МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ОБРАБОТКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов» очной формы обучения

Могилев 2023

УДК 658.562
ББК 34.9
О23

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «1» сентября 2023 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Е. Н. Прокопенко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для выполнения практических заданий. Методические рекомендации разработаны в соответствии с учебной программой по дисциплине «Обработка измерительной информации» для студентов специальности 1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов» очной формы обучения.

Учебное издание

ОБРАБОТКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ответственный за выпуск А. В. Хомченко

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

Введение

Общение людей друг с другом, их взаимоотношения с внешним миром, их производственная, научная и общественная деятельность тесно связаны с информационными процессами – процессами восприятия, передачи, обработки, поиска, хранения и отображения информации. Без обмена информацией невозможно управление различными объектами, организация производственной, научной и общественной жизни человека.

Целью изучения дисциплины «Обработка измерительной информации» является формирование у студентов четких представлений о целях, задачах и методах обработки измерительной информации в неразрушающем контроле. В результате обработки измерительная информация об объекте контроля представляется в форме, удобной для восприятия, хранения и дальнейшего преобразования. Для этого необходимо осуществить выделение информативного сигнала и подавление шумов и помех, преобразование и передачу сигнала по каналу связи от датчика к приемному устройству, оцифровывать сигнал и обработать цифровую информацию в микропроцессоре, вывести численную информацию или цифровое изображение на экран устройства отображения информации.

В данной дисциплине рассматриваются теоретические основы анализа сигналов, построение аналоговых и цифровых систем обработки измерительной информации, принципы визуализации измерительной информации в неразрушающем контроле.

Целью практических занятий по дисциплине «Обработка измерительной информации» является формирование у студентов навыков анализа сигналов измерительной информации в приборах неразрушающего контроля.

1 Измерительная информация. Количественная оценка информации

1.1 Основные теоретические положения

Первоначально информация понималась как знания, сведения, сообщения о чем-либо.

Информация – свойство материи, отличное от се вещественных и энергетических свойств. Она неразрывно связана с категорией диалектического материализма – отражением и является содержательной характеристикой отражения. Являясь свойством материи, информация может рассматриваться как величина. Сообщения, сведения, знания, обобщаемые понятием «информация», могут характеризоваться различными аспектами: объемом, новизной, содержательностью, важностью, полезностью, ценностью и т. п.

Для того чтобы перейти к измерению информации в равноинтервальной шкале, необходимо установить функциональную взаимосвязь ее отдельных компонент либо связь с другими свойствами материи.

В теории знаков (семиотике) знаковые системы изучаются на трех основных уровнях: синтактическом, семантическом и прагматическом.

В семантике сообщения рассматриваются как символы, абстрагированные от содержания и какой-либо ценности.

В семантике изучается содержание (смысл) символов-сообщений, т. е. отношение сообщений к тому, что они выражают.

В прагматике символы-сообщения рассматриваются в их отношении к получателю.

Информативность сообщении может оцениваться на каждом из трех основных уровней семиотики

При синтактическом анализе информация определяется как мера уменьшения неопределенности знаний о каком-либо предмете в познавательном процессе. Если H_1 – исходная (априорная) неопределенность знания по данному вопросу, а H_2 – остаточная (апостериорная) неопределенность, характеризующая состояние знания после получения сообщения, то содержащаяся в этом сообщении информация определяется их разностью:

$$I = H_2 - H_1. \tag{1.1}$$

Для оценки степени неопределенности знаний на синтактическом уровне разработано большое количество различных математических мер.

Логарифмическая мера. Чем больше уровней N может иметь измеряемая величина, тем труднее определить ее значение. Следовательно, исходная неопределенность возрастает с увеличением числа N.

Исходную неопределенность знания (до выполнения измерения) можно характеризовать значением логарифмической функции от N:

$$H_1 = \log_a N\,. \tag{1.2}$$

Неопределенность знания об истинном значении измеряемой величины после измерения можно также оценить значением логарифмической функции:

$$H_2 = \log_a n, \tag{1.3}$$

где n – число возможных значений величины после измерения, характеризующее его погрешность.

Тогда информация, полученная в результате измерения,

$$I = H_2 - H_1 = \log_a N - \log_a n = \log_a \frac{N}{n}. \tag{1.4}$$

Единица неопределенности и информации определяется выбором основания логарифмов a. При $a = 2$ она называется двоичной единицей информации (бит), при $a = 10$ – десятичной (дит), при $a = e$ – натуральной (нит).

Вероятностная мера. Если заданы исходные (априорные) вероятности всех возможных исходов опыта $P_i\left(i = 1, 2, ..., N\right)$, такие, что $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$, то исходную неопределенность можно оценить более «тонкой» мерой.

В случае, когда априорная вероятность некоторого k-го значения измеряемой величины приближается к 1, исходное знание характеризуется незначительной неопределенностью: можно почти с полной уверенностью ожидать, что в результате измерения будет получено именно это значение, а не какое-то другое из N – 1 оставшихся, вероятности появления которых незначительны. Чем более близкими будут вероятности P_{1i}, тем труднее выбрать правильное значение, тем больше исходная неопределенность. Таким образом, мера неопределенности должна в данном случае учитывать вероятности отдельных возможных исходов. Этим требованиям, а также требованию аддитивности отвечает предложенная К.-Э. Шенноном вероятностная, или статистическая, мера неопределенности, которая описывается выражением

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log P = \sum_{i=1}^{N} H_i, \tag{1.5}$$

где

$$H_i = -P_i \log P_i. \tag{1.6}$$

По аналогии с термодинамической мерой неопределенности она получила название энтропии.

При одинаковой вероятности всех N значений

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{N} 1/N \log 1/N = \log N. \tag{1.7}$$

Общее число неповторяющихся сообщений, которое может быть составлено из алфавита мощности m путем комбинирования по n символов в сообщении,

$$N = m^n.$$

Энтропия символа исходного алфавита, составленного из равновероятных и взаимонезависимых символов,

$$H = \log m.$$

1.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными способами оценки количества информации. Решить следующие задачи.

1 Известно, что каждое из $к$ возможных равновероятных двоичных сообщений несет 4 бита информации. Чему равно k?

2 Дан алфавит [A_1, A_2, A_3, A_4] из которого составляют все возможные сообщения s длиной по три символа. Какое количество информации приходится на одно такое сообщение?

3 Дан алфавит мощностью 4, вероятности появления букв равны соответственно $p_1 = p_2 = 0{,}25$; $p_3 = 0{,}34$; $p_4 = 0{,}16$. Определить количество информации на символ сообщения, составленного из такого алфавита.

4 Чему равно количество информации при получении 16 сообщений равномерного четырехзначного троичного кода?

5 Определить энтропию экрана мобильного телефона, если его разрешение 320×240, а каждый пиксель может отображать один из 4096 цветов.

6 Вычислите, какое количество информации приходится на одно сообщение длиной 3, 4, 5 и 6 символов, составленное из:

а) двоичного;

б) троичного алфавита?

7 Вероятность появления некоторого события в данном опыте равна p, вероятность того, что это событие не произойдет $q = 1 - p$. При каком значении q результат опыта будет обладать максимальной неопределенностью?

Контрольные вопросы

1 Что такое информации?

2 Какие направления существуют в теории информации?

3 Какие существуют меры определения информации?

4 Как определяется логарифмическая мера определения количества информации?

5 Как определяется вероятностная мера информации?

6 Что такое энтропия?

7 В каких единицах измеряется информации?

2 Системы счисления. Десятичная и двоичная системы счисления

2.1 Основные теоретические сведения

Системой счисления называется совокупность приемов обозначения (записи) чисел. Или, в общем случае, это специальный язык, алфавитом которого являются символы, называемые цифрами, а синтаксисом – правила, позволяющие однозначно сформировать запись чисел. Запись числа в некоторой системе счисления называют кодом числа. Кратко число записывается следующим образом:

$$A = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 . \qquad (2.1)$$

Отдельную позицию в изображении числа принято называть разрядом, а номер позиции – номером разряда. Число разрядов в записи числа называется разрядностью и совпадает с его длиной.

Каждой цифре a_i данного числа *А* однозначно соответствует ее количественный (числовой) эквивалент – $K(a_i)$. Количественный эквивалент числа *А,* заданного в определенной системе счисления, является некоторой функцией числовых эквивалентов всех его цифр, т. е.

$$K(A) = f\left[K(a_n), ..., K(a_1)\right]. \qquad (2.2)$$

Диапазон представления *D* чисел в данной системе счисления – это интервал числовой оси, заключенный между максимальными и минимальными числами, представленными заданной разрядностью:

$$D = K(A)_{(p)\max} - K(A)_{(p)\min} . \qquad (2.3)$$

Существует бесчисленное множество способов записи чисел цифровыми знаками. Однако любая система счисления, предназначенная для практического использования, должна обеспечивать:

– возможность представления любого числа в заданном диапазоне чисел;
– однозначность представления;
– краткость и простоту записи чисел;
– легкость овладения системой, а также простоту н удобство оперирования ею.

В основном системы счисления строятся по следующему принципу:

$$A_{(p)} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n , \qquad (2.4)$$

где $A(p)$ – запись числа в системе с базисом p_i ;

a_i – база или последовательность цифр системы счисления с p_i алфавитом;

$\{p_i\}$ – базис системы счисления (совокупность весов отдельных разрядов системы).

Основанием системы счисления называется количество различных символов (цифр), используемых в каждом из разрядов числа для его изображения в данной системе счисления.

Базис системы счисления – это совокупность весов отдельных разрядов системы счисления.

Непозиционными называются такие системы счисления, алфавит которых содержит неограниченное количество символов (цифр), причем количественный эквивалент любой цифры постоянен и зависит только от ее начертания, но не от позиции в числе. Такие системы строятся по принципу аддитивности, т. е. количественный эквивалент числа определяется как сумма рядом стоящих цифр:

$$K\left(A(Q)\right) = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k = \sum_{1}^{k} Q_i\,, \tag{2.5}$$

где Q_i – символы, образующие базис системы:

$$Q = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}. \tag{2.6}$$

К основным недостаткам непозиционных систем счисления можно отнести:

– отсутствие нуля;

– необходимость содержания бесконечного количества символов;

– сложность арифметических действий с числами.

Позиционными называются системы счисления, алфавит которых содержит ограниченное количество символов, причем значение каждой цифры в числе определяется не только ее начертанием, ной находится в строгой зависимости от позиции в числе.

Позиционные системы имеют ряд достоинств по сравнению с непозиционными, основным из которых является удобство выполнения арифметических операций.

В общем виде число A в позиционной системе счисления может быть представлено следующим образом:

$$A = a_n p_{n-1} \ldots p_1 + a_{n-1} p_{n-2} \ldots p_1 + \ldots + a_2 p_1 + a_1, \tag{2.7}$$

где a_i – цифра i-го разряда числа, причем $a_i = \overline{0, p_l - 1}$ есть база системы счисления;

p_i – основания системы счисления, $p_i = \prod_{0}^{l} p_l$ – вес i-го разряда числа.

Позиционные системы счисления строятся не только по принципу аддитивности, но и по принципу мультипликативности, т. е. количественный эквивалент числа определяется как сумма рядом стоящих цифр со своими весами.

Существует два основных метода перевода числа из одной системы счисления в другую: табличный и расчетный.

Табличный метод прямого перевода основан на сопоставлении таблиц соответствия чисел различных систем счисления. Этот метод очень громоздок и требует большого объема памяти для хранения таблиц» но применим для любых систем счисления (не только для позиционных). Суть другого вида табличного метода состоит в том, что имеются таблицы эквивалентов в каждой системе только для цифр, т. е. баз, этих систем и степеней основания (положительных и отрицательных), т. е. базиса систем. Задача перевода сводится к тому, что в выражения полиномов для исходной системы счисления представляют эквиваленты из новой системы для всех цифр и их весов разрядов и производят действия (умножения и сложения) по правилам арифметики по новому основанию *p*. Полученный при этом результат будет изображать число в новой системе счисления.

Расчетный метод перевода числа из одной системы счисления в другую осуществляется по следующему правилу: чтобы перевести целое число из одной позиционной системы счисления в другую, необходимо исходное число последовательно делить на основание новой системы счисления, записанное в исходной системе, до получения частного, равного нулю. Число в новой системе счисления записывается из остатков от деления, начиная с последнего.

Перевод правильной дроби с основанием *p* в дробь с основанием *q* осуществляется в следующем порядке.

1 Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.

2 Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность представления числа.

3 Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.

4 Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Десятичная система счисления пришла в Европу из Индии, где она появилась не позднее VI века н. э. В этой системе 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, однако информацию несет не только цифра, но и место, на котором цифра стоит (то есть ее позиция). В десятичной системе счисления особую роль играют число

10 и его степени: 10, 100, 1000 и т. д. Самая правая цифра числа показывает число единиц, вторая справа – число десятков, следующая – число сотен и т. д.

Числа, которые записаны с помощью одной цифры, называют **однозначными**, записанные с помощью двух – **двузначными**, также по количеству цифр в числе дают названия и другим числам.

*Под **двоичной системой счисления** понимается* такая система, в которой для изображения чисел используются два символа, а веса разрядов меняются по закону $2^{\pm k}$ (где k – произвольное целое число). Классической двоичной системой является система с символами 0, 1. Ее двоичные цифры часто называют битами.

Умножение двоичных чисел полностью определяется двумя правилами:

1) умножение любого числа на 0 дает 0;

2) умножение любого числа на 1 оставляет его без изменения.

Для сложения имеется только правило, согласно которому прибавление 0 к любому числу не меняет этого числа.

2.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными теоретическими положениями по переводу чисел из одной системы счисления в другую. Решить следующие задачи.

1 Переведите число 1011101.001 из двоичной системы счисления (СС) в десятичную СС.

2 Переведите число 75 из десятичной системы в двоичную.

3 Переведите число 0,214 из десятичной системы счисления в двоичную СС.

4 Число 1287,923 представьте в десятичной системе счисления в виде полинома.

5 Переведите двоичное число 1101001 в десятичную систему счисления.

6 Переведите двоичное число 100111011 в десятичную систему счисления

7 Переведите десятичные числа 464, 380,1875 и 115,94 в двоичную систему счисления.

8 Переведите числа 1000001_2; $1001{,}01_2$; $1{,}01_2$; $100011111{,}0101_2$ в десятичную систему счисления.

Контрольные вопросы

1 Что такое система счисления?

2 Назовите основные системы счисления.

3 Какие существуют способы перевода чисел из одной системы в другую?

4 Какие системы счисления относятся к непозиционным?

5 Какие системы счисления относятся к позиционным и по какому принципу они строятся?

3 Электрические сигналы. Классификация сигналов. Параметры электрических сигналов. Радиоволны

3.1 Краткие теоретические сведения

В соответствии с принятой традицией сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений. На практике сообщения неразрывно связаны с заключенной в них информацией.

Для того, чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчетов, следует указать способ их математического описания или, другими словами, создать математическую модель сигнала. Математической моделью сигнала может быть, например, функциональная зависимость, аргументом которой является время. Математические модели электрических сигналов, рассматриваемых в электротехнике и электронике, обычно обозначаются символами латинского алфавита $u(t)$, $i(t)$ и т. д. Зная математические модели сигналов, можно сравнивать эти сигналы между собой, устанавливать их тождество и различие, проводить классификацию.

Классифицируя сигналы по виду моделирующей их функции времени, можно выделить аналоговые и дискретные сигналы.

Если сигнал имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно-непрерывной функции, то он называется аналоговым.

Если значения сигнала определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек, то такой сигнал называется дискретным.

Дискретные сигналы в свою очередь подразделяются на импульсные и цифровые. Если сигнал в виде изменения тока или напряжения существует лишь в пределах конечного интервала времени, то такой сигнал называется импульсным. Особой разновидностью дискретных сигналов являются цифровые сигналы. Для них характерно то, что отсчетные значения сопоставлены числам.

Существует три группы параметров сигналов:

1) основные параметры;

2) производные параметры;

3) дополнительные параметры.

Основные параметры характеризуют идеализированный сигнал.

Например, последовательность прямоугольных импульсов, идеализированное графическое отображение которой приведено на рисунке 3.1, характеризуется тремя основными параметрами: U_m – амплитуда импульсов; $t_и$ – длительность импульсов; T – период следования импульсов.

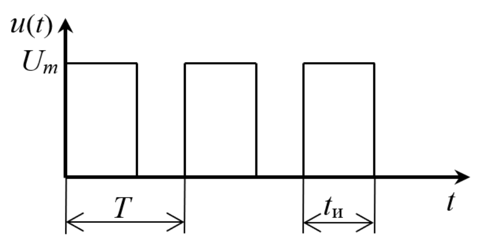

Рисунок 3.1 – Последовательность прямоугольных импульсов

Производные параметры получаются пересчетом из основных параметров. Например, для той же последовательности прямоугольных импульсов могут быть определены:

– f – циклическая частота сигнала, $f = \dfrac{1}{T}$;

– ω – круговая частота сигнала, $\omega = 2\pi f$;

– q – скважность, $q = \dfrac{T}{t_\text{и}}$, в частном случае при $q = 2$ – последовательность импульсов называется меандром (см. рисунок 3.1);

– $k_\text{зап}$ – коэффициент заполнения, $k_\text{зап} = q^{-1} = \dfrac{t_\text{и}}{T}$;

– $U_\text{ср}$ – среднее значение сигнала, $U_\text{ср} = \dfrac{U_m}{q}$.

3.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с классификацией сигналов, их основными параметрами. Решить следующие задачи.

1 Импульсный сигнал $u(t)$, имеющий размерность напряжения (вольт), описывается формулой $u(t) = 25(e^{-10^5 t} - e^{-2\cdot 10^5 t})\sigma(t)$. Постройте график данного импульса. Определите максимальное значение сигнала $u_{\max}$, а также момент времени достижения максимума $t_{\max}$. Вычислите длительность импульса $\tau_\text{и}$, определив ее как длину отрезка времени от нуля до той точки, в которой мгновенное значение сигнала уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальным значением.

2 Математическая модель импульсного сигнала задана выражением $u(t) = A_0 t e^{-\alpha t}$. Вычислите и постройте график данного сигнала в зависимости от безразмерного аргумента αt. Определите длительность импульса $\tau_\text{и}$, приняв в качестве критерия окончания импульса спад мгновенных значений до уровня 0,1 от максимального значения.

3 Найдите формулы, описывающие математические модели следующих импульсных сигналов (рисунок 3.2):

а) однополярного импульса $s_1(t)$, представляющего собой отрезок синусоиды с амплитудой A и частотой ω_0; длительность импульса равна половине периода (*а*);

б) двухполярного импульса $s_2(t)$, отвечающего целому периоду синусоиды с такими же параметрами (*б*).

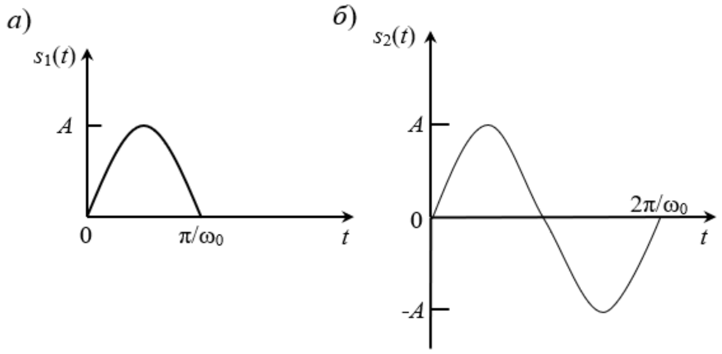

Рисунок 3.2 – Формы импульсов

4 Вычислите энергию E_u и норму $||u||$ экспоненциального видеоимпульса напряжения $u(t) = 30e^{-10^5 t}\sigma(t)$.

5 Вычислите энергию E_s и норму $||s||$ сигнала $s(t)$, представляющего собой прямоугольный видеоимпульс напряжения с амплитудой U_0 и длительностью $\tau_и$.

6 Выведите формулу для нахождения энергии радиоимпульса длительностью $\tau_и$ с огибающей прямоугольной формы, описываемого выражением

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ U_m \sin(\omega t + \varphi), 0 < t < \tau_u; \\ 0,\ t > \tau_u. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1 Что представляет сигнал?
2 Что такое математическая модель сигнала?
3 Как классифицируются сигналы?
4 Назовите основные параметры сигналов.
5 Какие параметры относятся к дополнительным?

4 Представление сигналов во временной области

4.1 Основные теоретические положения

При построении различных систем обработки информации возникают задачи анализа и синтеза сигналов. Сущность анализа состоит в том, что изучаемый объект разбивается на составные части, после чего проводится их исследование. Применительно к сигналам при анализе исследуемый сигнал описывается совокупностью других более простых сигналов с хорошо изученными свойствами. Такое представление позволяет, с одной стороны, сложную задачу преобразования исследуемого сигнала устройствами обработки свести к задачам преобразования известных сигналов, а с другой стороны – достаточно эффективно решать задачи синтеза сигналов с заданными свойствами.

В общем случае сигнал $s(t)$ описывается функцией времени, позволяющей рассматривать сигнал как процесс, развивающийся во времени. Поэтому представление сигнала $s(t)$ сложной формы совокупностью простых сигналов, также описываемых функциями времени, получило название *динамического* или *временного* представления [1].

В теории радиотехнических сигналов для динамического представления используются следующие элементарные функции: функция знака $sign(t)$ (сигнум-функция), единичная функция $\sigma(t)$ (функция включения, функция Хевисайда), дельта-функция $\delta(t)$ (функция Дирака) и прямоугольный импульс с единичной высотой $rect\left(\frac{t}{\tau_и}\right)$ [1, 2].

Функция знака $sign(t)$ имеет постоянную величину, равную единице, знак которой изменяется скачком при переходе переменной времени t через ноль (рисунок 4.1).

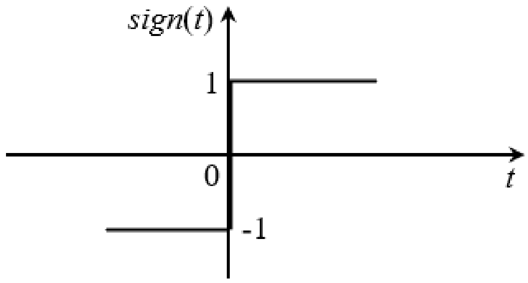

Рисунок 4.1 – Функция знака $sign(t)$

Математически функция знака описывается выражением

$$sign(t)=\begin{cases}-1 \text{ при } t<0;\\ 0 \text{ при } t=0;\\ 1 \text{ при } t>0.\end{cases} \tag{4.1}$$

Умножение $s(t)$ на $sign(t)$ означает изменение знака сигнала в момент времени $t=0$.

Единичная функция $\sigma(t)$ характеризует собой единичный скачок при переходе t через ноль (рисунок 4.2).

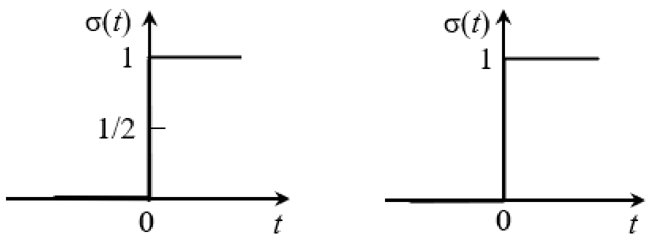

Рисунок 4.2 − Графическое представление функции включения

Математическое выражение единичной функции имеет следующий вид:

$$\sigma(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0;\\ \dfrac{1}{2} \text{ при } t=0;\\ 1 \text{ при } t>0\end{cases} \text{ или } \sigma(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0;\\ 1 \text{ при } t>0.\end{cases} \qquad (4.2)$$

Функция $\sigma(t)$ позволяет моделировать скачок размером в единицу в произвольный момент времени t_0 (рисунок 4.3):

$$\sigma(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<t_0;\\ 1 \text{ при } t>t_0.\end{cases} \qquad (4.3)$$

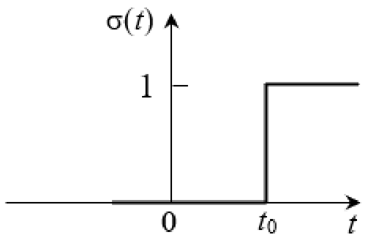

Рисунок 4.3 − Графическое представление функции включения в произвольный момент времени

Функцию $\sigma(t)$ удобно использовать для моделирования прямоугольных импульсов.

Дельта-функция $\delta(t)$ была введена физиком-теоретиком П. Дираком. Рассмотрим импульс $s(t)$ единичной площади и длительностью $\tau_и$ (рисунок 4.4).

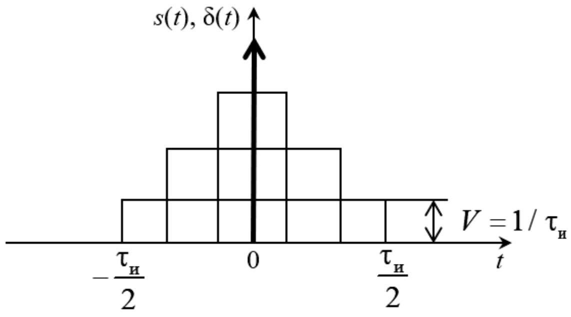

Рисунок 4.4 – Дельта-функция $\delta(t)$

$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau_и}\ \text{при}\ -\dfrac{\tau_и}{2}\le t\le\dfrac{\tau_и}{2};\\ 0\ \text{при остальных}\ t.\end{cases}$$

Будем уменьшать длительность импульса при сохранении его площади, равной единице. При этом высота импульса $U=\dfrac{1}{\tau_и}$ будет возрастать. При $\tau_и\to 0$ высота импульса будет стремиться к бесконечности. Это и есть δ-функция (на рисунке выделена утолщенным отрезком со стрелкой)

$$\delta(t)=\lim_{\tau_и\to 0}s(t)=\lim_{\tau_и\to 0}\frac{1}{\tau_и}.$$

Математически δ-функция записывается следующим образом

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty\ \text{при}\ t=0;\\ 0\ \text{при остальных}\ t.\end{cases}\tag{4.4}$$

Прямоугольный импульс с единичной амплитудой (рисунок 4.5) описывается следующим выражением:

$$rect\left(\frac{t}{\tau_и}\right)=\begin{cases}1\ \text{при}\ -\dfrac{\tau_и}{2}\le t\le\dfrac{\tau_и}{2};\\ 0\ \text{при остальных}\ t.\end{cases}\tag{4.5}$$

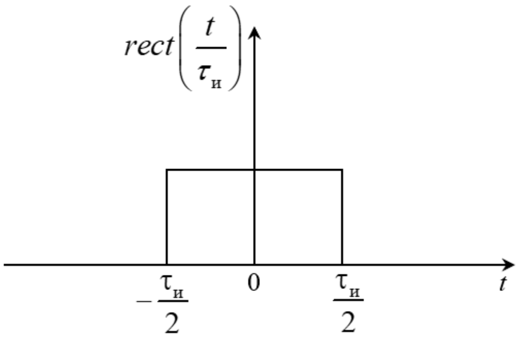

Рисунок 4.5 – Прямоугольный импульс с единичной амплитудой

С помощью прямоугольного импульса с единичной высотой можно достаточно просто описать периодическую последовательность прямоугольных импульсов, цифровые сигналы в виде двоичных кодовых комбинаций и другие.

Произвольный сигнал с помощью $\sigma(t)$ представляется следующим образом:

$$s(t_k) \approx S_0 \cdot \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S_{k-1}) \cdot \sigma(t - k\Delta t). \tag{4.6}$$

С помощью $\delta(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

4.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными положениями по динамическому представлению сигналов. Решить следующие задачи.

1 Импульсный сигнал $s(t)$ прямоугольной формы имеет длительность 5 мкс и амплитуду 10 В. Начало отсчета совпадает с фронтом импульса. Записать аналитическое выражение этого сигнала.

2 Сигнал $s(t)$ имеет математическую модель вида

$$s(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ s_0\left(t / t_0\right) \text{ при } 0 \le t \le t_0; \\ s_0 \text{ при } t > 0. \end{cases}$$

Представить данную зависимость в виде суммы кусочно-линейных функций.

3 Составить математическую модель треугольного симметричного импульса, имеющего длительность $\tau_и$ и S_0.

4 Сигнал $S(t)$ равен нулю при $t<0$ и изменяется по закону $S(t)=At^4$ при $t>0$, A – постоянный коэффициент. Найти динамическое представление сигнала $S(t)$ с помощью функций включения.

5 Сигнал $S(t)$ равен нулю при $t<0$ и изменяется по закону $S(t)=At^3+Bt^2+Ct$ при $t>0$, A, B, C – постоянные коэффициенты. Найти динамическое представление сигнала $S(t)$ с помощью функций включения.

6 На рисунке 4.6 изображены осциллограммы импульсных сигналов $S_1(t)$, $S_2(t)$ и $S_3(t)$. Найти математические модели данных сигналов, выраженные посредством сумм, которые составлены из произведений линейных функций и функций Хевисайда.

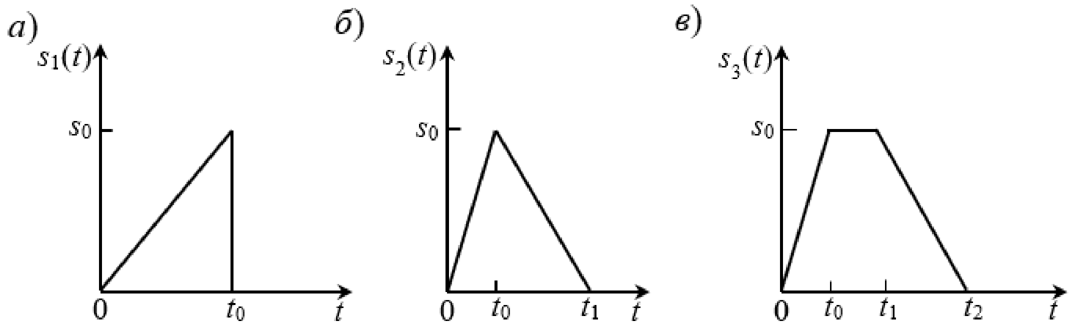

Рисунок 4.6 – Осциллограммы импульсных сигналов

7 Имеется сигнал, который описывается формулой $s(t)=\exp(-\alpha t)\sigma(t)$. Найти динамическое представление данного сигнала.

8 Построить математическую модель последовательности видеоимпульсов с амплитудой сигнала A, длительностью τ и периодом следования T.

9 Составить математическую модель пилообразного сигнала с амплитудой A и периодом следования T.

Контрольные вопросы

1 Что такое динамическое представление сигнала?

2 Какие функции могут использоваться для динамического представления сигналов?

3 Что представляет собой функция Хевисайда?

4 Как представляется произвольный сигнал с помощью Хевисайда?

5 Что такое δ-функция?

6 Назовите основные свойства δ-функции.

7 Как представляется произвольный сигнал с помощью δ-функции?

5 Спектральный анализ сигналов. Ряды Фурье. Преобразование Фурье

5.1 Основные теоретические положения

Для описания одного и того же сигнала в зависимости от решаемых задач могут быть использованы различные математические представления [3, 4]:

– временное представление;

– спектральное (частотное) представление.

Временное представление – это описание сигнала с помощью функций времени. Оно определяет свойство и параметры сигнала во временной области (форму, длительность сигнала, энергию, мощность).

Однако при практическом применении сигналов важно знать их свойства не только во временной, но и в частотной области. В этом случае при анализе и расчетах сигналы представляются своими частотными характеристиками, что облегчает решение многих практических задач обработки сигнала. Обычно частотные характеристики называют частотными спектрами, или спектрами, сигнала.

Определение спектра сигнала составляет задачу спектрального анализа. В основе спектрального анализа лежит разложение сигнала на спектральные составляющие. Математические методы спектрального анализа различаются для периодических и непериодических сигналов.

Периодическим называется сигнал, значение которого повторяется через определенные интервалы времени, которые называют периодом сигнала и обычно обозначают буквой T.

Простейшие периодические сигналы основаны на функциях косинуса или синуса.

$$s(t) = a\cos(\omega t), \tag{5.1}$$

где ω – круговая частота;

$$\omega = 2\pi f; \quad f = \frac{1}{T}; \quad f = \left[\frac{1}{\text{c}}\right].$$

Фурье в 20-х гг. XIX в. доказал, что любой периодический сигнал можно представить в виде разложения на гармонические (составляющие) колебания:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_1 t) + b_n\sin(n\omega_1 t)); \tag{5.2}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{T},$$

где T – период;

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt; \qquad (5.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt. \qquad (5.4)$$

Если сигнал описывается четной функцией времени, то тогда все коэффициенты b_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t). \qquad (5.5)$$

Если сигнал $s(t)$ описывается нечетной функцией времени, то тогда все коэффициенты a_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t). \qquad (5.6)$$

В общем случае, когда сигнал произвольный, используют другую, более удобную форму записи ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n);$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,;\ \varphi_n = -\mathrm{arctg}\frac{b_n}{a_n}. \qquad (5.7)$$

Формулы для нахождения a_n и b_n аналогичны формулам (5.3) и (5.4).

Это представление называют спектральным, или частотным, представлением сигнала. Спектральное представление сигнала − это постоянная составляющая ($A_0/2$) и бесконечное число гармонических составляющих (гармонических сигналов). Число n определяет порядковый номер гармоники. Каждая гармоника характеризуется амплитудой A_n, частотой $n\omega_1$ и начальной фазой φ_n. Гармоника, соответствующая $n = 1$, – это первая (основная) гармоника. Она имеет частоту, равную частоте сигнала.

Совокупность всех амплитуд гармоник A_n определяет амплитудный спектр сигнала, а совокупность всех начальных фаз называется фазовым спектром сигнала.

Спектральный анализ непериодических сигналов – это описание и исследование свойств непериодических сигналов в частотной области. Спектральный анализ непериодических сигналов проводится на основе интегральных преобразований Фурье.

Прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (5.8)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (5.9)$$

5.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными положениями спектрального анализа. Решить следующие задачи.

1 Периодический сигнал $s(t)$ с периодом T на отрезке $-T/2 \le t \le T/2$ задан выражением $s(t) = U_0\cos(\pi t/T)$. Найти выражения для коэффициентов C_n ряда Фурье этого сигнала.

2 Периодический комплексный сигнал $s(t)$ с периодом T представлен следующими выражениями:

$$s(t)=\begin{cases} 0, & -T/2<t<\tau/2; \\ A\exp(j\alpha t), & -\tau/2\le t\le \tau/2; \\ 0, & \tau/2<t<T/2, \end{cases}$$

где A, α, τ – заданные вещественные числа.

Вычислить коэффициенты C_n (n = 0, ±1, ±2, ...) ряда Фурье в комплексной форме для данного сигнала.

3 Прямоугольные видеоимпульсы положительной полярности, образующие бесконечную последовательность с периодом T, имеют амплитуду U_0. Длительность каждого импульса равна $T/3$, точка $t = 0$ совпадает с серединой импульса. Определить спектр этого сигнала, построить амплитудно-частотную и фазочастотные характеристики.

4 Периодический сигнал $s(t)$ на отрезке $-T/2 \le t \le T/2$ задан выражением $s(t) = U_0(1 - 2\,|t|/T)$. Получите выражения, определяющие коэффициенты ряда Фурье для этого колебания. Построить график частичной суммы ряда Фурье, содержащей постоянную составляющую и две гармоники низших номеров.

5 Периодический сигнал $s_{\text{пер}}(t)$ образован бесконечной последовательностью одинаковых импульсов $s_0(t)$, повторяющихся через одинаковые интервалы времени T. Найти формулу, связывающую коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала со спектральной плотностью $S_0(\omega)$ одиночного импульса $s_0(t)$.

6 Определить спектральную плотность $S(\omega)$ симметричного треугольного импульса $s(t)$.

7 Найти аналитическое выражение для амплитудного и фазового спектров периодического сигнала вида $s(t) = E \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $nT_0 - \frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4} + nT_0$, $T_0 > T$, $n = 0, \pm 1, ...$ и $s(t) = 0$ при любых других значениях t. T_0 – период сигнала $s(t)$, а T – «период» синусоиды, если бы последняя непрерывно существовала на бесконечном интервале времени.

Контрольные вопросы

1 Как определяются коэффициенты ряда Фурье?
2 Какими свойствами обладают спектры периодических сигналов?
3 Запишите выражение для спектральной плотности периодического сигнала.
4 Как определяется фазочастотная характеристика?
5 Как определить спектр непериодического сигнала?

6 Однотональная и многотональная амплитудная модуляция сигналов

6.1 Основные теоретические положения

Модуляция – это процесс изменения одного из параметров высокочастотного колебания под воздействием низкочастотного сигнала, отображающего передаваемое сообщение. Высокая частота – это гармоническое колебание (несущая) [4].

$$U_{\text{Н}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{6.1}$$

где U_m – амплитуда;
ω_0 – несущая частота;
φ_0 – начальная фаза.

При модуляции один из параметров высокочастотного колебания изменяется по закону низкочастотного сигнала $s(t)$.

Сигнал, у которого в качестве изменяемого параметра выступает амплитуда несущего колебания называется амплитудно-модулированным или сигналом с амплитудной модуляцией.

Сигнал с непрерывной амплитудной модуляцией (АМ) описывается следующим выражением:

$$u_{\text{АМ}} = U(t)\cos\omega_0 t = U_m\left[1 + k_{\text{АМ}} s(t)\right]\cos\omega_0 t, \tag{6.2}$$

где $U(t)$ – огибающая АМ-сигнала, $U(t) = U_m\left[1 + k_{\text{АМ}} s(t)\right]$;
$k_{\text{АМ}}$ – коэффициент амплитудной модуляции.

Из выражения (6.2) следует, что АМ-сигнал представляет собой произведение огибающей $U(t)$ на гармоническую функцию $\cos\omega_0 t$. Коэффициент амплитудной модуляции $k_{\text{АМ}}$ характеризует глубину модуляции и в общем случае описывается выражением

$$k_{\text{АМ}} = \frac{U_{\text{АМ}\max} - U_{\text{АМ}\min}}{U_{\text{АМ}\max} + U_{\text{АМ}\min}}. \tag{6.3}$$

Если в качестве модулирующего сигнала $s(t)$ выступает гармоническое колебание

$$s(t) = S_0 \cos\Omega t, \tag{6.4}$$

где S_0, Ω – амплитуда и частота модулирующего (управляющего) сигнала соответственно, причем $\omega_0 \gg \Omega$, то сигнал описывается выражением

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_m\left[1 + \frac{S_0}{U_0}\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t = U_m\left[1 + k_{\text{АМ}}\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t \tag{6.5}$$

и называется сигналом однотональной амплитудной модуляции.

Спектр сигнала при однотональной амплитудной модуляции описывается следующим выражением:

$$U_{\text{АМ}}\left(t\right) = U_m(1 + k_{\text{АМ}}\cos(\Omega t + \Phi)\cos(\omega_0 t + \varphi)) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0) +$$
$$+\ \frac{U_m k_{\text{АМ}}}{2}\cos((\Omega + \omega_0)t + \Phi + \varphi) + \frac{U_m k_{\text{АМ}}}{2}\cos((\omega_0 - \Omega)t - \Phi + \varphi).$$

Первое слагаемое представляет собой немодулированное колебание (несущее колебание). Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим, появившимся в результате модуляции амплитуды несущего колебания; частоты этих колебаний $\omega_{\text{н}} = \omega_0 - \Omega$ и $\omega_{\text{в}} = \omega_0 - \Omega$ называются нижней и верхней боковыми частотами, а сами составляющие – нижней и верхней боковыми составляющими. Спектр сигнала представлен на рисунке 6.1

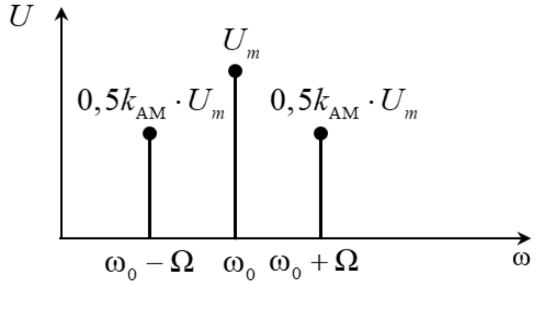

Рисунок 6.1 – Спектр АМ-сигнала

В действительности, сигнал может иметь сложный спектр и представляться в виде

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} U_n \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n)\,, \qquad (6.6)$$

где U_n – амплитуды;

ω_n – частоты.

Условие для частот: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots \omega_N << \omega_0$.

Огибающая сигнала описывается формулами

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{N} U_n \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n)\,; \qquad (6.7)$$

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{N} k_{\text{АМ}} \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right] \cos\omega_0 t\,. \qquad (6.8)$$

Спектр такого сигнала:

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_0 \cos\omega_0 t + \frac{U_0}{2} \sum_{n=1}^{N} k_{\text{АМ}0} \cos\left[(\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_n\right] +$$

$$+ \frac{U_0}{2} \sum_{n=1}^{N} k_{\text{АМ}n} \cos\left[(\omega_0 - \Omega_n)t - \varphi_n\right], \qquad (6.9)$$

где $k_{\text{АМ}n} = \dfrac{U_n}{U_0}$;

U_n и U_0 – парциальные коэффициенты амплитудной модуляции.

Спектр сигнала при многотональной модуляции представлен на рисунке 6.2.

Спектр сигнала при многотональной амплитудной модуляции отличается тем, что вместо двух боковых составляющих имеет боковые полосы по обе стороны от несущей. Верхняя боковая полоса имеет спектр, который точно повторяет спектр низкочастотного сигнала, а нижняя боковая составляющая зеркально отображена относительно несущей частоты.

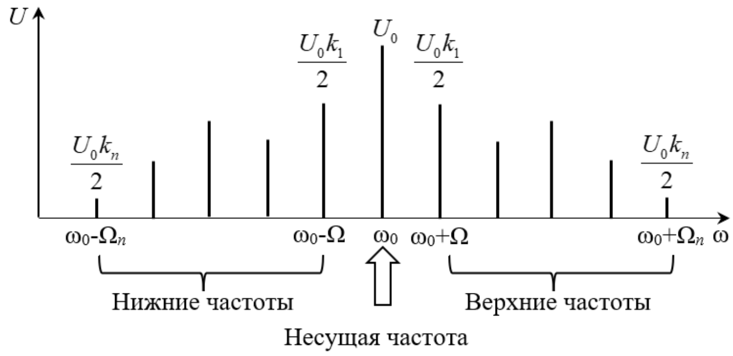

Рисунок 6.2 – Спектр сигнала при многотональной модуляции

6.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с теоретическим материалом по амплитудной однотональной и многотональной модуляции. Решить следующие задачи.

1 Амплитудно-модулированный сигнал описывается функцией $S_{\text{м}}(t) = 5\left(1 + 0{,}5\cos 3140t\right)\sin 2\pi 10^5 t$ (в вольтах). Определить глубину модуляции, частоту модулирующего сигнала, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

2 Амплитудно-модулированный сигнал (в вольтах) описывается следующим выражением: $S(t) = 12\left(1 + 0{,}6\cos\Omega t + 0{,}2\cos 2\Omega t\right)\cos\omega_0 t$. Найти наибольшее и наименьшее значения огибающей $S(t)$ данного сигнала.

3 По приведенной на рисунке 6.3 временной диаграмме однотонального АМ-сигнала определить частоту несущего сигнала.

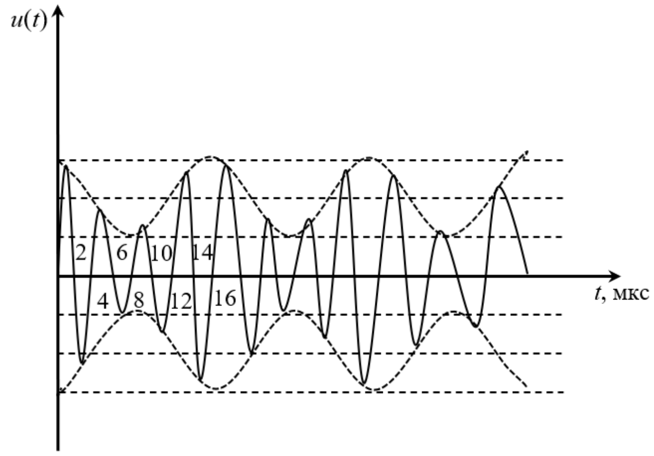

Рисунок 6.3 – Временная диаграмма однотонального АМ-сигнала

4 Математическая модель однотонального амплитудно-модулируемого сигнала определяется следующем выражением:

$$S(t) = 30\cos 1200t + 4{,}5\cos 1400t + 4{,}5\cos 1000t\,.$$

Определить коэффициент модуляции сигнала

5 Амплитудно-модулированный сигнал описывается математической функцией $S(t) = 9\left(1 + 0{,}2\cos 2160t\right)\sin 2\pi 10^3 t$. Определить глубину модуляции, частоту модулирующего сигнала, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

6 Амплитудно-модулированное колебание описывается формулой

$$s(t) = 130\left[1 + 0{,}25\cos\left(10^2 t + 30°\right) + 0{,}75\cos\left(3\cdot 10^2 t + 45°\right)\right]\cos\left(10^5 t + 60°\right).$$

Построить спектральную диаграмму этого сигнала, вычислив амплитуды и начальные фазы всех спектральных составляющих.

Контрольные вопросы

1 Что такое модуляция сигнала?

2 Как классифицируется модуляция?

3 Какими параметрами принято характеризовать глубину амплитудной модуляции?

4 От чего зависит распределение мощности в спектре однотонального АМ-сигнала?

5 Чем отличаются спектры сигналов при однотональной и многотональной амплитудной модуляции?

7 Угловая модуляция сигналов

7.1 Основные теоретические положения

Помимо амплитуды несущее колебание характеризуется также частотой ω_0 и начальной фазой φ_0 [4]:

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos\left[\omega_0 t + \varphi_0\right] = U_m \cos\Phi(t), \tag{7.1}$$

где $\Phi(t)$ – полная фаза несущего колебания, которая определяет текущее значение фазового угла.

Изменение либо ω_0, либо φ_0 в соответствии с управляющим сигналом $s(t)$ соответствует угловой модуляции. Таким образом, понятие угловой модуляции включает в себя как *частотную* (ЧМ), так и *фазовую* (ФМ) модуляцию.

При *частотной модуляции* в соответствии с управляющим сигналом изменяется мгновенная частота несущего колебания в пределах от нижней $\omega_{\text{н}}$ до $\omega_{\text{в}}$ граничных частот

$$\omega(t) = \omega_0 + \left(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}\right) s(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t). \tag{7.2}$$

Наибольшее значение частотного отклонения $\Delta\omega_{\max}$ от ω_0 называется *девиацией* частоты $\Delta\omega_{\text{д}}$: $\Delta\omega_{\text{д}} = \Delta\omega_{\max}$.

Если граничные частоты расположены симметрично относительно ω_0, то девиация частоты

$$\Delta\omega_{\text{д}} = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}. \tag{7.3}$$

Временная диаграмма сигнала при ЧМ представлена на рисунке 7.1.

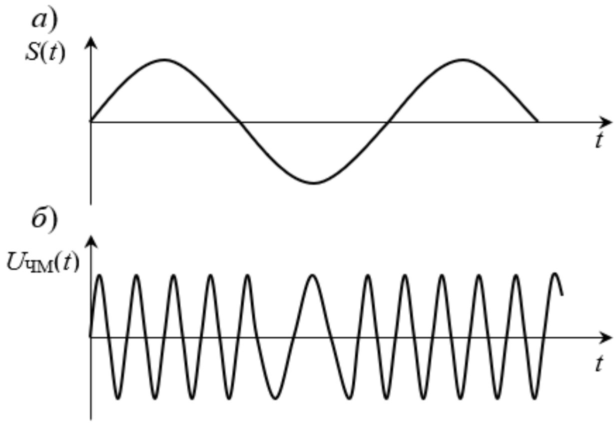

Рисунок 7.1 – Частотная модуляция сигнала

При фазовой модуляции, в соответствии с модулирующем сигналом $s(t)$, изменяется начальная фаза несущего колебания в пределах от нижнего $\varphi_н$ до верхнего $\varphi_в$ граничных значений фазы

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi s(t). \qquad (7.4)$$

Наибольшее отклонение фазового сдвига $\Delta\varphi_{max}$ от φ_0 называется *девиацией фазы* $\Delta\varphi_д$. Если $\varphi_н$ и $\varphi_в$ расположены симметрично относительно φ_0, то $\Delta\varphi_д = \varphi_в - \varphi_н$. В этом случае полная фаза сигнала с фазовой модуляцией

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_д s(t). \qquad (7.5)$$

Тогда, подставляя (7.5) в (7.1), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с фазовой модуляцией

$$u_{ФМ}(t) = U_m \cos\left[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_д s(t)\right]. \qquad (7.6)$$

7.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными характеристиками угловой модуляции. Решить следующие задачи.

1 Колебание с угловой модуляцией описывается выражением

$$s(t) = 15\cos(10^8 t + 3\sin 10^6 t + 1{,}4\sin 10^5 t + \pi / 4).$$

Найдите величину мгновенной частоты $\omega(t)$ данного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

2 Найти максимальное ω_{max} и минимальное ω_{min} значения мгновенной частоты $\omega(t)$ ЧМ-сигнала, представляемого выражением

$$s(t) = S_0(3 \cdot 10^9 t + 2\sin 10^7 t + \pi / 6).$$

3 Однотональный ЧМ-сигнал имеет несущую частоту f_0 = 50 МГц и частоту модуляции F = 7 кГц. Вычислить, в каких пределах [$f_{\min}$, $f_{\max}$] должна изменяться мгновенная частота этого колебания для того, чтобы индекс модуляции m был равен 40.

4 Получить спектральное представление сигнала с угловой модуляцией

$$s(t) = 8\cos(10^6 t + 0{,}06\sin 10^4 t).$$

5 Задано аналитическое выражение для частотно-модулированного сигнала $u(t) = 5\cos\left[2\pi 10^5 t + 6\cos(2\pi 10^2 t) + 60°\right]$. Определить индекс модуляции, практическую ширину спектра и число гармонических составляющих в пределах этой ширины.

6 Частота фазомодулированного сигнала изменяется по закону $\omega(t) = 2\pi \cdot 10^6\left(1 + 0{,}1\cos 2\pi \cdot 10^4 t\right)$ (радиан в секунду). Найти аналитическое выражение этого колебания, если его амплитуда равна 20 В.

Контрольные вопросы

1 Какие параметры сигнала изменяются при угловой модуляции?

2 Как связаны между собой частота модуляции, ее индекс и девиация частоты?

3 Что такое девиация частоты при угловой модуляции?

4 В чем заключаются сходства и различия между сигналами с частотной и фазовой модуляцией?

5 Как определить спектр сигнала при угловой модуляции?

8 Дискретизация сигналов

8.1 Основные теоретические положения

Дискретный сигнал – это информационный сигнал, который представляется в виде отдельных отсчетов, взятых по времени, но, в отличие от цифрового сигнала, не обязательно квантованных по уровню. Сигнал называется дискретным, если он может принимать лишь конечное число значений.

Математическая модель дискретного сигнала $x(t)$ – это счетное множество точек t_i (i – целое число) на оси времени, в каждом из которых определено отсчетное значение сигнала x_i (рисунок 8.1).

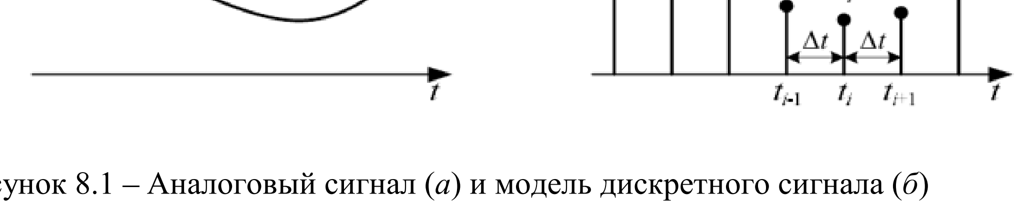

Рисунок 8.1 – Аналоговый сигнал (*а*) и модель дискретного сигнала (*б*)

Математически дискретный сигнал определяют:

– функцией дискретного времени $nT_д$: $x(nT_д) = x(t)\big|_{t=nT_д}$, n = 0, 1, 2, ..., соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные периодически повторяющиеся моменты времени;

– функцией номера выборки n: $x(n) = x(t)\big|_{T_д=1}$, в общем случае не связанной со временем;

– функцией непрерывного времени t:

$$x(t) = x(t) f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_д)\delta(t - nT_д), \qquad (8.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала $s(t)$ на дискретизирующую функцию или последовательность $f_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_д)$ в виде периодической последовательности δ импульсов с периодом, равным:

$$\delta(t - nT_д) = \begin{cases} \infty, t = nT_д; \\ 0, t \neq nT_д. \end{cases}$$

Дискретизирующая последовательность представлена на рисунке 8.2.

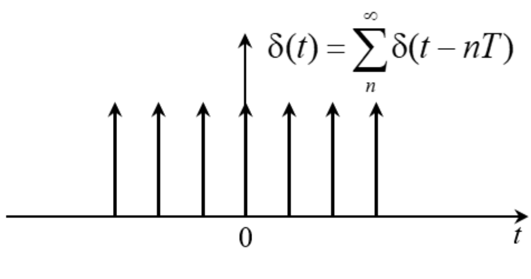

Рисунок 8.2 – Дискретизирующая последовательность

Интервал $T = n\Delta t$ называют периодом дискретизации, а обратную величину $f = \dfrac{1}{T}$ – частотой дискретизации.

Значения последовательности в моменты времени nT называют отсчетами.

Дискретизация по времени может быть равномерной и неравномерной. При равномерной дискретизации аналогового сигнала интервал между отсчетами неизменен (Δ_T = const). Равномерная дискретизация характеризуется простым алгоритмом, при ней нет необходимости регистрировать время взятия отсчета.

При неравномерной дискретизации сигнала по времени интервал между отсчетами изменяется или по случайному закону или с учетом характеристик сигнала (адаптивная дискретизация).

Шаг дискретизации Δ следует выбирать из двух условий:

1) измеряется количество отсчетов существующего сигнала;

2) по полученным цифрам отсчетов исходный сигнал должен быть восстановлен с данной точностью.

8.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными принципами дискретизации сигналов. Решить следующие задачи.

1 Экспоненциальный видеоимпульс $s(t) = S_0 \exp(-\alpha t)$ дискретизируется во времени с шагом Δ. Выбрать f_{nm} величину A таким образом, чтобы на граничной частоте $\omega_{гр} = \pi/\Delta$ модуль спектральной плотности $S_u(\omega_{гр})$ уменьшался до уровня $0{,}01 S_u(0)$.

2 Сигнал $s(t) = \sin(2\pi \cdot 100t)$ дискретизирован с шагом $T_д = 1/400$. Определить результирующую последовательность.

3 Сигнал $s(t) = \cos(4000\pi t)$ дискретизирован с шагом $T_д$ с результатом $x[n] = \cos(n\pi/3)$. Определить $T_д$.

4 Сигнал $s(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$ дискретизирован с шагом $T_д$ с результатом $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$. Определить $T_д$.

Контрольные вопросы

1 Что такое дискретизация сигнала?

2 Назовите основные виды дискретизации

3 Как выполняется равномерная дискретизация?

4 Что такое неравномерная дискретизация?

5 Как определить период дискретизации?

6 Из каких условий выбирается частота дискретизации?

9 Дискретизация сигналов. Теорема Котельникова

9.1 Основные теоретические положения

Существует ряд способов дискретизации сигналов по времени. Один из них базируется на теореме Котельникова: *произвольный сигнал s(t), спектр которого ограничен некоторой частотой $F_В$, может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, следующих с интервалом времени*

$$\Delta t = \frac{1}{2F_В}. \tag{9.1}$$

Интервал дискретизации Δt и верхнюю частоту $F_{\text{В}} = F_d$ (9.1) в теории сигналов часто называют соответственно *интервалом* (*барьером*) и *частотой Найквиста*.

Аналитически теорема Котельникова записывается следующим образом:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta_T)\frac{\sin\left[2\pi F_{\text{В}}\left(t - k\Delta_T\right)\right]}{2\pi F_{\text{В}}\left(t - k\Delta_T\right)}. \quad (9.2)$$

Простейшие сигналы вида

$$s_k(t) = \frac{\sin\left[\omega_{\text{в}}\left(t - k\Delta_T\right)\right]}{\omega_{\text{в}}\left(t - k\Delta_T\right)} \quad (9.3)$$

ортогональные на временном интервале $\left[-\infty, \infty\right]$, называют функциями отсчетов, базисными функциями, или функциями Котельникова.

График k-й функции Котельникова представлен на рисунке 9.1. Каждая базисная функция Котельникова $s_k(t)$ сдвинута относительно соседней функции или $s_{k+1}(t)$ на интервал дискретизации Δ_T. Элементарный анализ соотношения (9.3) и ее графика показывает, что сигнал $s_k(t)$ отражается известной функцией $\sin x/x$, характеризующей огибающую спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса.

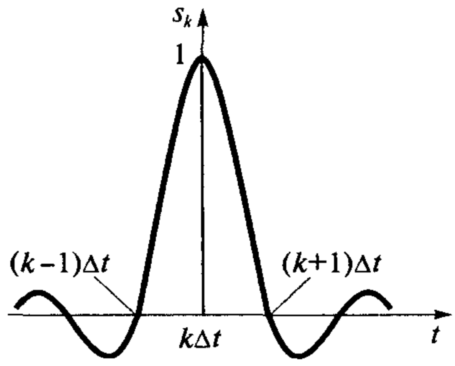

Рисунок 9.1 – График функции отсчетов

9.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными принципами дискретизации сигналов. Решить следующие задачи.

1 Аналоговый сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный верхней граничной частотой $f_{\text{в}}$ = 7,5 МГц. В некотором устройстве обработки (например, в осциллографе с памятью) проводится запись отрезка такого сигнала длительностью T = 60 мкс. Устройство осуществляет дискретизацию колебания таким образом, что длительность интервала между выборками в четыре раза короче

того значения, которое устанавливает теорема Котельникова. Каждое выборочное значение отображается 8-битовым двоичным числом. Определить величину N – объем памяти (бит), требуемую для записи данного отрезка сигнала.

2 Используя теорему Котельникова, продискретизировать сигнал $s(t) = S_0 \cos \Omega t$.

3 Дискретизированный в соответствии с теоремой Котельникова непрерывный сигнал имеет три отсчёта на временной оси (рисунок 9.2). Вычислить мгновенное значение непрерывного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

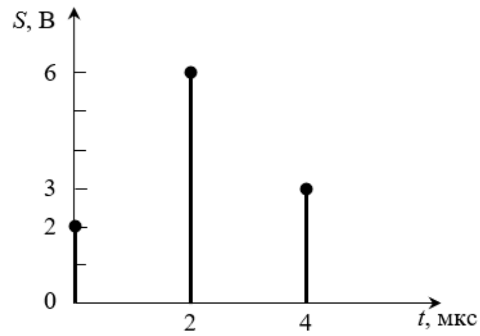

Рисунок 9.2 – Дискретный процесс x

4 По заданной выборке $\left[S(0) = 1,\ S(T) = -2,\ S(2T) = 1\right]$ восстановить аналоговый сигнал, используя ряд Котельникова.

Контрольные вопросы

1 Как получить дискретный сигнал?
2 Как определить интервал дискретизации?
3 Сформулируйте теорему Котельникова.
4 Какие ограничения накладывает на сигнал теорема Котельникова?
5 Как рассчитать число отсчетов дискретного сигнала?
6 Будет ли зависеть ошибка, возникающая при аппроксимации сигнала рядом Котельникова, от длительности отсчета и количества отсчетов?

10 Дискретное преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье

10.1 Основные теоретические положения

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) − одна из двух наиболее распространенных процедур цифровой обработки сигналов. ДПФ позволяет анализировать, преобразовывать и синтезировать сигналы такими способами, которые невозможны при непрерывной (аналоговой) обработке [5].

ДПФ – это математическая процедура, используемая для определения гармонического, или частотного, состава дискретных сигналов. Истоком ДПФ является непрерывное преобразование Фурье $S(f)$, которое определяется как

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt, \tag{10.1}$$

где $s(t)$ – некоторый непрерывный сигнал во временной области.

В области обработки непрерывных сигналов (10.1) используется для преобразования аналитического выражения для непрерывной временной функции $s(t)$ в непрерывную функцию $S(f)$ в частотной области. Последующее вычисление значений выражения $S(f)$ дает возможность определить частотный состав любого сигнала, используемого на практике, и открывает широкий спектр возможностей для анализа и обработки сигналов в физике и технике.

Пусть задана исходная последовательность N комплексных чисел (значения сигнала в N точках выборки): $x_0, x_1, ..., x_{N-1}$. Последовательность N комплексных чисел $X_0, X_1, ..., X_{N-1}$, вычисляемая из исходной по формуле

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos(2\pi nm/N)-j\sin(2\pi nm/N)\right] \tag{10.2}$$

называется дискретным преобразованием Фурье (*DFT*) исходной последовательности.

В формуле (10.2) примем следующие обозначения:

$X(m)$ – m-й компонент ДПФ, т. е. $X(0), X(1), X(2)$ и т. д;

m – индекс ДПФ в частотной области, $m=0, 1, 2, ..., N-1$;

$x(n)$ – последовательность входных отсчетов $x(0), x(1), x(2)$ и т. д;

n – временной индекс входных отсчетов, $n=0, 1, 2, ..., N-1$;

N – количество отсчетов входной последовательности и количество частотных отсчетов результата ДПФ.

Обратное дискретное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)\left[\cos(2\pi nm/N)+j\sin(2\pi nm/N)\right]. \tag{10.3}$$

***Быстрым преобразованием Фурье* (*БПФ*)** называют набор алгоритмов, реализация которых приводит к существенному уменьшению вычислительной сложности ДПФ. Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходный N-отсчетный сигнал $x(n)$ на два более коротких сигнала, ДПФ которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы получить ДПФ исходного N-отсчетного сигнала.

Идея, лежащая в основе БПФ и схематично показанная на рисунке 10.1, заключается в следующем:

– исходная N-точечная последовательность $x[n]\left(n=\overline{0,N-1}\right)$ разбивается на две более короткие $\left(N/2\right)$ – точечные последовательности $g[n]$ и $h[n]$, где $n=\overline{0,N/2-1}$;

– вычисляются ДПФ$_{N/2}$ $G[m]$ и $H[m]$ $m=\overline{0,N/2-1}$ этих последовательностей;

– из двух полученных ДПФ$_{N/2}$ $G[m]$ и $H[m]$ $m=\overline{0,N/2-1}$ конструируются ДПФ$_N$ $X[m]$ $m=\overline{0,N-1}$ исходной N-точечной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,N-1}\right)$.

Существует большое количество алгоритмов БПФ. Однако все они являются частными случаями единого алгоритма, базирующегося на задаче разбиения одного массива чисел на два.

Первый алгоритм называется **алгоритмом БПФ с прореживанием по времени**. Суть данного алгоритма состоит в следующем: (N/2)-точечная последовательность $g[n]$ $n=\overline{0,N/2-1}$ формируется из отсчетов исходной N-точечной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,N-1}\right)$ с четными номерами, а последовательность $h[n]$ $n=\overline{0,N/2-1}$ из отсчетов с нечетными номерами.

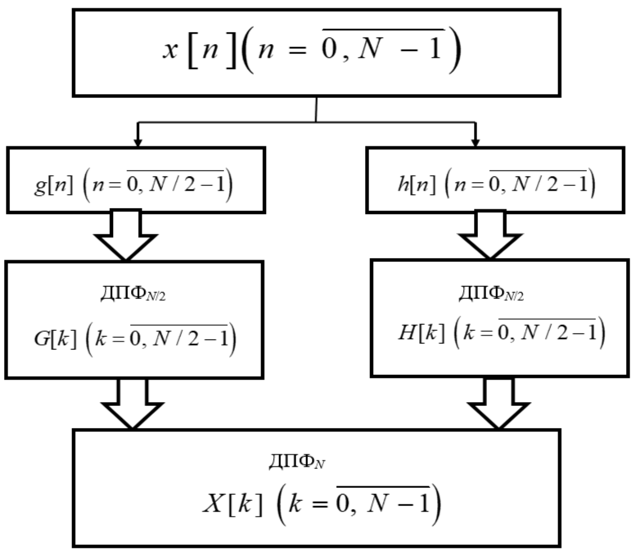

Рисунок 10.1 – Разложение ДПФ$_N$ на два ДПФ$_{N/2}$

Выражение для ДПФ$_N$ имеет следующий вид:

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x[m]W_N^{mn}=\sum_{n-\text{четное}}x[m]W_N^{mn}+\sum_{n-\text{нечетное}}x[m]W_N^{mn},$$

где W – поворачивающийся множитель, $W=\exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N}\right)$. Это вектор на комплексной плоскости.

Заменяя индексы суммирования $n=2r$ при четных n и $n=2r+1$ при нечетных n, будем иметь

$$\begin{aligned}X(m)&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]W_N^{2mr}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]W_N^{(2r+1)m}=\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r]\left(W_N^2\right)^{rm}+W_N^m\sum_{r=0}^{N/2-1}x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rm}.\end{aligned}\qquad(10.4)$$

С учетом равенства (10.3) и способа разбиения N точечной последовательности на две (N/2)-точечные, перепишем выражение (10.4) в следующем виде:

$$X(m)=\sum_{r=0}^{N/2-1}g[n]\left(W_{N/2}\right)^{nm}+W_N^m\sum_{r=0}^{N/2-1}h[n]\left(W_{N/2}\right)^{nm}.\qquad(10.5)$$

Суммы в (10.5) представляют собой (N/2)-точечные ДПФ, т. е. ДПФ$_{N/2}$:

$$\begin{cases}G(m)=\sum\limits_{r=0}^{N/2-1}g[n]\left(W_{N/2}\right)^{nm},\ m=\overline{0,N/2-1};\\H(m)=\sum\limits_{r=0}^{N/2-1}h[n]\left(W_{N/2}\right)^{nm},\ m=\overline{0,N/2-1}.\end{cases}\qquad(10.6)$$

Поэтому

$$X(m)=G(m)+W_N^mH(m).\qquad(10.7)$$

Поскольку ДПФ$_N$ $X(m)$ определено при $m=\overline{0,N-1}$, а ДПФ$_{N/2}$ $G(m)$, $H(m)$ определены лишь при $m=\overline{0,\ N/2-1}$, формулу (10.7) необходимо доопределить для $m=\overline{N/2,N/2-1}$.

Учитывая, что ДПФ$_{N/2}$ имеет периодический характер с периодом $N/2$ отсчетов, то

$$G(m) = G(m + N/2);\ H(m) = H(m + N/2). \tag{10.8}$$

Запишем выражение (10.8) в виде

$$X(m) = \begin{cases} G(m) + W_N^m H(m),\ m = \overline{0, N/2-1}; \\ G(m - N/2) + W_N^{m-N/2} H(m - N/2),\ m = \overline{N/2, N/2-1}. \end{cases} \tag{10.9}$$

Алгоритм (10.9) удобно представлять в виде направленного графа, что позволяет формализовать вычисления. На рисунке 10.2 изображен граф базовой операции БПФ с прореживанием по времени, называемой «бабочкой».

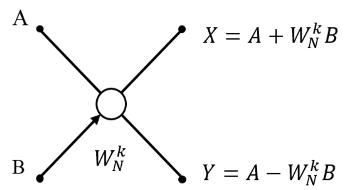

Рисунок 10.2 – Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени

Базовая операция «бабочка» ставит в соответствие двум входным (в общем случае комплексным) числам A и B два выходных числа X и Y по следующему правилу:

$$\begin{cases} X = A + W_N^m B; \\ Y = A - W_N^m B. \end{cases} \tag{10.10}$$

Белый кружок в центре «бабочки» обозначает операцию сложения/вычитания, а стрелка – операцию умножения на поворачивающий множитель W_N^m, верхний выход соответствует сумме, а нижний – разности. Правило (10.10) отвечает алгоритму (10.9) объединения двух ДПФ$_{N/2}$ в одно ДПФ$_{N/2}$, при этом используется $N/2$ «бабочек». Поскольку для каждой базовой операции необходимо выполнить одно комплексное умножение и два комплексных сложения, объединение двух ДПФ$_{N/2}$ в одно ДПФ$_N$ требует $N/2$ комплексных умножений и N комплексных сложений.

Например, на рисунке 10.3 представлен направленный граф для реализации БПФ с прореживанием по времени для последовательности, содержащей 8 отсчетов.

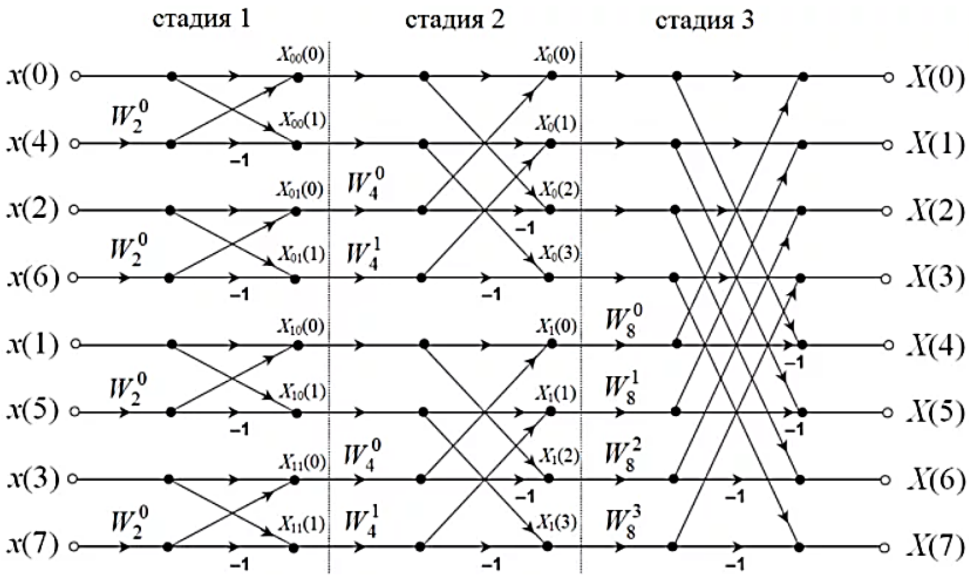

Рисунок 10.3 – Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени

Алгоритм с прореживанием по частоте. В алгоритме БПФ с прореживанием по частоте (N/2)-точечная последовательность $g(n)$ $(n = \overline{0,\ N/2-1})$ формируется из первой, а (N/2)-точечная последовательность $h(n)$ $(n = \overline{0,\ N/2-1})$ – из второй половины отсчетов исходной N-точечной последовательности $x[n]$ $(n = \overline{0,\ N-1})$.

Выражение для ДПФ$_N$ имеет следующий вид:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{mn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{mn} + W_N^{m(N/2)} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_N^{mn}. \qquad (10.11)$$

Выражение (10.11) состоит из двух сумм по N/2 слагаемых, но каждая из них не является ДПФ$_{N/2}$, так как содержит в качестве поворачивающихся множителей W_N^{kn}, а не $W_{N/2}^{kn}$.

Объединяя в (10.11) обе суммы и используя соотношение

$$W_N^{(N/2)k} = e^{-j\frac{2\pi N}{N2}k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k, \qquad (10.12)$$

получим

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ x[n] + (-1)^m x[n+N/2] \right\} W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ g[n] + (-1)^m h[n] \right\} W_N^{mn}. \qquad (10.13)$$

С учетом четности и нечетности отсчетов алгоритм БПФ с прореживанием по частоте запишется в следующем виде:

$$X\left(m\right)=\begin{cases}G(m)+H(m),\ m=\overline{0,N/2-1};\\ \left(G(m)+H(m)\right)W_N^m,\ m=\overline{0,N/2-1}.\end{cases} \qquad (10.14)$$

Базовая операция «бабочка» в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте представлена на рисунке 10.4.

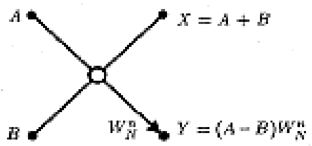

Рисунок 10.4 – Базовая операция «бабочка» алгоритма ДПФ с прореживанием по частоте

В соответствии с рисунком 10.4

$$\begin{cases}X=A+B;\\ Y=\left(A-B\right)W_N^m.\end{cases} \qquad (10.15)$$

На рисунке 10.5 представлен граф БПФ с прореживанием по частоте для последовательности из восьми отсчетов.

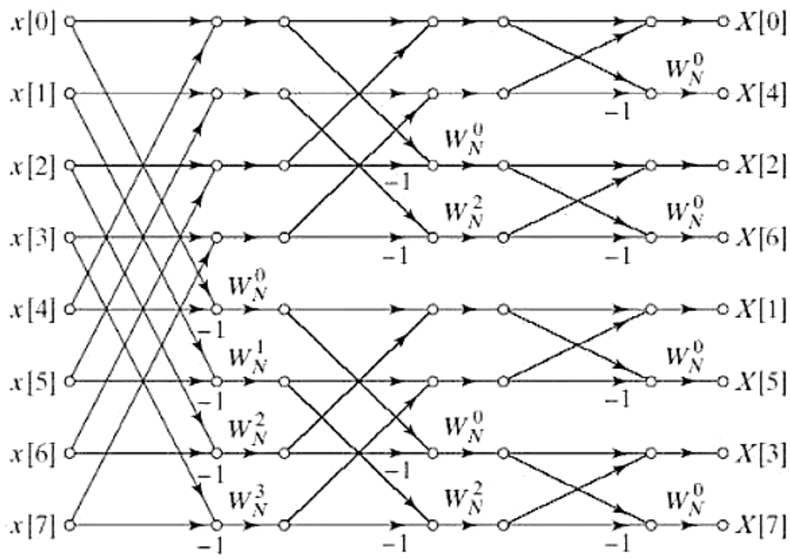

Рисунок 10.5 – Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени

10.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными теоретическими положениями, решить следующие задачи.

1 Имеется числовая последовательность, состоящая из четырех отсчетов $x = \{0,5;\ 1;\ 1;\ 0,5\}$. Используя ДПФ и БПФ найти отсчеты этой последовательности в частотной области. Сравнить вычислительные затраты на реализацию ДПФ и БПФ этой последовательности.

2 Найти последовательность, ДПФ которой описывается выражением $X[m] = \delta[m],\ m = \overline{0,\ N-1}$.

3 Определить ДПФ последовательности $x[n] = 7 - 2n,\ n = \overline{0,\ 7}$.

Контрольные вопросы

1 Что такое ДПФ?
2 Запишите формулы для прямого и обратного ДПФ.
3 Назовите основные свойства ДПФ.
4 В чем сущность алгоритмов БПФ?
5 Какие виды алгоритмов чаще всего используются на практике?
6 Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.
7 Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.

11 Модуляция дискретных сигналов

11.1 Основные теоретические положения

В настоящее время все большая часть информации, передаваемой по разнообразным каналам связи, существует в цифровом виде. Это означает, что передаче подлежит не непрерывный (аналоговый) модулирующий сигнал, а последовательность целых чисел $n_0, n_1, n_2, \ldots$, которые могут принимать значения из некоторого фиксированного конечного множества. Эти числа, называемые *символами* (symbol), поступают от источника информации с периодом *T*, а частота, соответствующая этому периоду, называется *символьной скоростью* (symbol rate): $f_T = 1/T$.

Последовательность передаваемых символов является, очевидно, дискретным сигналом. Поскольку символы принимают значения из конечного множества, этот сигнал фактически является и *квантованным,* т. е. его можно назвать *цифровым* сигналом.

Типичный подход при осуществлении передачи дискретной последовательности символов состоит в следующем. Каждому из возможных значений символа сопоставляется некоторый набор параметров несущего колебания. Эти параметры поддерживаются постоянными в течение интервала *T*, т. е. до прихода следующего символа.

Такой способ модуляции, когда параметры несущего колебания меняются скачкообразно, называется *манипуляцией* (keying) [1, 5].

Сигналы с дискретной амплитудной модуляцией. Сигналы дискретной амплитудной модуляции характеризуются тем, что амплитуда несущего колебания изменяется в соответствии с управляющим сигналом, который представляет собой последовательности импульсов, обычно прямоугольной формы. При исследовании характеристик сигналов с непрерывной модуляцией в качестве управляющего сигнала $s(t)$ рассматривался гармонический сигнал. По аналогии с этим, для сигналов с дискретной модуляцией в качестве управляющего сигнала используем периодическую последовательность прямоугольных импульсов

$$s(t) = S_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} rect(\frac{t - iT}{\tau_{\text{и}}}), \tag{11.1}$$

где

$$rect(\frac{t}{\tau_{\text{и}}}) = \begin{cases} 1 \text{ при } -\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{4}; \\ 0 \text{ при } \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \tag{11.2}$$

На рисунке 11.1 представлены эпюры управляющего сигнала $s(t)$, несущего колебания $u_{\text{нес}}(t)$ и амплитудно-манипулированного сигнала $u_{\text{АТ}}(t)$. Здесь и далее будем полагать амплитуду импульсов управляющего сигнала $s(t)$ равной $S_0 = 1$, а начальную фазу несущего колебания $\varphi_0 = 0$. Тогда сигнал с дискретной амплитудной модуляцией можно записать следующим образом

$$u_{\text{АТ}}(t) = s(t) \cdot u_{\text{нес}}(t) = U_m \cdot s(t) \cos \omega_0 t\,. \tag{11.3}$$

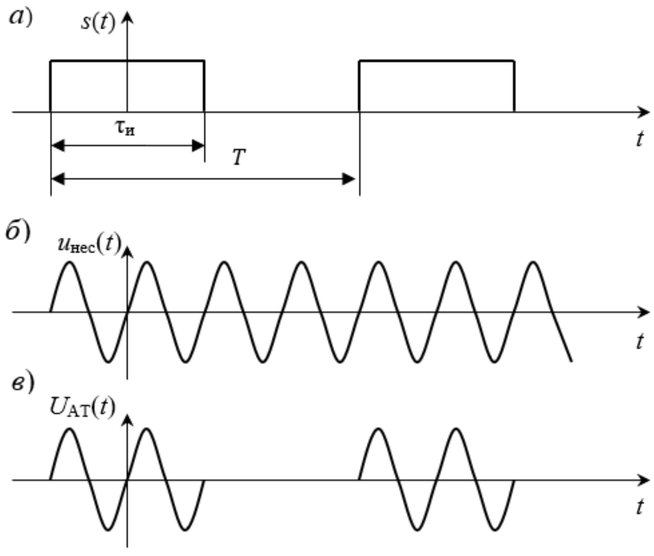

Рисунок 11.1 – Амплитудная манипуляция

Сигналы с дискретной частотной модуляцией. При анализе сигналов с дискретной угловой модуляцией удобно в качестве модулирующего сигнала $s(t)$ использовать периодическую последовательность прямоугольных импульсов вида «меандр». Тогда управляющий сигнал на интервале времени $\left(-\frac{T}{4},\frac{T}{4}\right)$ принимает значение $s(t)=-S_0$, а на интервале времени $\left(\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right)$ – значение $s(t)=S_0$, $S_0=1$.

Частотная модуляция сигнала описывается выражением

$$u_{\text{ЧМ}}(t)=U_m\cos\left[\omega_0 t+\Delta\omega_{\text{д}}\int_0^t s(t_1)dt_1+\varphi_0\right]. \tag{11.4}$$

Тогда с учётом того, что на интервале $\left(-\frac{T}{4},\frac{T}{4}\right)$ управляющий сигнал $s(t)=-1$, а на интервале $\left(\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right)$ управляющий сигнал $s(t)=1$, проведя операцию интегрирования, получим выражение сигнала ЧМ:

$$u_{\text{ЧМ}}(t)=\begin{cases} U_m\cos\left(\omega_0 t-\Delta\omega_{\text{Д}}t\right)=U_m\cos\left(\omega_0-\Delta\omega_{\text{Д}}\right)t \text{ при } -\frac{T}{4}\le t<\frac{T}{4};\\ U_m\cos\left(\omega_0 t+\Delta\omega_{\text{Д}}t\right)=U_m\cos\left(\omega_0+\Delta\omega_{\text{Д}}\right)t \text{ при } -\frac{T}{4}\le t<\frac{3T}{4}.\end{cases} \tag{11.5}$$

Сигналы с дискретной фазовой модуляцией. Сигнал с фазовой модуляцией описывается выражением

$$u_{\text{ФМ}}\left(t\right)=U_m\cdot\cos\left[\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\varphi_{\text{д}}\cdot s(t)\right], \tag{11.6}$$

где $\Delta\varphi_{\text{д}}$ – девиация фазы;

φ_0 – начальная фаза колебания несущей частоты.

Если при формировании сигнала дискретной фазовой модуляции используется периодическая последовательность прямоугольных импульсов, то выражение для сигнала дискретной фазовой модуляции принимает вид

$$u_{\text{ФТ}}(t)=\begin{cases} U_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\varphi_{\text{Д}}\right), \text{ при } -\frac{T}{4}\le t<\frac{T}{4};\\ U_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right), \text{ при } \frac{T}{4}\le t<\frac{3T}{4}.\end{cases} \tag{11.7}$$

При использовании «меандра» в качестве управляющего сигнала сигнал дискретной частотной модуляции записывается следующим образом:

$$u_{\text{ФТ}}(t) = \begin{cases} U_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \Delta\varphi_{\text{Д}}\right) \text{ при } -\dfrac{T}{4} \le t < \dfrac{T}{4}; \\ U_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_{\text{Д}}\right) \text{ при } \dfrac{T}{4} \le t < \dfrac{3T}{4}. \end{cases} \quad (11.8)$$

11.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными теоретическими положениями по модуляции цифровых сигналов. Решить следующие задачи.

1 Рассчитать и построить спектр амплитудно-манипулированного сигнала, если амплитуда носителя равна 10 В, период модулирующего сигнала $T = 50$ мкс, длительность элементарного сигнала $\tau = 50$ мс, частота носителя $F_1 = 100$ Гц, а модуляция производится однополярными импульсамис амплитудой 1 В.

2 Рассчитать и построить амплитудный и частотный спектры сигнала, если носитель описывается выражением $U_н(t) = 20\sin 400\pi t$, модулируемого видеоимпульсами $c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{5} \cos\left(40k\pi t\right)$.

3 Построить амплитудно-частотный спектр фазоманипулированного сигнала, если модуляция происходит на угол $\Delta\varphi = 90°$, амплитуда носителя – 30 В, скважность – 3, частота – 20 Гц, частота носителя – 1 кГц.

4 Синусоидальный носитель $U_н(t) = 500\sin 1000\pi t$ модулируется по фазе на угол $\Delta\varphi = 90°$. Построить амплитудный спектр ФМ-сигнала, если модулирующий сигнал имеет вид $c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{3} \cos\left(20k\pi t\right)$.

Контрольные вопросы

1 Что такое манипуляция?

2 Назовите основные виды цифровой модуляции.

3 Как описывается сигнал с дискретной амплитудной модуляцией?

4 Как определить спектр сигнала с дискретной амплитудной модуляцией? Чем он отличается от спектра аналогового АМ-сигнала?

5 Как определяется сигнал с дискретной частотной модуляцией?

6 Как определяется сигнал с дискретной фазовой модуляцией?

12 Специальные функции Хаара для оценки параметров систем обработки информации

12.1 Основные теоретические положения

В связи с развитием вычислительной техники особое значение для оценки параметров систем обработки информации приобрело использование кусочно-постоянных функций. Кусочно-постоянной функцией называется функция, область определения которой разбивается на интервалы, на каждом из которых функция постоянна. Основными среди таких функций являются функции Уолша и Хаара.

Они заданы для значений m в интервале от 0 до T (в интервале $\theta = t / T$ от 0 до 1). Любые две из этих функций взаимно ортогональны: их произведение равно нулю во всем указанном интервале, и имеются участки, для которых каждая из функций, будучи умноженной на саму себя, не равна нулю. Для того чтобы кусочно-постоянные базисные ортогональные функции могли использоваться при обработке информации, нужно, чтобы так же, как синусоиды и косинусоиды, они принимали не только положительные, но и отрицательные значения.

Функции Хаара. Систему ортогональных функций Хаара $\{\chi_n(x)\}$можно использовать в качестве базисной при разложении в неравномерно сходящийся ряд Фурье – Хаара любой непрерывной на отрезке [0,1] функции $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x) \tag{12.1}$$

с коэффициентами

$$c_n = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)dx\,. \tag{12.2}$$

При использовании функции Хаара в качестве базисных для аппроксимации сигналов $S(t)$ на отрезке [0, T] многочленами Фурье безразмерный аргумент x функции Хаара необходимо заменить на at, где коэффициент $a = \dfrac{1}{T}$ задает необходимый временный масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

В определении функции Хаара используется понятие двоичных отрезков. Отрезки, которые можно получить делением отрезка [0, 1] на 2^m равных частей, называются двоичными. Эти отрезки считываются замкнутыми слева и с открытыми справа, если их правый конец отличен от 1. Если правый конец отрезка равен 1, то отрезок считается замкнутым и справа. Таким образом, двоичные отрезки – [0, 1], [0, 1/2), [1/2, 1], [0, 1/4), [1/4, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 1], [0, 1/8). Отрезки [1/4, 3/4) или [5/8, 7/8) двоичными не считаются.

Для двоичных отрезков введем следующее обозначение:

$$l_{mj} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} \right), \tag{12.3}$$

где j меняется от 1 до 2^{m-1}, а $m = 1, 2, ...$ (конечно, при $j = 2^{m-1}$ надо считать l_{mj} замкнутым также справа).

Для каждого m выполняется $l_{m1} + l_{m2} + l_{m3} + ... + l_{m,2^{m-1}} = [0, 1]$.

Наряду с двойной нумерацией будем использовать простую нумерацию, полагая $l_{mj} = l_n$, где $n = 2^{m-1} + j$. Правда при такой нумерации $n = 2, 3, \ldots$ (отрезок с $n = 1$ отсутствует).

Левую и правую половины l_{mj} условимся обозначать l_{mj}^- и l_{mj}^+, так что $l_{mj}^- + l_{mj}^+ = l_{mj}$.

Систему функций Хаара $\{\chi_n(x)\}$ удобно строить группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\{\chi_n(x)\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$; $m = 1, 2, \ldots$, причем первая функция $\chi_1(x) = 1$ остается вне групп.

Определение функций Хаара:

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^-; \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^+; \\ 0 & \text{при } x \notin l_{mj}. \end{cases} \tag{12.4}$$

12.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основным теоретическим материалом по функциям Хаара. Решить следующую задачу.

Задача. Рассчитайте значения первых восемь коэффициентов разложения в ряд Фурье – Уолша, Хаара следующих сигналов:

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{2E}{T}t & \text{при } 0 < t < \dfrac{T}{2}; \\ \dfrac{2E}{T}\left(\dfrac{T}{2} - t\right) & \text{при } \dfrac{T}{2} < t < T; \end{cases} \qquad S(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-\alpha t}) & \text{при } 0 < t < \dfrac{T}{2}; \\ Ee^{-\alpha\left(t - \frac{T}{2}\right)} & \text{при } \dfrac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1 Дайте определение функции Хаара.

2 Какая функция Хаара $\chi_n(x)$ определена на отрезке [7/8, 1]?

3 Каким образом вычисляются коэффициенты разложения при представлении сигнала в виде суммы функций Хаара?

13 Специальные функции Уолша для оценки параметров систем обработки информации

13.1 Основные теоретические положения

Функции Уолша. Функции Уолша являются естественным расширением системы функций Радемахера, получены Уолшем в 1923 г. и представляют полную систему ортонормированных прямоугольных функций.

Множество функций Уолша, упорядоченных по частости, обычно обозначают следующим образом:

$$S_w = \{wal_w(i,t),\ i = 0,1,..N-1\}.$$

$N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ нижний индекс w показывает, что упорядочение осуществляется по Уолшу (по частости). Индекс функции i соответствует i-му элементу множества S_w. Обозначим через ν_i частость функции $wal_w(i, t)$. Для определения частости воспользуемся соотношением

$$\nu_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \dfrac{i}{2}, & i - \text{четное}; \\ \dfrac{(i+1)}{2}, & i - \text{нечетное}. \end{cases} \tag{13.1}$$

Функции Уолша, упорядоченные по частости, аналогично тригонометрическим функциям можно подразделить на четные $cal(i, t)$ и нечетные $sal(i, t)$.

$$wal_w(i, t) = \begin{cases} wal_w(2i, t) = cal(i, t); \\ wal_w(2i-1, t) = sal(i, t). \end{cases} \tag{13.2}$$

Частость каждой последующей функции Уолша больше или равняется частости предыдущей функции Уолша и имеет на одно пересечение нулевого уровня больше в открытом интервале $t \in [0, 1]$. Отсюда и следует название «упорядочение по частости».

Система функций Уолша является полной ортонормированной системой на интервале [0, 1], т. е. справедливо соотношение

$$\int_0^1 wal(k,x)wal(n,x)dx = \begin{cases} 1 \text{ при } k = n; \\ 0 \text{ при } k \neq n. \end{cases} \tag{13.3}$$

и может служить базисом для спектрального представления сигналов. Любую интегрируемую на интервале $0 \le x \le 1$ функцию, являющуюся математической моделью электрического сигнала, можно представить рядом Фурье по системе функций Уолша

$$f(x) = A(0)wal(0,x) + A(1)wal(1,x) + ... + A(i)wal(i,x) + ..., \qquad (13.4)$$

где коэффициенты $A(i)$ находятся по формуле

$$A(i) = \int_0^1 f(x)wal(i,x)dx. \qquad (13.5)$$

Здесь $x = \frac{t}{T}$ – безразмерное время, нормированное к произвольному интервалу Т.

13.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными теоретическим положениями. Решить следующую задачу.

Задача. Разложите в ряд Уолша, ограничиваясь первыми восемью функциями Уолша, функции $\sin x$, $\cos x$ и постройте их.

Контрольные вопросы

1 Дайте определение функциям Уолша.

2 Как представить сигнал с помощью функций Уолша?

Список литературы

1 **Нефёдов, С. В.** Преобразование измерительных сигналов: учебник / С. В. Нефёдов, А. П. Тарасенко, В. М. Чернова. − Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2018. − 224 с.

2 **Гадзиковский, В. И.** Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В. И. Гадзиковский − Москва: СОЛОН-Пр., 2014. − 766 с.

3 **Шахтарин, Б. И.** Обнаружение сигналов: учебное пособие / Б. И. Шахтарин. – 3-е изд., стер. − Москва: Горячая линия – Телеком, 2015. – 464 с.

4 **Баскаков, С. И.** Радиотехнические цели и сигналы / С. И. Баскаков. − 4-е изд. − Москва: Высшая школа, 2003. − 462 с.

5 **Солонина, А. И.** Основы цифровой обработки сигналов. Курс лекций: учебное пособие / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.