УДК 517.927.4

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C_1(t)XC_2(t) + XB(t) + Q_1(t)X^2 +$$
$$+ XQ_2(t)X + X^2Q_3(t) + F(t,X) \equiv G(t,X); \tag{1}$$
$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,\ B,\ Q,\ C_1,\ C_2, Q_i \in C\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)(i=1,2,3)$, $F \in C\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \left\{(t,X): t\in I,\ \|X\| < \tilde\rho\right\}$ удовлетворяет относительно X локальному условию Липшица; $F(t,0) \not\equiv 0$; $I=[0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$.

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_t \|X(t)\|$ по методу регуляризации получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2). Разработан алгоритм классического типа построения решения.

Обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X):\ t\in I,\ \|X\| \le \rho\right\},\ D = \left\{X(t): \|X\|_C \le \rho\right\},\ \tilde B(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\tilde\gamma = \left\|\tilde B^{-1}(\omega)\right\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \ \beta = \max_t \|B(t)\|,\ \delta_i = \max_t \|Q_i(t)\|,\ i=1,2,3,$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|,\ \ \sigma_j = \max_t \left\|C_j(t)\right\|,\ j\ =1,2,$$

$$\varphi(\rho) = \tilde\gamma\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right)\rho^2 + \tilde\gamma\omega\left[\alpha+\sigma_1\sigma_2+L+\frac{1}{2}\beta\omega\left(\alpha+\sigma_1\sigma_2+\beta+L\right)\right]\rho +$$
$$+\ \tilde\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right),$$

$$q(\rho) = \tilde\gamma\delta\omega(\beta\omega+2)\rho + \frac{1}{2}\tilde\gamma\beta\omega^2\left(\alpha+\sigma_1\sigma_2+\beta+L\right) + \tilde\gamma\omega\left(\alpha+\sigma_1\sigma_2+L\right),$$

где $\delta = \delta_1+\delta_2+\delta_3$, $0<\rho<\tilde\rho$, $t\in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ; $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в $\mathcal{B}(n)$.

С помощью регуляризатора

$$\int_0^{\omega} X(\tau)B(\tau)d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^{t}\left(dX(\tau)\right)\left(\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right) + \int_t^{\omega}\left(dX(\tau)\right)\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)$$

установлено, что при выполнении условия

$$\det\tilde{B}(\omega) \neq 0 \tag{3}$$

задача (1), (2) эквивалентна матричному интегральному уравнению

$$X(t) = \left\{\int_0^{t} G\left(\tau, X(\tau)\right)\left(\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \int_t^{\omega} G\left(\tau, X(\tau)\right)\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \right.$$
$$\left. -\int_0^{\omega}\left[G\left(\tau, X(\tau)\right) - X(\tau)B(\tau)\right]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega). \tag{4}$$

На основе принципа сжимающих отображений Каччопполи – Банаха доказано, что при выполнении условия (3) и неравенств

$$\varphi(\rho) \leq \rho,$$
$$q(\rho) < 1$$

задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_{ρ}, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho)$.

Для построения решения интегрального уравнения (4) используется классический метод последовательных приближений:

$$X_{k+1}(t) = \int_0^{\omega} G\left(\tau, X_k(\tau)\right)K(t,\tau)d\tau - \int_0^{\omega}\left[A(\tau)X_k(\tau) + C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau) + \right.$$
$$+ Q_1(\tau)X_k^2(\tau) + X_k(\tau)Q_2(\tau)X_k(\tau) + X_k^2(\tau)Q_3(\tau) +$$
$$\left. + F\left(\tau, X_k(\tau)\right)\right]d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega),\ \ k = 0,1,2,\dots\ , \tag{5}$$

где $X_0(t) \equiv 0$,

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^{\tau} B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega),\ 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_{\tau}^{\omega} B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega),\ 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (5), при этом получены оценки

$$\|X - X_k\|_C \leq \frac{q^k}{1-q}\|X_1\|_C,\ k = 1,2,\dots,$$
$$\|X\|_C \leq \frac{\|X_1\|_C}{1-q}.$$