УДК 517.925

ПРАВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Объектом исследования является краевая задача типа [1]

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)XA_2(t) + P_1(t)XP_2(t) + Q_1(t)XQ_2(t) + R_1(t)XR_2(t) + XB(t) + F(t); \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad (2)$$

где $A_j(t)$, $P_j(t)$, $Q_j(t)$, $R_j(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы класса $C[0,\omega]$ соответствующих размерностей, $j = 1, 2$; M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы.

В предлагаемой работе, являющейся обобщением [1], задача (1) и (2) исследуется в банаховом пространстве C непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in[0,\omega]}\|X(t)\|$ на основе декомпозиции (расщепления) матрицы $B(t)$ в виде $B(t) = B_1(t) + B_2(t)$, где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются по определенной методике, например согласно [2, гл. I]. Выбор декомпозиции зависит не только от алгебраических, но и от функциональных свойств этих матриц.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, m_i = \|M_i\|, \alpha_j = \max_{t\in[0,\omega]}\|A_j(t)\|, \beta_2 = \max_{t\in[0,\omega]}\|B_2(t)\|, h = \max_{t\in[0,\omega]}\|F(t)\|,$$

$$p_j = \max_{t\in[0,\omega]}\|P_j(t)\|, q_j = \max_{t\in[0,\omega]}\|Q_j(t)\|, r_j = \max_{t\in[0,\omega]}\|R_j(t)\|, \mu_1 = \max_{t\in[0,\omega]}\|V(t)\|, \mu_2 = \max_{t\in[0,\omega]}\|V^{-1}(t)\|,$$

$$v_i = \|V_i\|, q = \gamma\mu_1\mu_2\left(\alpha_1\alpha_2 + p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 + \beta_2\right)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i, N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $\|\cdot\|$ – определённая норма матриц, например любая из норм, приведенных в [3, с. 21]; Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$dV/dt = VB_1(t). \qquad (3)$$

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим. Тогда при выполнении условия $q < 1$ задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \le N/(1-q). \qquad (4)$$

С помощью методики, используемой в [1], на основе (3) получен алгоритм

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A_1(\tau) X_{p-1}(\tau) A_2(\tau) + P_1(\tau) X_{p-1}(\tau) P_2(\tau) + Q_1(\tau) X_{p-1}(\tau) Q_2(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R_1(\tau) X_{p-1}(\tau) R_2(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad p = 1, 2, ..., \quad (5)$$

где в качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t) \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n \times m})$.

Видим, что алгоритм (5) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_1^\infty \subset C^1([0, \omega], \mathbb{R}^{n \times m})$. Доказано, что все приближения, определяемые алгоритмом (5), удовлетворяют краевому условию (2).

Установлено, что последовательность $\{X_r\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению задачи (1), (2), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q} \|X_1 - X_0\|_C, \; r = 0, 1, 2, ... \, . \quad (6)$$

На основе (6) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую алгоритмом (5),

$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \quad (7)$$

Очевидно, приближение $X_0(t) \equiv 0$ существенно упрощает не только вычисление приближений по алгоритму (5), но и оценки (4), (6) и (7), при этом

$$\|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C.$$

Оценка для $\|\mathfrak{L}(0)\|_C$ имеет вид

$$\|\mathfrak{L}(0)\|_C = \left\| \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t) \right\| \le$$

$$\le \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \int_0^\omega \|F(\tau) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|V(t)\| \le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондарев, А. Н.** Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 12. – С. 1591–1598.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

3. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

4. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.