УДК 517.5

О СТРУКТУРЕ УПРАВЛЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача управления (см., например, [1, с. 36])

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u; \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

где $A \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $Q \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times m}\right)$, $I = [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $T > 0$.

На основе применения методики [2] получены конструктивные достаточные условия управляемости системы (1) и построены в явном виде соответствующие управления и функции состояний.

Обозначения:

$$R(t) = X^{-1}(t)Q(t); \quad F(t) = R(t)R^T(t); \quad \tilde{F}(t) = \int_0^t F(\tau)d\tau;$$

$$\varphi = X^{-1}(T)x_1 - x_0; \quad \gamma = \left\|\tilde{F}^{-1}(T)\right\|; \quad \delta = 1\Big/\left(\gamma\int_0^T \|F(\tau)\|d\tau\right),$$

где $X(t)$ $\left(X(0) = E = diag(1,1,\ldots,1)\right)$ – фундаментальная матрица линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x;$$

$\|\cdot\|$ – согласованная норма матрицы, для которой $\|E\| = 1$; $(\cdot)^T$ – символ транспонирования матриц.

Далее вводится множество матриц вида

$$P(t) = E + Z(t), \tag{2}$$

где $Z \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\max\limits_{t\in I}\|Z(t)\| < \delta$.

Теорема 1. Пусть система (1) управляема на отрезке $[0, T]$. Тогда для всякой матрицы $P(t)$ вида (2) справедливо соотношение

$$\det\int_0^T F(\tau)P(\tau)d\tau \neq 0, \tag{3}$$

при этом управление $u = u(t)$ и соответствующая функция состояний имеют вид

$$u(t) = R^T(t)P(t)\left(\int_0^T F(\tau)P(\tau)d\tau\right)^{-1}\varphi; \tag{4}$$

$$x(t) = X(t)\left[x_0 + \int_0^t F(\tau)P(\tau)d\tau\left(\int_0^T F(\tau)P(\tau)d\tau\right)^{-1}\varphi\right]. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть для некоторой матрицы $P(t)$ выполняется соотношение (3). Тогда система (1) управляема, при этом имеют место формулы (4), (5).

Для иллюстрации применения приведенных результатов рассмотрена задача управления [3, с. 183], описываемая скалярным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = ax + u. \quad (6)$$

Применительно к (6) имеем $A = a$, $Q = 1$. Тогда $X(t) = e^{at}$, $R(t) = e^{-at}$, $F(t) = e^{-2at}$. Одно из возможных управлений при $Z(t) \equiv 0$ имеет вид [3]

$$u(t) = \frac{2a\varphi}{1 - e^{-2aT}}e^{-at}.$$

В случае $P = e^{2at}$ из (4) следует управление $u(t) = \dfrac{\varphi}{T}e^{at}$.

Круг возможных управлений типа (4) может быть расширен с помощью методики, используемой в [2]. Согласно [2] решение уравнения первого рода

$$\int_0^T R(\tau)u(\tau)d\tau = \varphi \quad (7)$$

отыскивается в виде

$$u(t) = R^T c + y(t), \quad (8)$$

где c – постоянный искомый вектор; $y = y(t)$ – произвольная функция. После подстановки (8) в (7) и соответствующих вычислений получено управление

$$u(t) = y(t) - R^T(t)\tilde{F}^{-1}(T)\int_0^T R(\tau)y(\tau)d\tau + R^T(t)\tilde{F}^{-1}(T)\varphi.$$

Произвол функции $y(t)$ может быть использован при решении задач оптимизации. Методы решения таких задач сравнительно хорошо разработаны в [4] (см. также библиографию в [5]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва: Наука, 1975. – 496 с.

2. **Лаптинский, В. Н.** К теории интегральных задач / В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 429–430.

3. **Ройтенберг, Я. Н.** Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – Москва: Наука, 1978. – 552 с.

4. **Моисеев, Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – Москва: Наука, 1971. – 424 с.

5. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – Москва: Наука, 1987. – 712 с.