

УДК 621.831

П. Н. Громыко, С. Н. Хатетовский, И. В. Трусов, Р. А. Калентиюнок  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет», Могилёв

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПРЕЦЕССИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЗУБЬЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЕЁ МОНТАЖА

Рассмотрена методика определения кинематической точности прецессионной передачи, которая нечувствительна к погрешностям монтажа в определённых пределах. Совмещение в прецессионной передаче со сферическими зубьями редуцирующей функции с функцией компенсирующей муфты позволяет снизить требования к точности монтажа в приводе при сохранении эксплуатационных показателей.

**Ключевые слова:** кинематическая точность, прецессионная передача, нечувствительность к погрешностям монтажа, сферические зубья.

**Введение.** Несмотря на возросшую роль безредукторного привода в современной технике, редукторы по-прежнему находят широкое применение там, где необходимо передавать значительные крутящие моменты при относительно низких габаритах и массе привода.

При монтаже редуктора всегда существовала проблема соединения его выходного вала с валом рабочего органа привода. Решением данной проблемы, не без ущерба для показателей качества работы привода и массогабаритных показателей, обычно является использование компенсирующих муфт.

Другой путь решения указанной выше проблемы связан с возможностью использования в редукторе такой передачи, которая была бы нечувствительна к погрешностям её изготовления и монтажа [1], т. е. дополнительно выполняла бы роль компенсирующей муфты. Одной из таких передач — прецессионной передаче со сферическими зубьями — и посвящена настоящая работа.

Следует оговориться, что под нечувствительностью к погрешностям изготовления и монтажа здесь понимается, прежде всего, обеспечение заданной кинематической точности рассматриваемой передачи при относительном смещении осей вращения её входного и выходного валов.

Прецессионная передача, в зацеплении которой контактируют цилиндрические ролики, оси которых параллельны оси входного вала, и бочкообразные зубья сателлита, к настоящему времени нашла своё применение в приводах различных машин и механизмов [2]. С целью обеспечить нечувствительность прецессионной передачи к погрешностям изготовления и монтажа было предложено использовать в зацеплении зубья сферической формы [3]. Рассмотрим структурную схему варианта прецессионной передачи с центральным колесом с зубьями, выполненными в виде радиально расположенных роликов, имеющих на конце полусферы (рисунок 1).

Прецессионная передача со сферическими зубьями содержит корпус 1, входной вал 2, косую втулку 3, сателлит 4, сферический подшипник 5, неподвижное центральное колесо 6, внутренний зубчатый венец которого выполнен в виде радиальных роликов 7. Контактующая с наружными зубьями сателлита 4 поверхность радиальных роликов 7 выполнена в виде полусферы. Сателлит 4 жёстко соединен с кольцом 8, имеющим на внутренней поверхности зубчатый венец, который выполнен в виде радиально расположенных по его периметру роликов 9. Радиальные ролики 9 имеют поверхности в виде полусфер, которые контактируют с наружным зубчатым венцом, выполненным на выходном валу (валу привода) 10. Вал привода 10 составляет вращательную пару посредством подшипников 11 с корпусом привода 12. Корпус передачи 1 жёстко крепится к корпусу привода 12 посредством болтов 13.

При креплении корпуса привода 12 к корпусу редуктора 1 из-за погрешностей изготовления и монтажа возникает несоосность осей входного 2 и выходного 10 валов передачи.

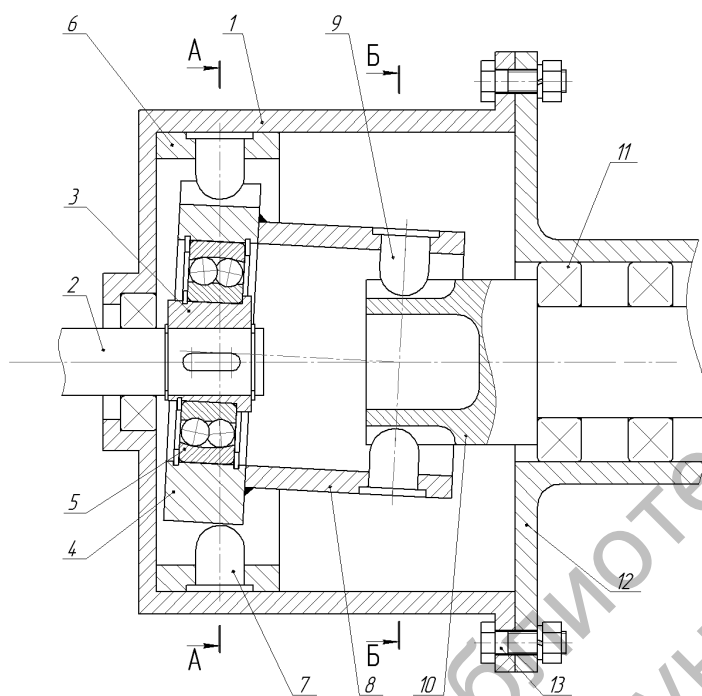


Рисунок 1. — Схема прецессионного редуктора

В дальнейшем изложении обосновывается, что благодаря сферическим поверхностям радиальных пальцев 7 минимизируется влияние погрешности, вызванной несоосностью указанных валов, на кинематическую точность предлагаемого варианта прецессионной передачи.

**Математическая модель прецессионной передачи.** Обратимся к структурной схеме прецессионной передачи со сферическими зубьями (рисунок 2).

Центр прецессии в случае погрешности  $s$ , вызванной несоосностью валов, может смещаться из положения  $O$  в положение  $A$ . Свяжем с точкой  $O$  начало неподвижной системы координат  $XYZ$ . Координаты точки  $A$  относительно этой системы координат определяются как  $x_A = 0$ ;  $y_A = s$ ;  $z_A = 0$ . Координаты точки  $B$ , фиксирующей положение сферического подшипника на оси наклонного кривошипа, в системе  $XYZ$  определяются следующим образом (рисунок 3):

$$x_B = -e \cdot \sin(\varphi_{кр}); \quad y_B = e \cdot \cos(\varphi_{кр}); \quad z_B = \frac{e}{\operatorname{tg}(\theta)},$$

где  $e$  — величина эксцентриситета кривошипа в сечении, проходящем через точку  $B$ ;

$\varphi_{кр}$  — угол поворота кривошипа;

$\theta$  — угол нутации.

Ось вращения сателлита в случае отсутствия несоосности осей валов совпадает с осью наклонной части кривошипа. Однако при наличии указанной несоосности оси имеют разное расположение в пространстве. Определим расположение оси вращения сателлита относительно неподвижной системы координат при помощи вектора  $\vec{AB}$  с модулем

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\left\{ -e \cdot \sin(\varphi_{кр})^2 + \left[ e \cdot \cos(\varphi_{кр}) - s \right]^2 \right\} + \left( \frac{e}{\operatorname{tg}(\theta)} \right)^2} =$$

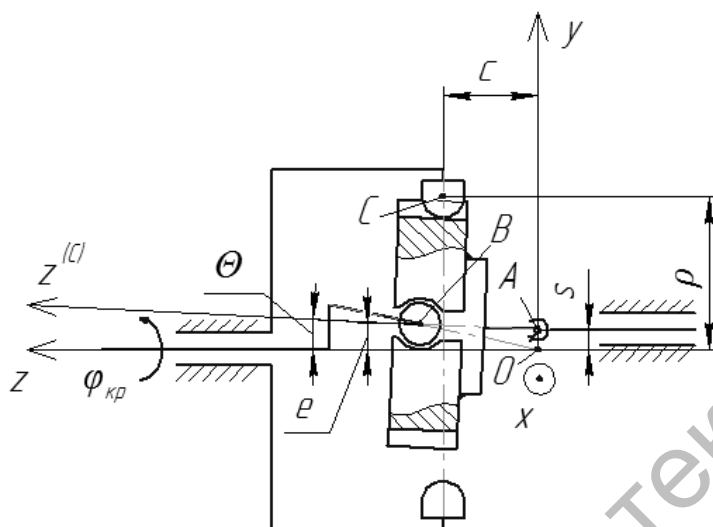


Рисунок 2. — Кинематическая схема прецессионной передачи

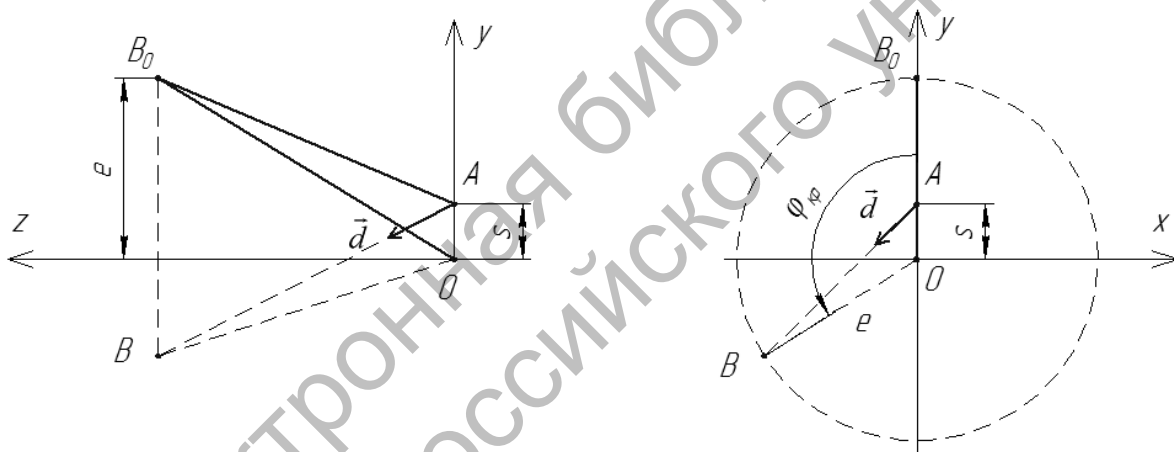


Рисунок 3. — К определению положения наклонной части кривошипа

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{e^2 \cdot \sin^2(\varphi_{кр}) + e^2 \cdot \cos^2(\varphi_{кр}) + s^2 - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр}) + \left(\frac{e}{\operatorname{tg}(\theta)}\right)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{\{e^2 \cdot [\sin^2(\varphi_{кр}) + \cos^2(\varphi_{кр})] + s^2 - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр})\} \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + e^2}}{\operatorname{tg}(\theta)} = \\
 &= \frac{\sqrt{[(e^2 + s^2) - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр})] \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + e^2}}{\operatorname{tg}(\theta)}.
 \end{aligned}$$

Определим направляющие косинусы указанного вектора:

$$d_x = -\frac{e \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot \sin(\varphi_{кр})}{\sqrt{[(e^2 + s^2) - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр})] \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + e^2}};$$

$$d_y = \frac{[e \cdot \cos(\varphi_{кр}) - s] \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{\sqrt{[(e^2 + s^2) - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр})] \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + e^2}};$$

$$d_z = \frac{e}{\sqrt{[(e^2 + s^2) - 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi_{кр})] \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + e^2}}.$$

На основе полученных зависимостей определяем положение центра  $C$  сферического пальца в системе координат, жёстко связанной с спутником (см. рисунок 2).

Для этого сначала установим координаты точки  $C$  относительно неподвижной системы координат  $XYZ$ :  $x_c = 0$ ;  $y_c = \rho$ ;  $z_c = c$ , где  $\rho$  — радиус окружности, на которой располагается центр сферического пальца;  $c$  — расстояние по оси  $Z$  от центра сферического пальца до точки прецессии, и запишем их в виде матрицы:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \\ c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Переход от неподвижной системы координат к системе координат, жёстко связанной с спутником, выполним путём матричного преобразования:

$$M_c^{(c)} = \begin{bmatrix} x_c^{(c)} \\ y_c^{(c)} \\ z_c^{(c)} \\ 1 \end{bmatrix} = T_4 \times T_3 \times T_2 \times T_1 \times M_c,$$

где  $T_1, T_2, T_3, T_4$  — матрицы элементарных преобразований, рассмотренные ниже.

Для учёта несоосности осей входного и выходного валов передачи (рисунок 4) осуществим переход к системе координат  $X^{(1)}Y^{(1)}Z^{(1)}$ :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учёт несовпадения оси  $z^{(1)}$  с осью  $z^{(c)}$  вращения спутника, с которой совмещён вектор  $\dot{d}$  (рисунки 5 и 6), осуществляется последовательным переходом к системам координат  $X^{(2)}Y^{(2)}Z^{(2)}$  и  $X^{(3)}Y^{(3)}Z^{(3)}$ :

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 & 0 \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

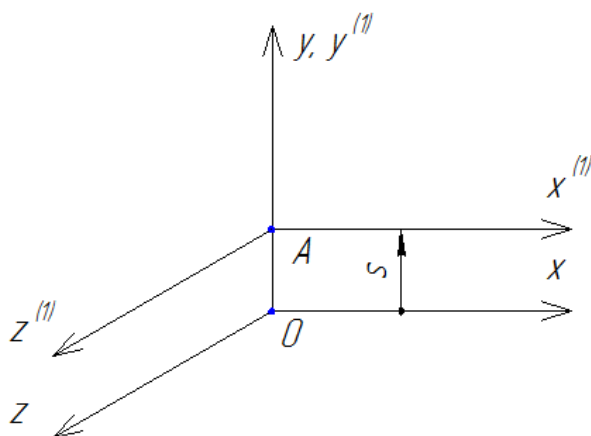


Рисунок 4. — К определению матрицы  $T_1$

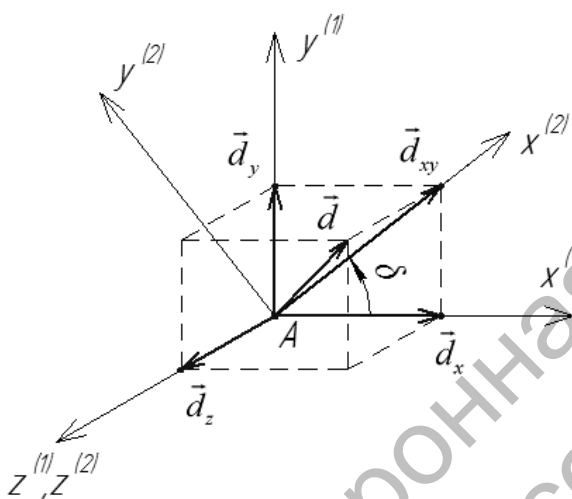


Рисунок 5. — К определению матрицы  $T_2$

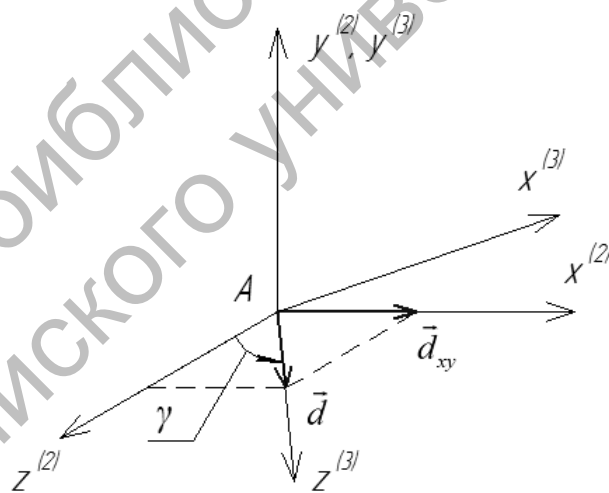


Рисунок 6. — К определению матрицы  $T_3$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\cos(\gamma) = d_z;$$

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1 - d_z^2};$$

$$\cos(\delta) = \frac{d_y}{\sqrt{1 - d_z^2}};$$

$$\sin(\delta) = -\frac{d_x}{\sqrt{1 - d_z^2}}.$$

Поворот сателлита относительно кривошипа (рисунок 7) может быть осуществлён с помощью перехода к системе координат  $X^{(c)}Y^{(c)}Z^{(c)}$ , жёстко связанной с сателлитом:

$$T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_c) & \sin(\varphi_c) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi_c) & \cos(\varphi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\varphi_c$  — угол поворота сателлита.

**Методика определения кинематической точности.** Угол поворота сателлита  $\varphi_c$  при отсутствии несоосности связан с углом поворота кривошипа следующим выражением:

$$\varphi_c = u \cdot \varphi_{кр},$$

где  $u$  — передаточное отношение, которое при разности между количеством роликов и числом зубьев сателлита, равной 1, будет определяться числом зубьев сателлита.

При этом траектория точки  $C$  в системе координат сателлита будет известна (рисунок 8).

Угол поворота сателлита  $\varphi'_c$ , при наличии несоосности в прецессионной передаче, определяется, исходя из условия контакта сферической поверхности радиальных роликов с центром  $C'$  и зубьев сателлита (см. рисунок 8).

Профиль зубьев сателлита в предлагаемом варианте прецессионной передачи, исходя из соображений технологичности, выполнен в виде окружности с центром в точке  $A$ . Любое сечение сферической поверхности радиального ролика, проходящее через центр сферы, будет являться окружностью. Эти окружности могут соприкасаться в некоторой точке  $M$  только тогда, когда их центры  $A$  и  $C'$  отстоят друг от друга на разницу радиусов  $AC' = r_c - r$ . Координаты точки  $A$  заданы, а координаты точки  $C'$  можно определить при помощи ЭВМ численным методом, исходя из условия

$$\begin{cases} r_c - r = \sqrt{(x_A - x_{C'}^{(c)})^2 + (y_A - y_{C'}^{(c)})^2} \\ M_{C'}^{(c)} = \begin{bmatrix} x_{C'}^{(c)} \\ y_{C'}^{(c)} \\ z_{C'}^{(c)} \\ 1 \end{bmatrix} = T_4' \times T_3 \times T_2 \times T_1 \times M_c \end{cases},$$

где  $x_{C'}^{(c)}$ ,  $y_{C'}^{(c)}$  и  $z_{C'}^{(c)}$  — координаты точки  $C'$ ;

$$T_4' = \begin{bmatrix} \cos(\varphi'_c) & \sin(\varphi'_c) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi'_c) & \cos(\varphi'_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, координаты  $x_{C'}^{(c)}$ ,  $y_{C'}^{(c)}$  и  $z_{C'}^{(c)}$  зависят от угла  $\varphi'_c$ , который и определяется, исходя из вышеуказанного условия.

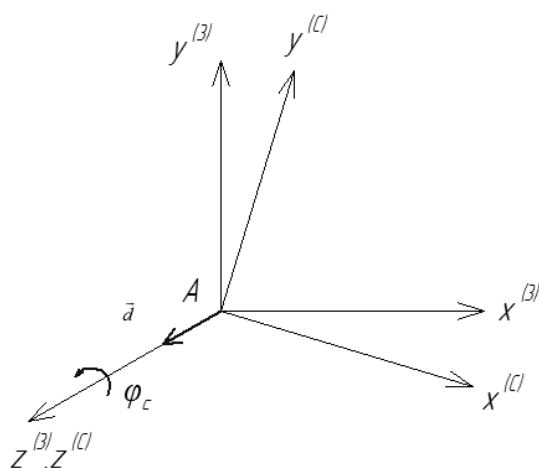
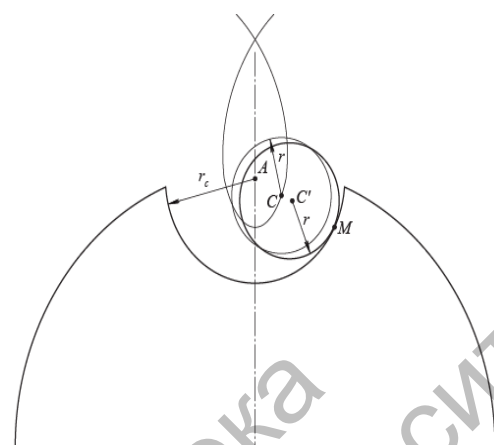
Рисунок 7. — К определению матрицы  $T_4$ 

Рисунок 8. — Схема контакта ролика со сферическим концом и зуба спутника

Кинематическая погрешность прецессионной передачи выражается разностью углов поворота спутника относительно кривошипа при отсутствии несоосности валов и при её наличии, т. е.  $\Phi_c - \Phi'_c$ .

**Заключение.** На основе предложенной методики была определена кинематическая точность рассматриваемого варианта прецессионной передачи, на базе которой был разработан редуктор, прошедший эксплуатационные испытания в составе привода ковшового элеватора зерносушильного комплекса ОАО «Экспериментальная база Дашковка». Было установлено, что кинематическая точность при наличии погрешностей монтажа не превысила значений, допускаемых техническим заданием.

#### Список цитируемых источников

1. Солдаткин Е. П. Зубчатая передача с переменным углом между осями колёс // Вестник машиностроения. 1962. № 7. С. 24—26. ; Коростелев Л. В. Образование зубчатых передач с переменным расположением осей колёс // Машиностроение. 1972. № 4. С. 46—49. ; Ясько В. В. Синтез зубчатых зацеплений, нечувствительных к погрешностям монтажа // Известия высших учебных заведений. 1968. № 8. С. 21—24. ; Хатетовский С. Н., Гуляев К. К. Перспективы развития зубчатых передач, нечувствительных к погрешностям монтажа // Вестник Белорусско-Российского университета. 2014. № 3. С. 88—95.
2. Скойбеда А. Т., Громыко П. Н. Коническо-цилиндрические прецессионные редукторы. Минск : БГПА, 2001. 187 с. ; Планетарные прецессионные передачи (ППП). Кинематический, силовой и технологические аспекты их создания / П. Н. Громыко [и др.] ; под общ. ред. А. Т. Скойбеда. Минск : БГПА, 2000. 252 с. ; Компьютерное моделирование планетарных прецессионных передач : моногр. / П. Н. Громыко [и др.] ; под общ. ред. П. Н. Громыко. Могилёв : Белорус.-Рос. ун-т, 2007. 271 с. : ил.
3. Планетарная прецессионная передача : пат. 14938 МПК F 16H 1/32. Респ. Беларусь, № а 20091553 ; заявл. 02.11.09 ; опубл. 30.06.11, Афц. бюл. Нац. центра інтэлектуал. уласнасці. 4 с.

Special geometry of teeth of precessional transmission makes possible to realize the computation of kinematic accuracy if there are assembly errors by means of matrix kinematic.

**Key words:** kinematic accuracy, precessional transmission, insensitivity to assembly errors, spherical teeth.