УДК 517.927.4

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется обобщение краевой задачи [1]

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+XB(t)+C_1(t)XC_2(t)+$$
$$+D_1(t)XD_2(t)+S_1(t)XS_2(t)+F(t,X),\ X\in\mathbb{R}^{n\times n}; \tag{1}$$
$$MX(0)+NX(\omega)=0, \tag{2}$$

где $A,B,C_i,D_i,S_i\ (i=1,2)\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F\in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$, M,N – вещественные $(n\times n)$-матрицы, $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde\rho}=\{(t,X):t\in I,\|X\|<\tilde\rho\}$, $0<\tilde\rho\le\infty$; нелинейная функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0)\not\equiv 0$.

Эта задача изучается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C=\max_t\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Предлагаемая работа является развитием и обобщением [1]. С помощью метода регуляризации получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах, а также разработан алгоритм построения решения и дана оценка его области локализации.

Приняты обозначения:

$$D_\rho=\{(t,X):t\in I,\|X\|\le\rho\};\ \lambda_1=\max_t\|U(t)\|;\ \lambda_2=\max_t\|U^{-1}(t)\|;\ \mu_1=\max_t\|V(t)\|;$$
$$\mu_2=\max_t\|V^{-1}(t)\|;\ c_i=\max_t\|C_i(t)\|, d_i=\max_t\|D_i(t)\|, s_i=\max_t\|S_i(t)\|\ (i=1,2);$$
$$P=U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ Q=-V(\omega),\ \gamma=\|\Phi^{-1}\|,\ m=\max\{\|P\|,\|Q\|\},\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$
$$G(t,X(t))=C_1(t)X(t)C_2(t)+D_1(t)X(t)D_2(t)+S_1(t)X(t)S_2(t)+F(t,X(t));$$
$$q=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega(c_1c_2+d_1d_2+s_1s_2+L);\ p=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega h,$$

где $t\in I$; $0<\rho<\tilde\rho$; $\lambda_0=\lambda_1\lambda_2$; $\mu_0=\mu_1\mu_2$; Φ – линейный матричный оператор; $\Phi X=PX-XQ$; $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в D_ρ; $U(t)$, $V(t)$ – решения соответственно уравнений $dU/dt=A(t)U$, $dV/dt=VB(t)$.

Доказано, что в случае, когда

1) $\det N\ne 0$;

2) матрицы P,Q не имеют общих характеристических чисел, задача (1), (2)

эквивалентна интегральной задаче

$$X(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)G(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)G(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)Q\right]\right\}V(t). \qquad (3)$$

С помощью принципа сжимающих отображений Каччопполи – Банаха получена следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия 1), 2), а также неравенства

3) $q<1$;

4) $p/(1-q)\le\rho$.

Тогда решение задачи (1), (2) существует и единственно в области D_ρ.

Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C\le p/(1-q)$.

Решение интегрального уравнения (3) строится классическим методом:

$$X_{k+1}(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)G(\tau,X_k(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t),\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (4)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащая шару $\|X\|_C\le\rho$. Для приближений справедливы оценки $\|X_i\|_C\le\rho\ (i=1,2,\ldots)$. Это нетрудно установить индукцией по k и на основании условия 4).

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (4), при этом получена оценка

$$\|X_k-X\|_C\le q^k\frac{\|X_1-X_0\|_C}{1-q},\ k=0,1,\ 2,\ \ldots .$$

Замечание. В [2] краевая задача (1), (2) качественными методами изучается в области $I\times\mathbb{R}^{n\times n}$. Теорема, приведенная в предлагаемой работе, очевидно, эффективнее соответствующей теоремы из [2], поскольку получена для области более общей конфигурации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.

2. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – 167. – P. 505–515.