УДК 517.925

К ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется обобщение задачи [1–3]

$$d^2X/dt^2 = A(t)\,dX/dt + dX/dt\,B(t) + C_1(t)XC_2(t) + D_1(t)XD_2(t) + F\left(t, X, dX/dt\right); \quad (1)$$

$$X(0) = M, \quad X(\omega) = N, \quad (2)$$

где $A, B, C_i, D_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right), F \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right), D = \left\{(t, X, Y) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}_1, \|Y\| < \tilde{\rho}_2\right\}$ $(Y = dX/dt)$, $i = 1,2; M, N$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что нелинейная функция $F(t,X,Y)$ удовлетворяет относительно X, Y в области D условию Липшица (локально); $0 < \tilde{\rho}_i \le \infty, I = [0, \omega]$.

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$ ($\|\cdot\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры) с помощью метода регуляризации [4] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах. Разработан итерационный алгоритм классического типа.

Рассматривается эквивалентная (1), (2) задача

$$dX/dt = Y, \quad dY/dt = A(t)Y + YB(t) + C_1(t)XC_2(t) + D_1(t)XD_2(t) + F(t, X, Y); \quad (3)$$

$$X(0) = M, \quad X(\omega) = N. \quad (4)$$

Вводятся следующие обозначения:

$$h_1 = \max_{t\in I}\left\|M + P_{UV}(t) + \mathcal{L}_1(0,0)\right\|, h_2 = \max_{t\in I}\left\|Q_{UV}(t) + \mathcal{L}_2(0,0)\right\|, h = \max_{t\in I}\left\|F(t,0,0)\right\|;$$

$$c_i = \max_{t\in I}\left\|C_i(t)\right\|, d_i = \max_{t\in I}\left\|D_i(t)\right\|, \lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|U(\tau)U^{-1}(s)\right\|, \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|V(s)V^{-1}(\tau)\right\|;$$

$$G = \left\{(t, X, Y) : t \in [0, \omega], \|X\| \le \rho_1, \|Y\| \le \rho_2\right\}; \ \tilde{G} = \left\{(X(t), Y(t)) : \|X\|_C \le \rho_1, \|Y\|_C \le \rho_2\right\};$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\omega^3(c_1c_2 + d_1d_2 + L_1), \ p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\omega^2(c_1c_2 + d_1d_2 + L_1), \ q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\omega^3L_2;$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\omega^2L_2; \ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|; \ Z = \begin{pmatrix}\|X\|_C\\ \|Y\|_C\end{pmatrix}; \ P = \begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}; \ H = \begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix};$$

$$K_U(\tau, s) = U(\tau)U^{-1}(s); \quad K_V(s, \tau) = V(s)V^{-1}(\tau),$$

где $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$, $i = 1,2$; $U(t)$, $V(t)$ – интегральные матрицы уравнений $dU/dt = A(t)U$ $(U(0) = E)$, $dV/dt = VB(t)$ $(V(0) = E)$, E – единичная матрица;

$$P_{UV}(t) = \int_0^t U(\tau)(\Phi^{-1}(N - M))V(\tau)d\tau; \quad Q_{UV}(t) = U(t)\left(\Phi^{-1}(N - M)\right)V(t);$$

Φ – линейный оператор, $\Phi Z(t)=\int_0^{\omega}U(\tau)Z(t)V(\tau)d\tau, \quad Z(t)=U^{-1}(t)Y(t)V^{-1}(t)$; $L_i=L_i(\rho_1,\rho_2)$ $(i=1,2)$ – постоянные Липшица для $F(t,X,Y)$ в области G; $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы:

$$\mathcal{L}_1(X,Y)=\int_0^t U(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\varphi}K_U(\tau,s)\big(C_1(s)X(s)C_2(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_1(s)X(s)D_2(s)+F\left(s,X(s),Y(s)\right)\big)K_V(s,\tau)ds\right)d\tau\right)V(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2(X,Y)=U(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}K_U(\tau,s)\big(C_1(s)X(s)C_2(s)+D_1(s)X(s)D_2(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+F\left(s,X(s),Y(s)\right)\big)K_V(s,\tau)ds\right)d\tau\right)V(t).$$

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим и выполнены условия $p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1\le\rho_1,\ p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2\le\rho_2,\ p_1+q_2<1.$ Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области G, при этом справедлива оценка $Z\le(E-P)^{-1}H$.

Для построения решения задачи (3), (4) используется классический метод последовательных приближений (см., например, [5, с. 606]):

$$X_m(t)=M+P_{UV}(t)+\mathcal{L}_1(X_{m-1},Y_{m-1}),\ Y_m(t)=Q_{UV}(t)+\mathcal{L}_2(X_{m-1},Y_{m-1}),\ m=1,2,..., \qquad (5)$$

где в качестве начального приближения $\left(X_0(t),Y_0(t)\right)$ принимаются произвольные матрицы-функции класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$. Все приближения удовлетворяют условиям (2).

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\left\{X_m(t),Y_m(t)\right\}_0^{\infty}$, построенной по алгоритму (5), при этом получены оценки $\tilde{Z}_m\le\left(E-P\right)^{-1}P^mZ_0,\qquad Z\le\tilde{Z}_0+\left(E-P\right)^{-1}Z_0,\qquad$ где $\tilde{Z}_0=colon\left(\|X_0\|,\|Y_0\|\right)$ $\tilde{Z}_m=colon\left(\|X-X_m\|_C,\|Y-Y_m\|_C\right)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашпар, А. И.** Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле – Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 570–583.

2. **Кашпар, А. И.** Регуляризация задачи Валле – Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н. В. Азбелева и проф. Е. Л. Тонкова. – Ижевск: УИР ИжГТУ им/ М. Т. Калашникова, 2022. – С. 64–67.

3. **Кашпар, А. И.** К разрешимости и построению решения задачи Валле – Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Еругинские чтения – 2023: тез. докл. XXI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 23–27 мая 2023 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 76–78.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

5. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.