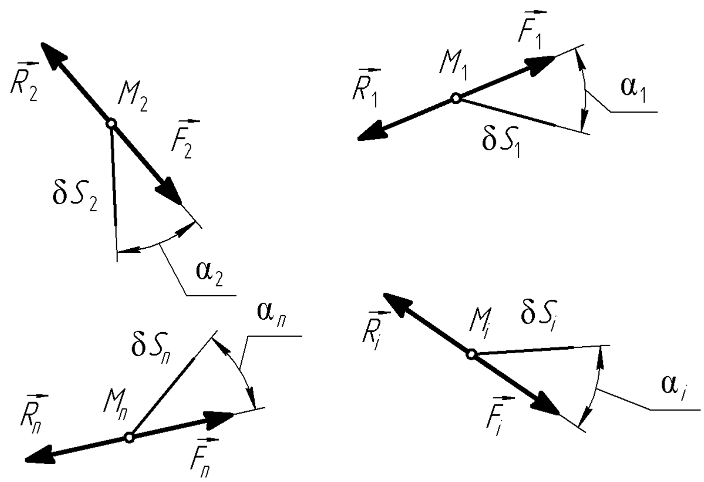


Рисунок 2.25

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения δS_1, δS_2, δS_3, …, δS_n. Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются и $\vec{F}_i=-\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δS_i будет равна нулю:

$$\vec{F}_i\cdot\delta S_i\cdot\cos\alpha_i-\vec{R}_i\cdot\delta S_i\cdot\cos\alpha_i=0.$$

Значит, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i = 0. \qquad (2.56)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики.*

Принцип возможных перемещений: при равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей: $\delta S_i = v_i \cdot \delta t$, где время δt – произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (2.56) запишется так: $\sum F_i \cdot v_i \cdot \delta t \cdot \cos\alpha_i = 0$, а поделив его на δt, получим

$$\sum F_i \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i = 0, \qquad (2.57)$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (2.57) можно назвать ***принципом возможных скоростей*** (уравнением мощностей). Оно иногда бывает более удобным, т. к. используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Общее уравнение статики позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности, находить неизвестные реакции связей. В качестве достоинства отметим, что применение принципа возможных перемещений не требует рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) механической системы и позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции идеальных связей. Отметим также, что число расчетных уравнений равно числу степеней свободы системы.

Задача 25. Для заданной составной конструкции (рисунок 2.26, *а*) определить реактивный момент в заделке *A*, считая заданными интенсивность равномерно распределенной нагрузки *q*, угол α, длины стержней $AB = l$ и $BC = l_2$.

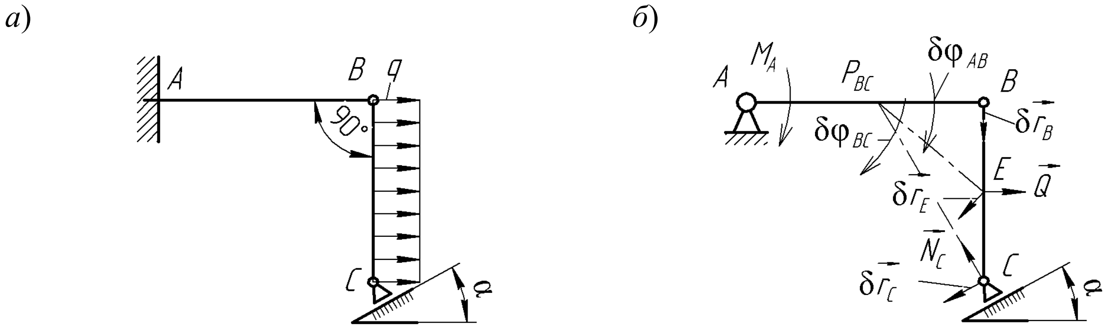


Рисунок 2.26

Решение

Для решения задачи используем принцип возможных перемещений.

Заменим заделку в точке A шарнирно неподвижной опорой, компенсировав отброшенную связь ее реакцией – реактивной парой сил с неизвестным моментом M_A (рисунок 2.26, *б*).

Распределенную нагрузку на участке BC заменим приложенной к точке E равнодействующей силой $Q = q \cdot l_2$. Расстояние $BE = EC = \dfrac{l_2}{2}$.

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень AB на угол $\delta\varphi_{AB}$. Стержень BC совершит возможное плоскопараллельное перемещение, повернувшись на угол $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точки P_{BC}. Точки B, C и E получат соответствующие возможные перемещения:

$$\left|\delta\vec{r}_B\right| = AB \cdot \delta\varphi_{AB} = l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$\left|\delta\vec{r}_E\right| = EP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = EP_{BC} \cdot \frac{\left|\delta\vec{r}_B\right|}{BP_{BC}} = \frac{EP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$\left|\delta\vec{r}_C\right| = CP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = CP_{BC} \cdot \frac{\left|\delta\vec{r}_B\right|}{BP_{BC}} = \frac{CP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB}.$$

Уравнение возможных работ имеет вид:

$$M_A \cdot \delta\varphi_{AB} - (Q \cdot BE) \cdot \delta\varphi_{BC} = 0;$$

$$M_A = \frac{(Q \cdot BE) \cdot \delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{AB}} = Q \cdot BE \cdot i.$$

Далее находим следующее:

$$i = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta S_B} \cdot \frac{\delta S_B}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{BP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC}} \cdot \frac{AB \cdot \delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{AB}{BP_{BC}} = \frac{l_1}{l_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha}.$$

Окончательно получим

$$M_A = (Q \cdot BE) \cdot i = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \mathrm{ctg}\alpha .$$

Решить задачи 18.2.4, 18.3.9, 18.3.23 из [5].

2.14 Общее уравнение динамики

Идеальными называются связи, реакции которых не совершают работы. На практике чаще всего это связи, силами трения в которых пренебрегают.

Для идеальных связей

$$\sum \delta A_i^E = 0 . \tag{2.58}$$

Для системы с идеальными связями, находящимися в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ внешних активных сил на любом возможном перемещении равнялась нулю.

Для системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A_i^E + \sum \delta A_i^{\Phi} = 0 . \tag{2.59}$$

Для движущегося тела (системы) с идеальными связями сумма работ внешних активных сил и сил инерции на возможном перемещении равна нулю.

Задача 26. На клин *3* действует сила F = 100 Н. Определить, с какой силой толкатель *2* прижимает деталь *1* к опорной плоскости в положении равновесия, если угол $\alpha = 11°$ (рисунок 2.27).

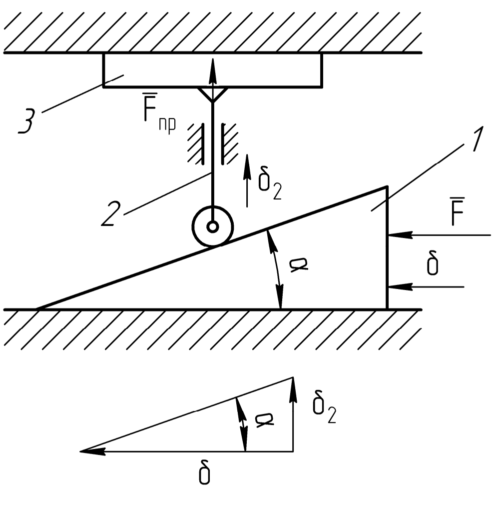


Рисунок 2.27

Решение

Предположим, что под действием силы F клин *3* переместится на расстояние δ. Тогда толкатель *2* сместится на расстояние δ_2.

Эти перемещения связаны между собой зависимостью

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta} \Rightarrow \delta_2 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \delta .$$

Запишем уравнение возможных работ уравновешенных сил, действующих на систему:

$$F \cdot \delta - F_{ПР} \cdot \delta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{ПР} = \frac{F \cdot \delta}{\delta_2} = \frac{F \cdot \delta}{\text{tg}\,\alpha \cdot \delta} = \frac{100}{\text{tg}11^{\circ}} = 514{,}45 \text{ Н.}$$

Ответ: $F_{ПР} = 514{,}45$ Н.

Задача 27. Передаточное отношение червячной передачи лебедки $u = 50$. Определить модуль силы $\vec{F}$, которую необходимо приложить к рукоятке длиной $l = 0{,}2$ м для равномерного подъема груза *1* весом $G = 4000$ Н (рисунок 2.28). Радиус барабана $r = 0{,}12$ м.

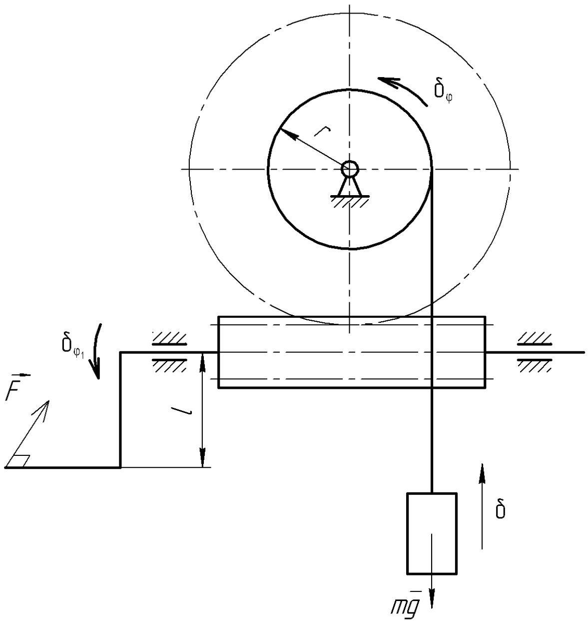


Рисунок 2.28

Решение

Предположим, что под действием силы F червяк повернется на угол $\delta\varphi$. Тогда барабан повернется на угол, меньший, чем угол червяка, в 50 раз, т. е.

$$\delta\varphi_Б = \frac{\delta\varphi}{u}.$$

Зная угол поворота барабана, определим, на какую высоту подымится груз *1*:

$$\delta s = \delta\varphi_Б \cdot r = \frac{\delta\varphi}{u} \cdot r.$$

Работа момента силы F относительно оси вращения определим следующим образом:

$$\delta A_F = F \cdot l \cdot \delta\varphi.$$

Запишем уравнение возможных работ уравновешенных сил, действующих на систему:

$$F \cdot l \cdot \delta\varphi = G \cdot \delta s \;\Rightarrow\; F \cdot l \cdot \delta\varphi = G \cdot \frac{\delta\varphi}{u} \cdot r;$$

$$F = G \cdot \frac{\delta\varphi}{u \cdot l \cdot \delta\varphi} \cdot r = \frac{G \cdot r}{u \cdot l} = \frac{4000 \cdot 0{,}12}{50 \cdot 0{,}2} = 48 \text{ Н.}$$

Ответ: $F = 48$ Н.

Решить задачи 19.1.4, 19.1.8, 19.2.5, 19.3.7 из [5].

2.15 Уравнения Лагранжа второго рода

При непосредственном использовании уравнения возможных работ и мощностей в обобщённых силах $Q_i^E + Q_i^I = -Q_i^\Phi$ могут возникать трудности, связанные с вычислением обобщенных сил инерции.

Процесс составления уравнений значительно упростится, если выразить все входящие в них обобщенные силы через кинетическую энергию системы.

Лагранж вывел формулу обобщенной силы инерции и, подставив её в уравнение возможных работ, получил следующую систему уравнений, названную уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^E + Q_i^I \quad \left(i = 1,\, 2,\, \dots,\, S\right), \qquad (2.60)$$

где T – кинетическая энергия механической системы;

q_i – обобщенные координаты;

$\dot{q}_i$ – обобщенная скорость;

Q_i^E – i-я внешняя обобщённая сила;

Q_i^I – i-я внутренняя обобщённая сила;

S – число степеней свободы.

Разность от производной по времени от частной производной от кинетической энергии по обобщенной скорости минус частная производная по обобщенной координате равна внешней и внутренней обобщенной силе.

Равенства представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Преимущества уравнений Лагранжа:

– нет сложностей с выбором принимаемой к рассмотрению механической системы и сложностей с учётом реакций связей;

– вид и число уравнений не зависят ни от количества тел (точек), входящих в систему, ни от того, как эти тела движутся;

– облегчен поиск необходимой для решения задачи системы уравнений;

– одинаковость вычислительных процедур у всех конкретных задач, решаемых через уравнения Лагранжа 2-го рода.

Эти уравнения удобны не только для решения отдельных задач динамики, но и для общетеоретических построений (теорий устойчивости, малых колебаний и др.).

Из полученных дифференциальных уравнений при заданных силах и начальных условиях можно, интегрируя эти уравнения, найти закон движения системы в виде уравнений. Если задан закон движения системы, то уравнения Лагранжа позволяют определить действующие на систему силы.

Задача 28. На рисунке 2.29 изображена двухтросовая система с тремя грузами, с неподвижным и подвижным шкивами. x_1, x_2, x_3, x_4 – координаты, определяющие положения тел H, O, D, A. Их массы: $m^H = 200$ кг; $m^O = 100$ кг; $m^D = 300$ кг; $m^A = 600$ кг.

Ось O вращения подвижного шкива (радиусом $r = 0{,}15$ м и имеющего желоб под нерастяжимый трос $DEFH$) соединена с грузом A также нерастяжимым тросом $ABCO$, который переброшен через шкив с неподвижной осью вращения и жёлобом под этот трос (радиус $R = 0{,}25$ м). Угловые положения шкивов определяются переменными φ^r – подвижного и φ^R – неподвижного шкивов. Моменты инерции шкивов следующие: $I^R = 2$ кг·м^2; $I^r = 1$ кг·м^2.

Определить ускорения всех тел.

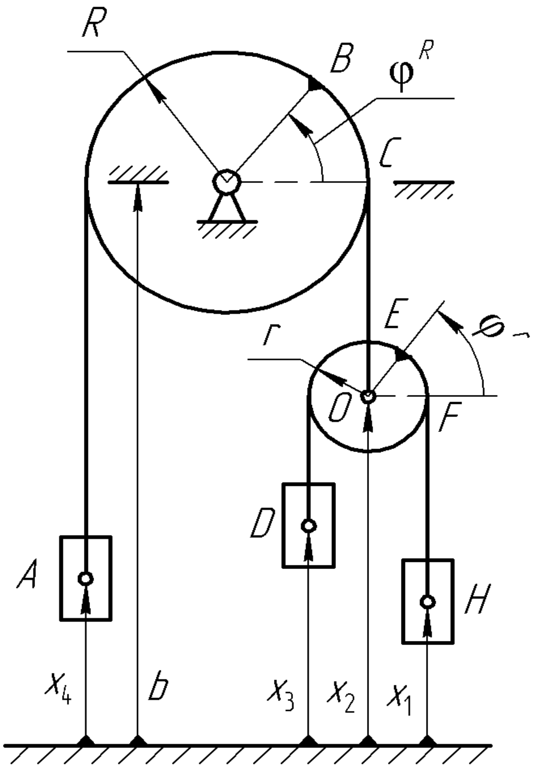


Рисунок 2.29

Решение

Положение системы определяется шестью координатами.

1 Изображаем на чертеже все активные силы. Это силы тяжести всех тел, имеющих массу.

2 Определяем число степеней свободы. Для этого мысленно останавливаем тело H и смотрим, имеет ли подвижность остальная часть системы. В данном случае возможно вращение шкива C, а, следовательно, подъем и опускание груза A и шкива O. Таким образом, система имеет как минимум еще одну степень свободы. После торможения груза A части системы неподвижны и система в целом неподвижна. Это означает, что система имеет две степени свободы.

За обобщённые координаты принимаем $q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$.

Записываем уравнения связей между координатами и, взяв производные, устанавливаем связи между скоростями и ускорениями:

$$x_4 + ABO + x_2 = \mathrm{const}(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_4 + \dot{x}_2 = 0,\; \ddot{x}_4 + \ddot{x}_2 = 0;$$

$$x_3 + DEH + x_1 = 2x_2 + \pi \cdot r \;\Rightarrow\; \dot{x}_3 + \dot{x}_1 = 2 \cdot \dot{x}_2,\; \ddot{x}_3 + \ddot{x}_1 = 2 \cdot \ddot{x}_2;$$

$$BC + b = BCO + x_2 \;\Rightarrow\; R \cdot \varphi^R + b = BCO + x_2 \;\Rightarrow\; R \cdot \dot{\varphi}^R = \dot{x}_2,\; R \cdot \ddot{\varphi}^R = \ddot{x}_2;$$

$$EFH + x_1 = EF + x_2 \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = r \cdot \dot{\varphi}^r + \dot{x}_2,\; \ddot{x}_1 = r \cdot \ddot{\varphi}^r + \ddot{x}_2.$$

Шесть координат связаны между собою четырьмя уравнениями. Это подтверждает, что число степеней свободы рассматриваемой системы равно двум.

3 Находим выражение кинетической энергии через обобщённые скорости:

$$T = T^H + T^r + T^D + T^A + T^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{m^H \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \left(\frac{m^r \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I^r \cdot \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2}{2r^2} \right) + \frac{m^D \cdot \left(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2}{2} + \frac{m^A \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I^R \cdot \dot{x}_2^2}{2R^2}.$$

Видим, что частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам $\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$, т. к. в выражение кинетической энергии обобщенные координаты не входят.

Теперь находим выражения частных производных от кинетической энергии по обобщённым скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m^H \cdot \dot{x}_1 + \frac{I^r\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)}{r^2} - m^D\left(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) = \left(m^H + \frac{I^r}{r^2} + m^D \right)\dot{x}_1 - \left(\frac{I^r}{r^2} + 2m^D \right)\dot{x}_2 =$$

$$= \left(200 + \frac{1}{0{,}15^2} + 300 \right)\dot{x}_1 - \left(\frac{1}{0{,}15^2} + 2 \cdot 300 \right)\dot{x}_2 = 544\dot{x}_1 - 644\dot{x}_2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m^r \cdot \dot{x}_2 - \frac{I^r\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)}{r^2} + 2m^D\left(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + m^A \cdot \dot{x}_2 + \frac{I^R \cdot \dot{x}_2}{R^2} =$$

$$= -\left(\frac{I^r}{r^2} + 2m^D \right)\dot{x}_1 + \left(m^r + \frac{I^r}{r^2} + 4m^D + m^A + \frac{I^R}{R^2} \right)\dot{x}_2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{0{,}15^2} + 2 \cdot 300 \right)\dot{x}_1 + \left(100 + \frac{1}{0{,}15^2} + 4 \cdot 300 + 600 + \frac{2}{0{,}25^2} \right)\dot{x}_2 =$$

$$= -644\dot{x}_1 + 1976\dot{x}_2.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = 544\ddot{x}_1 - 644\ddot{x}_2; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = -644\ddot{x}_1 + 1976\ddot{x}_2.$$

4 Вычисляем обобщённые силы.

Для этого вначале находим сумму работ всех внешних активных сил на перемещении $\vec{x}_1$ обобщённой координаты:

$$A_1^E = A_1^H + A_1^D = -\left(m^H \cdot g\right) \cdot x_1 + \left(m^D \cdot g\right) \cdot x_1.$$

Коэффициент при обобщенной координате $\vec{x}_1$ в уравнении работы и будет являться обобщенной силой:

$$Q_1^E = \left(m^D - m^H\right) \cdot g = \left(300 - 200\right) \cdot 9{,}8 = 980 \text{ Н}.$$

Затем находим сумму работ всех внешних активных сил на перемещении обобщённой координаты $\vec{x}_2$.

Тогда

$$A_2^E = A_2^r + A_2^D + A_2^A = -\left(m^r \cdot g\right) \cdot x_2 - \left(m^D \cdot g\right) \cdot 2x_2 + \left(m^A \cdot g\right) \cdot x_2 .$$

В результате

$$Q_2^E = \left(m^A - m^r - 2m^D\right) g = \left(600 - 100 - 2 \cdot 300\right) \cdot 9{,}8 = -980 \text{ Н}.$$

Итак, составлена система двух уравнений:

$$544\ddot{x}_1 - 644\ddot{x}_2 = 980; \quad -644\ddot{x}_1 + 1976\ddot{x}_2 = -980,$$

из которых $\ddot{x}_1 = 1{,}876$ м/с^2; $\ddot{x}_2 = 0{,}064$ м/с^2.

Из полученных ранее кинематических зависимостей определим следующее:

$$\ddot{x}_4 = -0{,}064 \text{ м/с}^2; \qquad \ddot{x}_3 = -1{,}748 \text{ м/с}^2;$$

$$\ddot{\varphi}^R = 0{,}256 \text{ с}^{-2}; \qquad \ddot{\varphi}^r = 12{,}1 \text{ с}^{-2}.$$

Решить задачи 20.3.9, 20.3.13, 20.6.17, 20.6.18 из [5].

2.16 Малые колебания системы

1 Какие движения механической системы называют колебательными?

2 Какие положения равновесия механических систем вы знаете?

3 Что такое малые колебания механических систем?

4 Дифференциальное уравнение свободных колебаний механических систем и его решение.

5 Затухающие колебания (дифференциальное уравнение и его решение).

6 Параметры, характеризующие затухающие колебания механических систем.

Решить задачи 21.1.4, 21.1.5, 21.1.10, 21.1.13 из [5].

2.17 Общие теоремы динамики. Аналитическая механика

1 Перечислите общие теоремы динамики.

2 Какой формулой определяется вектор момента количества движения материальной точки?

3 Чему равна производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра?

4 Запишите формулы для определения кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

5 Запишите теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральном виде для системы с идеальными связями.

6 Запишите виды уравнений работ, характеризующих принцип возможных перемещений.

7 Какой вид имеет общее уравнение динамики механической системы?

Решить задачи 14.4.24, 15.3.4, 15.3.13, 15.4.7, 15.5.5, 15.7.9, 16.1.14, 16.1.29 из [5].

Список литературы

1 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : учебник: в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва : Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 427 с. : ил.

2 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : учебник: в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва : Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 447 с. : ил.

3 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике : учебное пособие / И. В. Мещерский. – Москва : Наука, 1986. – 448 с. : ил.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для технических вузов / Под ред. А. А. Яблонского. – Москва : Высшая школа, 1985. – 367 с. : ил.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике : учебное пособие для втузов / О. Э. Кепе [и др.] ; под ред. О. Э. Кепе. – Москва : Высшая школа, 1989. – 368 с. : ил.

6 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика : учебник / В. Л. Цывильский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : КУРС; ИНФРА-М, 2016. – 368 с.