

УДК 533.6

К ПРИБЛИЖЕННОМУ АНАЛИТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФОЛКНЕРА – СКЭН

А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Задача о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае описывается соотношениями Фолкнера – Скэн [1, с. 160; 2, с. 177]

$$f''' + a f f'' + b(1 - f'^2) = 0; \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

где $f' = df(\eta)/d\eta$, $a = (m+1)/2$, $b = m$; m – параметр, характеризующий скорость $U(x) = U_0 x^m$ внешнего течения, при этом, согласно [1, 2], $0 \leq m \leq 1$.

Так как эта задача не имеет точного аналитического решения (см. библиографию, например, в [3]), то построение приближенных решений является целесообразным с точки зрения возможных приложений [1, 2]. Такие решения позволяют изучить влияние физических параметров на формирование пограничного слоя.

Одно из эффективных (в смысле точности [1, 2]) приближенных аналитических решений, приведенных в [4], имеет вид

$$f(\eta, m) = \begin{cases} \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, & m \in \left[0, \frac{1}{3} \right); \\ \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(6 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^4 - 2b^2 \right) \frac{\tau^4}{4!} \right) \right) d\tau, & m \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right]. \end{cases}$$

При $m \in [0, 1/3)$ значения $\lambda = f''(0, m) \equiv \lambda(m)$ вычисляются из уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau - 1 = 0,$$

а при $m \in [1/3, 1]$ – из уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} + \left(6 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^4 - 2b^2 \right) \frac{\tau^4}{4!} \right) \right) d\tau - 1 = 0.$$

Верхний предел в несобственных интегралах принимают равным 8,8 [1, 2].

В данной работе, являющейся продолжением и дополнением к [4], получена аппроксимация для параметра $\lambda = \lambda(m)$, играющего важную роль в теории динамического ламинарного пограничного слоя. Этот параметр связан с вычислением касательного напряжения (см., например, [1, 2])

$$\lambda(m) = \begin{cases} a_0 + a_1 m + a_2 m^2, & a_0 = 0,33531, a_1 = 1,72212, a_2 = -1,38428, m \in [0, 1/3]; \\ b_0 + b_1 m + b_2 m^2, & b_0 = 0,43914, b_1 = 1,04461, b_2 = -0,25214, m \in [1/3, 1]. \end{cases} \quad (3)$$

График этой функции изображен на рис. 1.

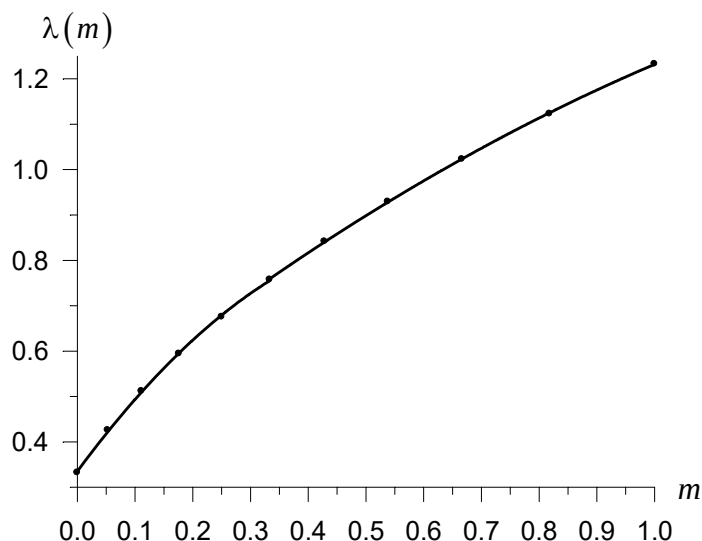


Рис. 1. График функции $\lambda(m)$: точки соответствуют точным численным значениям λ , а сплошная линия – приближению (3)

Для функции $\lambda(m)$ справедлива двусторонняя оценка $a_0 \leq \lambda(m) \leq b_0 + b_1 + b_2$, т. е. $0,33531 \leq \lambda(m) \leq 1,23161$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
2. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва: Высшая школа, 1979. – 495 с.
3. Khidir, A. A note on the solution of general Falkner – Skan problem by two novel semi-analytical techniques / A. Khidir // Propulsion and Power Research. – 2015. – Vol. 4, iss. 4. – P. 212–220.
4. Лаптинский, В. Н. К аналитическому решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Сарапул, 19–21 мая 2022 г. – Сарапул: СПИ, 2022. – С. 55–59.