

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов направления подготовки  
15.03.03 «Прикладная механика»  
очной формы обучения*



Могилев 2024

УДК 621.9.04  
ББК 34,5  
Т38

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «б» марта 2024 г.,  
протокол № 8

Составители: канд. техн. наук, доц. В. Л. Комар;  
ст. преподаватель М. В. Дроздова

Рецензент ст. преподаватель О. А. Пономарева

Изложены цель, задачи, содержание и порядок выполнения практических  
занятий.

Учебное издание

## ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Ответственный за выпуск	А. П. Прудников
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2024

## Содержание

Введение.....	4
1 Практическое занятие № 1. Структура плоских и пространственных механизмов.....	5
2 Практическое занятие № 2. Структурный анализ плоских механизмов.....	9
3 Практическое занятие № 3. Построение планов скоростей.....	11
4 Практическое занятие № 4. Построение планов ускорений рычажных механизмов.....	14
5 Практическое занятие № 5. Расчет сил инерции. Метод Жуковского .....	15
6 Практическое занятие № 6. Силовой анализ механизмов методом планов сил.....	17
7 Практическое занятие № 7. Аналитический расчет планетарных механизмов .....	22
8 Практическое занятие № 8. Определение угловых скоростей и ускорений звеньев.....	23
9 Практическое занятие № 9. Метод кинематических диаграмм .....	25
10 Практическое занятие № 10. Определение уравновешивающей силы методом Жуковского .....	28
11 Практическое занятие № 11. Кинематический анализ зубчатых механизмов.....	30
12 Практическое занятие № 12. Графический метод кинематического анализа комбинированных зубчатых механизмов.....	31
13 Практическое занятие № 13. Синтез зубчатых механизмов.....	33
14 Практическое занятие № 14. Синтез планетарных механизмов. ....	35
15 Практическое занятие № 15. Анализ и синтез кулачковых механизмов.....	36
16 Практическое занятие № 16. Расчет геометрии зубчатых колес .....	40
17 Практическое занятие № 17. Построение картины эвольвентного зацепления.....	45
Список литературы .....	47

## Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по курсу «Теория механизмов и машин» (ТММ) для студентов направления подготовки 15.03.03 «Прикладная механика» очной формы обучения.

Целью данных методических рекомендаций является формирование у студентов навыков изучения конструкций, принципа работы, основных геометрических параметров объектов, изучаемых дисциплиной «Теория механизмов и машин», а также порядок их анализа.

Теория механизмов и машин – это общеинженерная дисциплина, играющая роль связующего звена между циклами общенаучных и специальных дисциплин. Совместно с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она образует группу предметов, закладывающих фундамент инженерного образования машиностроительного профиля.

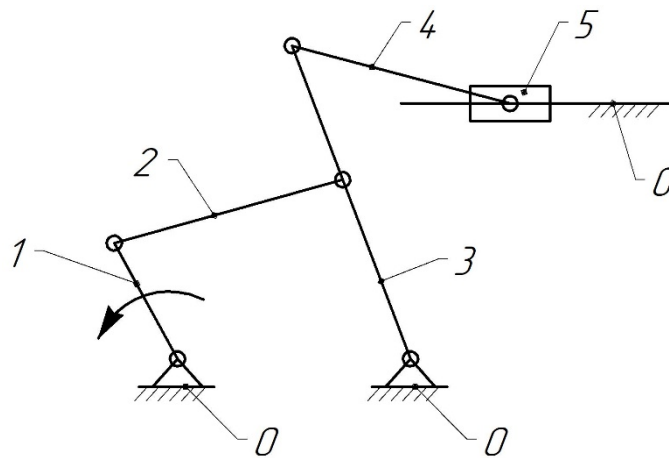
Все задачи курса ТММ можно условно разделить на две категории: задачи анализа и задачи синтеза. Анализ состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной схеме и заданным размерам. Задача синтеза является обратной по отношению к задаче анализа.

# 1 Практическое занятие № 1. Структура плоских и пространственных механизмов

Механизм – кинематическая цепь с неподвижным звеном, преобразующая заданное движение одного или нескольких звеньев в другой вид движения остальных звеньев.

Стойка – неподвижное звено или звено, условно принимаемое за неподвижное, если механизм установлен на движущемся основании (звено  $0$  на рисунке 1.1).

Входное звено – звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в определённые движения других звеньев (звено  $1$  на рисунке 1.1). Входное звено получает движение от двигателя.



1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – шатун; 5 – ползун; 0 – стойка

Рисунок 1.1 – Механизм качающегося конвейера

Выходное звено – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм (звено 5 на рисунке 1.1). Выходное звено соединяется с рабочим органом машины.

Кривошип – звено, образующее вращательную пару со стойкой и способное совершать вокруг неё полный оборот (звено  $1$  на рисунке 1.1).

Шатун – звено, не входящее в кинематические пары со стойкой (звенья 2 и 4 на рисунке 1.1).

Коромысло – звено, образующее вращательную пару со стойкой, но не способное совершать вокруг неё полный оборот (звено  $3$  на рисунке 1.1).

Ползун – звено, совершающее поступательное движение относительно стойки (звено 5 на рисунке 1.1).

Виды механизмов по конструктивному исполнению звеньев:

- рычажные, которые содержат только низшие кинематические пары (рисунок 1.2);
- зубчатые, которые содержат зубчатые колёса (рисунок 1.3);
- кулачковые, содержащие высшую кинематическую пару (рисунок 1.4).

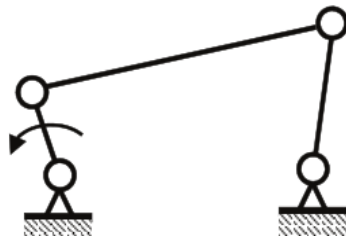


Рисунок 1.2 – Рычажный механизм (шарнирный четырехзвенник)

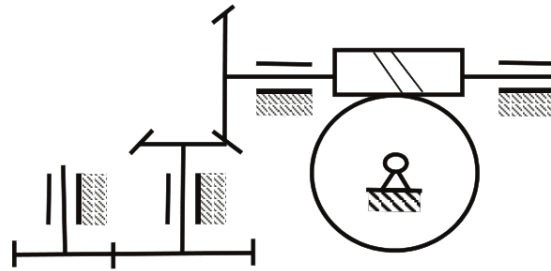


Рисунок 1.3 – Многоступенчатая зубчатая передача

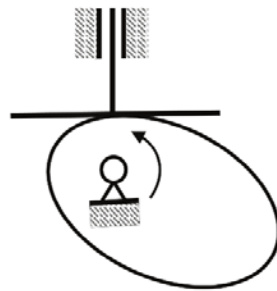


Рисунок 1.4 – Кулачковый механизм

Число степеней свободы пространственного механизма определяется формулой Малышева

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot p_1 - 4 \cdot p_2 - 3 \cdot p_3 - 2 \cdot p_4 - p_5, \quad (1.1)$$

где  $n$  – число подвижных звеньев механизма;

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  – число одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных кинематических пар механизма.

Для плоских механизмов число степеней свободы определяется формулой Чебышева

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - p_2. \quad (1.2)$$

Рассмотрим примеры определения числа степеней свободы механизмов.

**Пример 1** – Пространственный механизм манипулятора (рисунок 1.5).

В данном механизме количество подвижных звеньев  $n = 4$ , количество одноподвижных кинематических пар  $p_1 = 3$  (соединяющих звенья 1 и 0, 1 и 2,

2 и 3), количество трехподвижных кинематических пар  $p_3 = 1$  (соединяющих звенья 3 и 4). Двух-, четырех- и пятиподвижные кинематические пары отсутствуют.

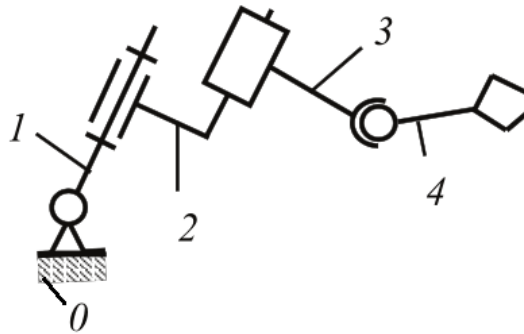


Рисунок 1.5 – Механизм манипулятора

Таким образом, число степеней свободы механизма по формуле (1.1)

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 6.$$

**Пример 2** – Цилиндрическая зубчатая передача (рисунок 1.6).

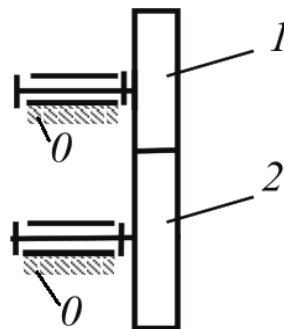


Рисунок 1.6 – Зубчатая передача

В данном механизме количество подвижных звеньев  $n = 2$ , количество одноподвижных кинематических пар  $p_1 = 2$  (соединяющих звенья 1 и 0, 2 и 0), количество двухподвижных кинематических пар  $p_2 = 1$  (соединяющих звенья 1 и 2). Таким образом, число степеней свободы механизма по формуле (1.2)

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

**Пример 3** – Кривошипно-ползунный механизм (рисунок 1.7).

В данном механизме количество подвижных звеньев  $n = 3$ , количество одноподвижных кинематических пар  $p_1 = 4$  (соединяющих звенья 1 и 0, 1 и 2, 2 и 3, 3 и 0), двухподвижные кинематические пары отсутствуют. Таким образом, число степеней свободы механизма по формуле (1.2)

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

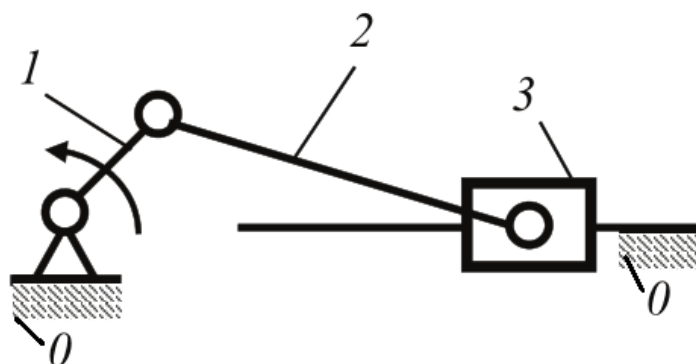


Рисунок 1.7 – Кривошипно-ползунный механизм

Проектирование механизма по заданным входным и выходным условиям называется синтезом.

Задачей структурного синтеза является разработка структурной схемы будущего механизма по заданной подвижности с учётом желаемых структурных, кинематических и динамических свойств.

Структурная группа (группа Ассур) – элементарная кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно её внешних пар равно нулю. Элементарный механизм, к которому необходимо присоединять группы Ассур для образования механизма, представляет собой начальное звено и стойку. Положение начального звена определяется обобщённой координатой (угловой или линейной). На рисунке 1.8 изображена схема начального звена и обобщённой координаты, определяющей положение начального звена  $1$  относительно стойки (угловая и линейная координаты).

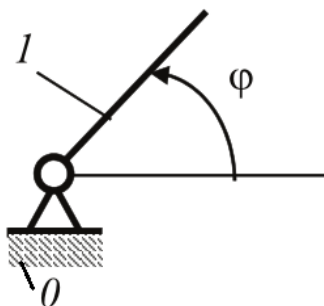
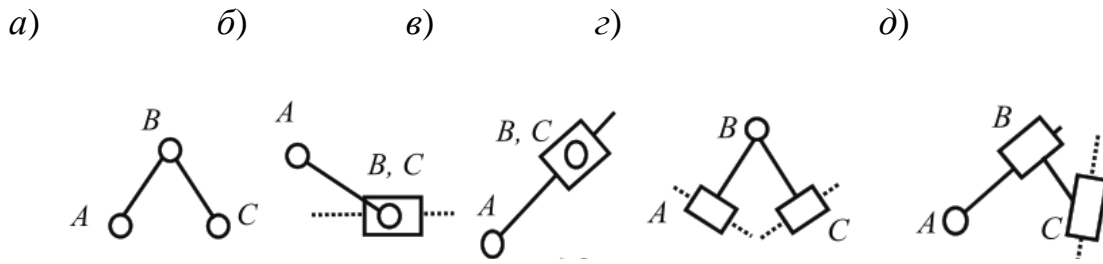


Рисунок 1.8 – Начальное звено

Диада (двухповодок) – это структурная группа, состоящая из двух звеньев и трех кинематических пар (рисунок 1.9).

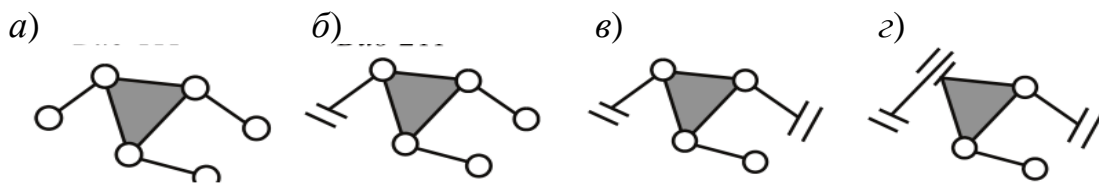
Трёхповодок – структурная группа, состоящая из четырех звеньев и шести кинематических пар (рисунок 1.10).





*a* – вид 1; *б* – вид 2; *в* – вид 3; *г* – вид 4; *д* – вид 5

Рисунок 1.9 – Виды диад



*a* – вид 111; *б* – вид 211; *в* – вид 221; *г* – вид 421

Рисунок 1.10 – Виды трехпроводков

### **Контрольные вопросы**

- 1 Перечислите основные виды механизмов.
- 2 Перечислите разновидности плоских рычажных механизмов.
- 3 Как определить степень подвижности механизмов?
- 4 Как выполнить структурный синтез плоских рычажных механизмов?

## **2 Практическое занятие № 2. Структурный анализ плоских механизмов**

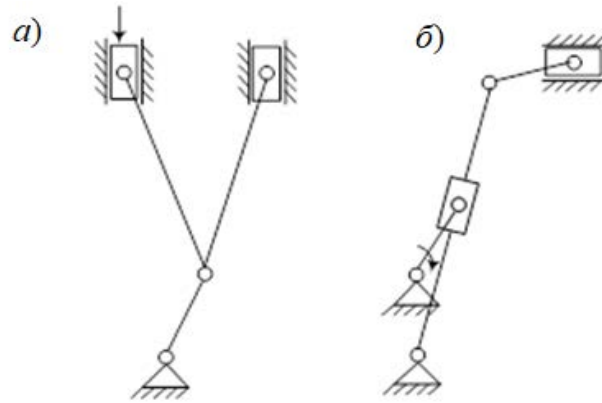
Структурный анализ – задача, обратная синтезу. Структурный анализ заданного механизма следует производить путём расчленения его на структурные группы и первичные механизмы в порядке, обратном образованию механизма.

Порядок выполнения структурного анализа:

- определение названия звеньев и кинематических пар;
- определение степени подвижности механизма;
- разложение механизма на структурные группы Ассур;
- определение класса и порядка всего механизма и построение формулы строения механизма.

Выполним структурный анализ плоских рычажных механизмов, приведенных на рисунке 2.1. Обозначим звенья механизмов цифрами (рисунок 2.2), начиная с ведущего звена. Укажем названия звеньев и движение, которое они совершают. Обозначим кинематические пары буквами. Укажем их названия и подвижность  $W$  (таблица 2.1), номера звеньев, образующие пару. Определим степень подвижности:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$



*a* – механизм V-образного двигателя внутреннего сгорания; *б* – механизм поперечно-строгального станка

Рисунок 2.1 – Плоские рычажные механизмы

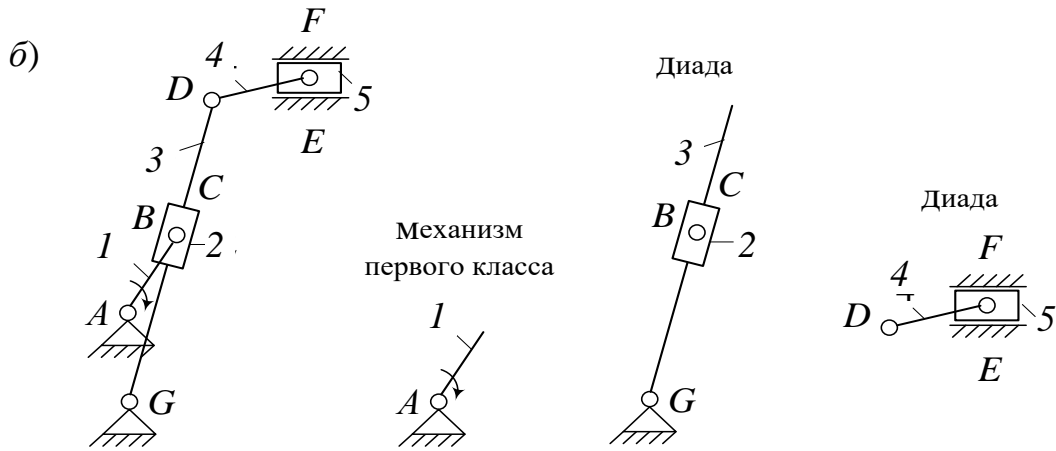
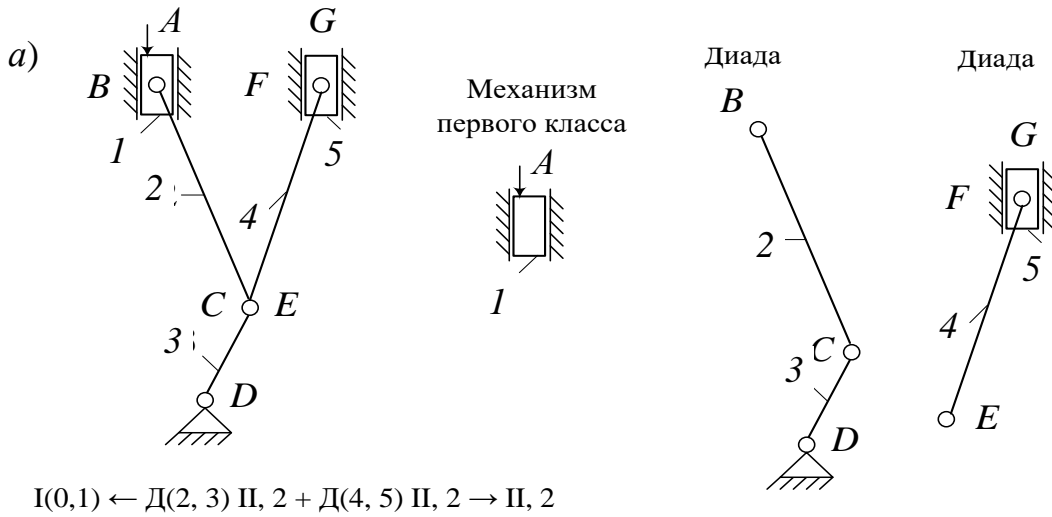


Рисунок 2.2 – Примеры структурного анализа механизмов

Таблица 2.1 – Звенья рычажных механизмов

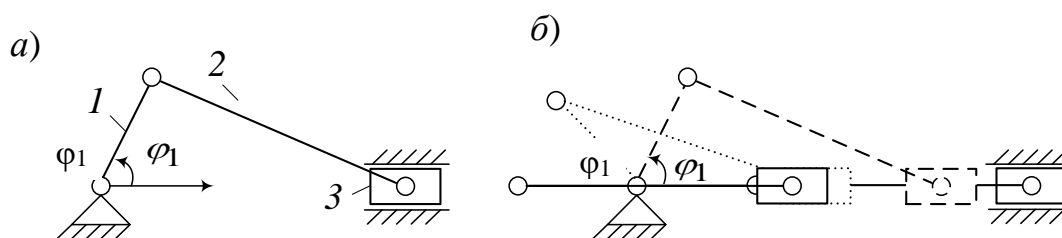
Механизм V-образного двигателя		Механизм поперечно-строгального станка	
Название	Движение	Название	Движение
1 Ползун	Поступательное	1 Кривошип	Вращательное
2 Шатун	Сложное	2 Кулисный камень	Сложное
3 Кривошип	Вращательное	3 Кулиса	Вращательное
4 Шатун	Сложное	4 Шатун	Сложное
5 Ползун	Поступательное	5 Ползун	Поступательное

### Контрольные вопросы

- 1 Перечислите основные виды механизмов.
- 2 Перечислите разновидности плоских рычажных механизмов.
- 3 Как определить степень подвижности механизмов?
- 4 Как выполнить структурный анализ механизмов?

### 3 Практическое занятие № 3. Построение планов скоростей

Для кинематического анализа строят кинематическую схему механизма (структурную схему с учетом геометрических размеров звеньев), планы положений звеньев (кинематические схемы при заданных положениях входного звена) (рисунок 3.1). Определить кинематические параметры можно методом планов, методом замкнутых векторных контуров, методом численного или графического дифференцирования (интегрирования).



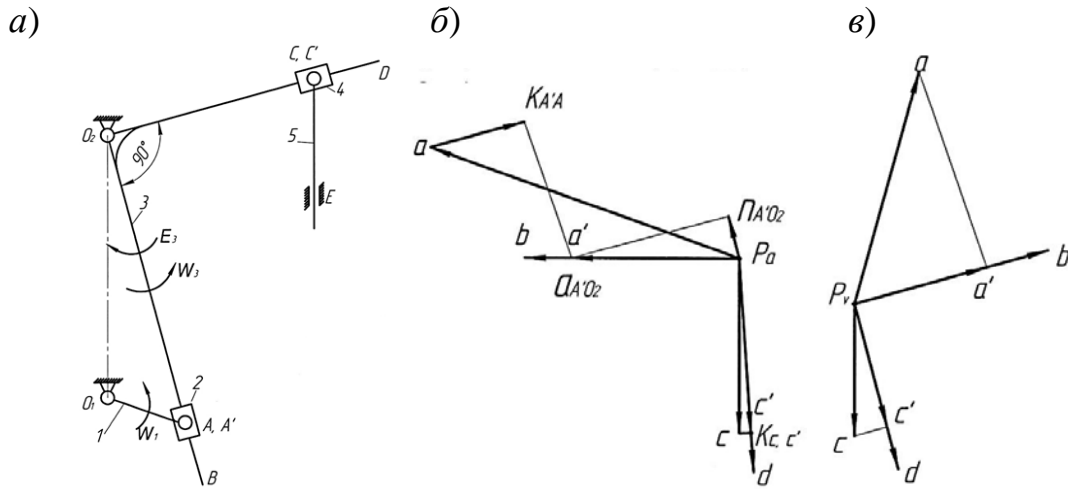
*a* – кинематическая схема механизма; *б* – несколько планов положений механизма

Рисунок 3.1 – Схемы для кинематического анализа механизма ( $\mu_s = 0,01\text{м/мм}$ )

**Планом скоростей звена** называется плоский пучок векторов, идущих из полюса, которые изображают в масштабе абсолютные скорости точек звена; отрезки, соединяющие концы векторов, изображают относительные скорости точек. Совокупность планов скоростей звеньев с общим полюсом называется **планом скоростей механизма**.

### Пример выполнения задания

Вычерчиваем кинематическую схему механизма (рисунок 3.2), приняв масштабный коэффициент длин  $K_L = 0,0025$  м/мм.



$a$  – план механизма  $K_l = 0,0025$  мм;  $b$  – план ускорений  $K_a = 0,05$  м/(с<sup>2</sup> · мм);  $c$  – план скоростей  $K_v = 0,01$  м/(с · мм)

Рисунок 3.2 – Кинематический анализ механизма

#### Порядок исследования точек

$$A \rightarrow A' \rightarrow C' \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C.$$

Определяем скорость точки  $A$ :

$$v_A = \frac{\pi \cdot n_1}{30} l_{O_1 A} = \frac{3,14 \cdot 70}{30} 0,08 = 0,59 \text{ м/с.}$$

Построение плана скоростей.

Рассчитываем масштабный коэффициент плана скоростей:

$$K_v = \frac{v_A}{P_v a} = \frac{0,59}{59} = 0,01 \text{ м/(с · мм).}$$

Выбираем полюс построения  $P_v$  и из него проводим вектор  $P_v a$  перпендикулярно звену  $O_1 A$  в сторону его вращения.

Скорость точки  $A'$  определяем графическим решением системы двух векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{v}_{A'} = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{A'O_2}; \\ \bar{v}_{A'} = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{A'O_2}, \end{cases}$$

где  $\bar{v}_{O_2} = 0$ ;

$$v_{A^1} = P_v a^1 k_v = 41 \cdot 0,01 = 0,41 \text{ м/с};$$

$\bar{v}_{A^1 A}$  параллельно  $O_2 B$ ;

$\bar{v}_{A^1 O_2}$  перпендикулярно  $O_2 B$ .

Для определения скорости точки  $A'$  проводим из конца вектора  $P_v a$  линию, параллельную звену  $O_2 B$ , а из полюса  $P_v$  – перпендикулярную звену  $O_2 B$ , точка пересечения этих линий дает точку  $a'$ .

Скорости точек  $C^1$ ,  $B$  и  $D$  рассчитываем по свойству подобия:

$$\frac{P_v a^1}{P_v c^1} = \frac{O_2 A^1}{O_2 C^1} \Rightarrow P_v c^1 = P_v a^1 \frac{O_2 C^1}{O_2 A^1} = 41 \cdot \frac{75}{115} = 26,7 \text{ мм};$$

$$\frac{P_v a^1}{P_v b} = \frac{O_2 A^1}{O_2 B} \Rightarrow P_v b = P_v a^1 \frac{O_2 B}{O_2 A^1} = 41 \cdot \frac{130}{115} = 46,3 \text{ мм};$$

$$\frac{P_v a^1}{P_v d} = \frac{O_2 A^1}{O_2 D} \Rightarrow P_v d = P_v a^1 \frac{O_2 D}{O_2 A^1} = 41 \cdot \frac{96}{115} = 34,2 \text{ мм};$$

$$v_{A^1} = P_v a^1 2 \cdot k_v = 41 \cdot 0,01 = 0,41 \text{ м/с};$$

$$v_B = P_v b \cdot k_v = 51,3 \cdot 0,01 = 0,513 \text{ м/с};$$

$$v_D = P_v d \cdot k_v = 34,2 \cdot 0,01 = 0,342 \text{ м/с}.$$

Точка  $b$  лежит на продолжении вектора  $P_v a^1$ .

Скорость точки  $C$  определяем графическим решением системы двух векторных уравнений

$$\begin{cases} \bar{v}_C = \bar{v}_{C^1} + \bar{v}_{CC^1}; \\ \bar{v}_C = \bar{v}_{C_0} + \bar{v}_{CC_0}. \end{cases}$$

Для нахождения точки  $C$  проводим из конца вектора  $P_v c^1$  линию, параллельную звену  $O_2 D$ , а из полюса  $P_v$  – линию по вертикали. Точка пересечения этих линий дает точку  $C$ .

$$v_C = P_v c \cdot k_v = 38 \cdot 0,01 = 0,38 \text{ м/с}.$$

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Каковы задачи кинематического анализа?
- 2 Какие масштабные коэффициенты применяются?
- 3 Как строится план положений механизма?
- 4 Каковы свойства плана скоростей?

## **4 Практическое занятие № 4. Построение планов ускорений рычажных механизмов**

Планом ускорений механизма называется чертёж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек механизма в данный момент.

Свойства плана ускорений:

- по плану ускорений можно определить модуль и направление ускорения любой точки механизма;
- по плану ускорений можно определить модуль и направление углового ускорения любого звена механизма;
- свойство подобия. Фигура на плане ускорений, образованная точками одного звена, подобна каждой из фигур, образованных концами векторов ускорений тех же точек на плане ускорений.

Построение плана ускорений начинают с определения ускорения точки  $A$  конца кривошипа с учетом того, что  $\omega_1$  неизменна. Тогда  $a_A^{\tau} = 0$ , следовательно,

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{O_1A}. \quad (4.1)$$

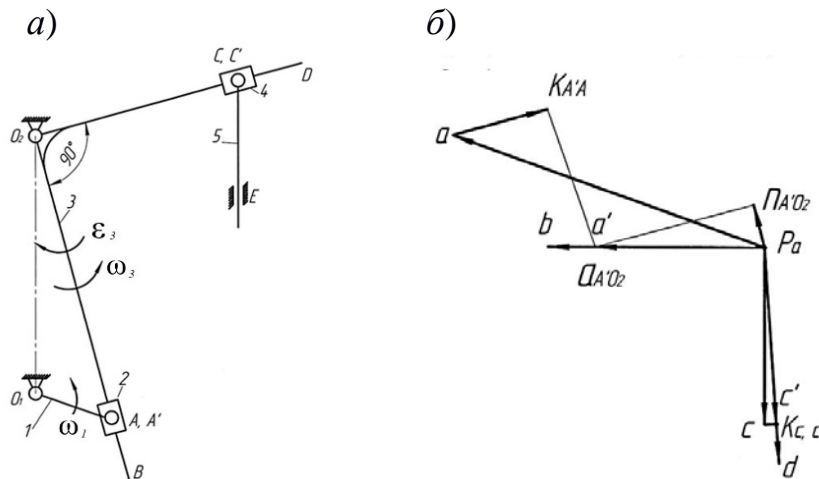
Затем выбирают масштабный коэффициент плана ускорений  $K_a$  и строят план ускорений. Для определения ускорения внутренней точки диады составляют и графически решают систему двух векторных уравнений. Ускорения других интересующих точек диады определяют по свойству подобия.

Угловое ускорение звена  $\varepsilon$  определяют как отношение тангенциальной составляющей ускорения точки звена к длине звена, а его направление – по направлению тангенциального ускорения точки звена при переносе его в рассматриваемую точку звена.

Пример построения плана ускорений кулисного механизма представлен на рисунке 4.1.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Как строится план ускорений механизма?
- 2 Каковы свойства плана ускорений?
- 3 Как по плану скоростей и ускорений определить угловые скорости и ускорения звеньев?



*a* – план механизма; *б* – план ускорений

Рисунок 4.1 – План ускорений кулисного механизма

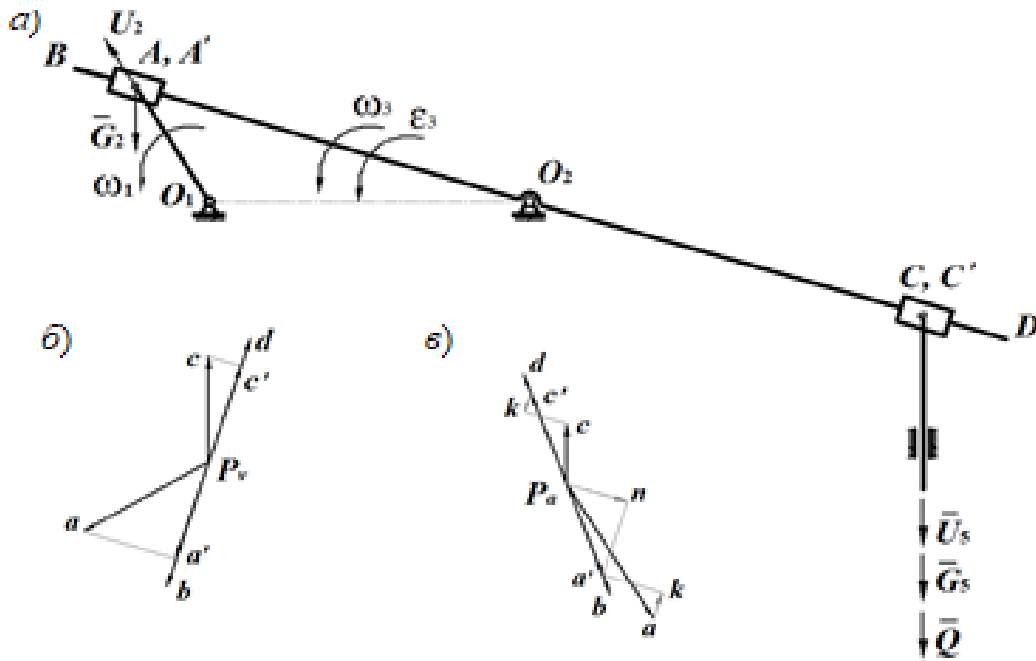
## 5 Практическое занятие № 5. Расчет сил инерции. Метод Жуковского

Для динамического расчета будем использовать два метода: *метод планов сил* и *метод рычага Жуковского*. Метод планов сил позволяет определить силу, уравновешивающую заданные внешние силы и силы инерции, а также позволяет определить реакции в кинематических парах. Метод основан на принципе освобожденности от связей (отброшенные связи заменяются реакциями) и на принципе Даламбера. *Уравновешивающая сила* прикладывается к концу кривошипа перпендикулярно ему и уравновешивает все остальные силы, приложенные к звеньям механизма.

Метод рычага Жуковского основан на принципе возможных перемещений (принципе Даламбера – Лагранжа), согласно которому работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот метод позволяет оценить уравновешивающую силу без определения реакций в кинематических парах.

Метод рычага Жуковского представляет собой геометрическую интерпретацию принципа возможных перемещений. Он применяется для плоских механизмов и позволяет определить уравновешивающую силу без предварительного определения реакций в кинематических парах. Суть метода состоит в следующем: если в соответствующие точки плана скоростей механизма приложить все активные силы и силы инерции, повернутые на  $90^\circ$  в одну сторону, то сумма моментов этих сил относительно полюса плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, равна нулю.

Исходные данные: частота вращения кривошипа  $n_1 = 100 \text{ мин}^{-1}$ ; сила полезного сопротивления  $Q = 2000 \text{ Н}$ ; массы звеньев (рисунок 5.1, *a*)  $m_5 = 30 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 10 \text{ кг}$ ;  $P_{vc} = 42 \text{ мм}$ ;  $P_{va} = 50 \text{ мм}$ ;  $h_{G2} = 25 \text{ мм}$ .



$a$  – план механизма;  $b$  – план скоростей;  $c$  – план ускорений

Рисунок 5.1 – Механизм с качающейся кулисой

Расчет сил инерции:

$$U_5 = m_5 \cdot a_{s5} = 30 \cdot 0,3 = 90 \text{ Н};$$

$$U_2 = m_2 \cdot a_{s2} = 10 \cdot 0,7 = 70 \text{ Н}.$$

Расчет сил тяжести:

$$G_5 = m_5 \cdot g = 30 \cdot 9,8 = 294 \text{ Н};$$

$$G_2 = m_2 \cdot g = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ Н}.$$

Порядок определения уравновешивающей силы следующий:

– строим план скоростей, повернутый на  $90^\circ$  (рисунок 5.2);  
 – переносим в соответствующие точки плана скоростей все силы, кроме реакций;

– план скоростей рассматриваем как жесткий рычаг с опорой в полюсе.

Рычаг находится в равновесии под действием приложенных сил;

– составляем уравнение равновесия рычага в форме суммы моментов сил относительно полюса плана скоростей:

$$\sum M_{P_v} = 0: P'_{yp} \cdot P_v a + G_2 \cdot h_{G_2} - U_2 \cdot h_{U_2} - (Q + G_5 + U_5) \cdot P_v c = 0.$$



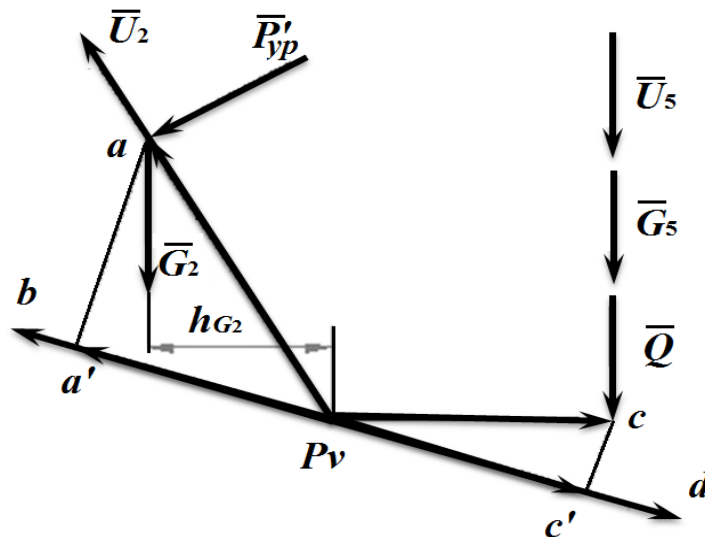


Рисунок 5.2 – Рычаг Жуковского

Определяем уравнивающую силу:

$$P'_{yp} = \frac{(Q + G_5 + U_5) \cdot P_v c + U_2 \cdot h_{U_2} - G_2 \cdot h_{G_2}}{P_v a} =$$

$$= \frac{(2000 + 294 + 90) \cdot 42 + 70 \cdot 0 - 98 \cdot 25}{50} = 2051,56 \text{ Н.}$$

### Контрольные вопросы

- 1 Как формулируется принцип Даламбера для механизмов? В чем состоит причина его использования при решении динамических задач для механизмов?
- 2 Как учитываются силы инерции при вращательном движении? Что такое момент инерции тела?
- 3 На чем базируется метод рычага Жуковского? Что на самом деле представляет этот рычаг?

## 6 Практическое занятие № 6. Силовой анализ механизмов методом планов сил

При работе на механизм действуют силы различной природы, поэтому целесообразно произвести их классификацию.

Движущей называется сила  $P$ , которая приложена к механизму со стороны двигателя и вызывает движение механизма. Движущая сила совершает положительную работу, т. к. ее направление всегда совпадает с направлением перемещения.

Силой полезного сопротивления  $Q$  называется сила, для преодоления

которой предназначен механизм. Она приложена к ведомому звену со стороны внешних объектов. Природа этой силы может быть различной: сила резания, сила трения, сила упругости, сила гидравлического сопротивления и т. д. Работа силы полезного сопротивления всегда отрицательна. Сила полезного сопротивления тоже может являться функцией кинематических параметров.

Сила тяжести  $G$  выражается через массу тела по формуле  $G = m \cdot g$ . Она приложена к телу в центре масс. Работа силы тяжести при опускании центра масс положительна, при поднимании – отрицательна.

Действие одного звена на другое проявляется в виде реакции. По своей природе реакция является силой упругости. Согласно 3-му закону Ньютона реакции двух взаимодействующих тел равны по величине и противоположны по направлению. Для механизма в целом работа сил реакции равна нулю.

В тихоходных механизмах динамические эффекты проявляются незначительно, поэтому усилия можно найти на основании статического расчета, приняв во внимание только движущую силу, силы тяжести, силу трения, силу полезного сопротивления. В быстроходных механизмах следует учитывать динамические эффекты. Проще всего это сделать, если воспользоваться принципом Даламбера. Для этого нужно ко всем внешним силам добавить силы инерции и рассматривать такую систему сил, находящуюся в равновесии. Данный подход называется методом кинетостатики.

Пусть заданы механизм и сила полезного сопротивления  $Q = 250$  Н (рисунок 6.1, *а*), план его скоростей (рисунок 6.1, *б*) и ускорений (рисунок 6.1, *в*). Определим требуемую уравнивающую силу  $F_{уп}$  и реакции в кинематических парах методом планов сил.

Пусть известны массы звеньев: масса кулисы  $m_3 = 8$  кг; масса ползуна  $m_5 = 25$  кг. Массы остальных звеньев малы, по сравнению с заданными, ими пренебрегаем.

Рассчитаем веса звеньев:

$$G_3 = m_3 \cdot g = 8 \cdot 9,81 = 78,48 \text{ Н};$$

$$G_5 = m_5 \cdot g = 25 \cdot 9,81 = 245,25 \text{ Н}.$$

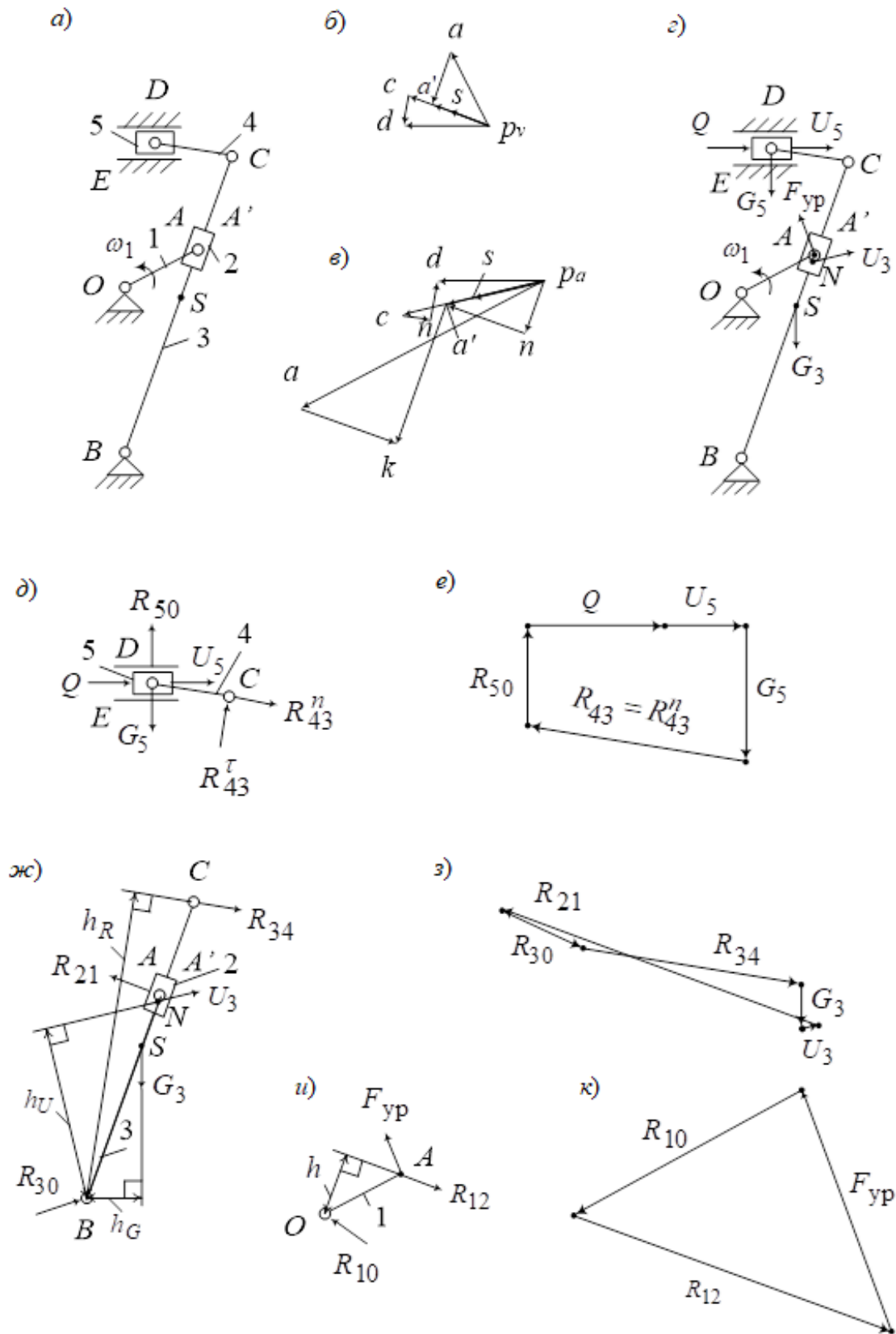
Определим силы инерции этих звеньев:

$$U_3 = -m_3 \cdot a_S = 8 \cdot (-3,99) = -31,92 \text{ Н};$$

$$U_5 = -m_5 \cdot a_D = 25 \cdot (-5,86) = -146,5 \text{ Н}.$$

Знаки «минус» показывают, что направление сил инерции противоположно соответствующим ускорениям, указанным на плане ускорений (см. рисунок 6.1, *в*). Уравнивающую силу  $F_{уп}$  приложим к концу кривошипа перпендикулярно ему в направлении его вращения (рисунок 6.1, *з*).

Выделим диаду 4–5 (рисунок 6.1, *д*). В местах отрыва (кинематических парах  $E$  и  $C$ ) отбросим связи и заменим их действие реакциями.



$a$  – заданный механизм;  $b$  – план скоростей механизма;  $c$  – план ускорений механизма;  $d$  – схема приложенных к механизму сил;  $e$  – план сил диады 4–5;  $ж$  – схема сил диады 2–3;  $з$  – план сил диады 2–3;  $и$  – схема сил механизма первого класса;  $к$  – план сил механизма первого класса

Рисунок 6.1 – Применение метода планов сил

Для поступательной пары  $E$  реакция  $R_{50}$  перпендикулярна направляющим пары, а во вращательной паре реакция неизвестного направления, которую можно разложить на две составляющие: нормальную –  $R_{43}^n$  (параллельно звену) и касательную –  $R_{43}^t$  (перпендикулярно звену). Нижний индекс состоит из двух чисел. Первое число указывает, на какое звено действует реакция, а второе – со стороны какого звена. Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\vec{Q} + \vec{U}_5 + \vec{G}_5 + \vec{R}_{50} + \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^t = 0.$$

Геометрически это значит, что многоугольник, стороны которого являются векторами суммы, должен быть замкнут. Такой многоугольник можно построить, имея не более двух неизвестных. Для определения их числа удобно применять подчеркивание. Два подчеркивания – вектор известен и по направлению, и по величине. Одно подчеркивание – вектор известен лишь по направлению. В данном случае имеем три неизвестных. Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил звена 4 относительно точки  $D$ . Линия действия силы  $\vec{R}_{43}^n$  проходит через точку  $D$ , поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно точки  $D$  равен нулю. Момент создает сила  $\vec{R}_{43}^t$  на плече  $L_{CD}$ , поскольку  $L_{CD}$  является перпендикуляром, опущенным из точки  $D$  на линию действия силы. Причем момент положительный потому, что сила стремится повернуть звено 4 относительно точки  $D$  против часовой стрелки. Тогда уравнения равновесия моментов  $\sum M_D = 0$ ;  $R_{43}^t \cdot L_{CD} = 0$ ;  $R_{43}^t = 0$ . Теперь в уравнении равновесия две неизвестные.

Определим, что вектор  $U_5 = 29$  мм и  $G_5 = 49$  мм.

Пристроим их последовательно к вектору  $Q$  (рисунок 6.1, *e*). Далее к концу вектора  $G_5$  пристроим линию действия реакции  $R_{43}^n$ , а из точки начала построения вектора  $Q$  – линию действия  $R_{50}$  до точки пересечения с линией реакции  $R_{43}^n$ . Поставим направление векторов  $R_{43}^n$  и  $R_{50}$  так, чтобы получился замкнутый векторный контур. Вектор  $R_{43}^n$  на схеме сил (см. рисунок 6.1, *д*) имеет противоположное направление тому, что получилось из построения.

Замерим полученные векторы на плане, определим значения реакций:  $R_{43}^n = 402,5$  Н;  $R_{50} = 180$  Н;  $R_{43}^t = 402,5$  Н.

Реакция  $R_{45}$  во внутренней вращательной кинематической паре  $D$  определяется из условий равновесия звена 4:  $\sum F = 0$ ;  $\vec{R}_{45} + \vec{R}_{43} = 0$ ;  $\vec{R}_{45} = -\vec{R}_{43}$ .

Рассмотрим диаду 2–3 (рисунок 6.1, *ж*). Отбросим связи и заменим их действие реакциями. Запишем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\vec{R}_{34} + \vec{G}_3 + \vec{U}_3 + \vec{R}_{21} + \vec{R}_{30} = 0.$$

Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции  $R_{30}$  и модуль реакции  $R_{21}$ . Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил диады относительно точки  $B$ :

$$R_{34} \cdot h_R + U_S \cdot h_U + G_3 \cdot h_G - R_{21} \cdot L_{AB} = 0;$$

$$R_{21} = \frac{R_{34} \cdot h_R + U_3 \cdot h_U + G_3 \cdot h_G}{L_{AB}} = \frac{402,5 \cdot 55,2 + 31,92 \cdot 311 + 78,48 \cdot 100}{392} = 611,99 \text{ Н},$$

где  $h_R, h_U, h_G$  – плечи (перпендикуляры, опущенные из точки  $B$  на линии действия сил) сил  $R_{34}, U_3, G_3$  соответственно, значения подставляются в миллиметрах, измеряются на схеме сил.

Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Графическое решение выполняем аналогично проведенному выше и определяем реакцию:  $R_{30} = 163 \text{ Н}$ .

Реакция  $R_{23}$  во внутренней кинематической паре  $A'$  определяется из условий равновесия звена 2:  $\sum F = 0$ ;  $\vec{R}_{21} + \vec{R}_{23} = 0$ ;  $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{21}$ .

Силовой расчет механизма первого класса (рисунок 9.1,  $u$ ) заключается в определении уравновешивающей силы  $F_{yp}$  и реакции в кинематической паре  $O$ . Отбросим связи и заменим их действие реакциями: в точке  $A$  – реакция  $R_{12} = -R_{21} = -618,39 \text{ Н}$  (направлена противоположно  $R_{21}$ ); в точке  $O$  – реакция  $R_{10}$  (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно). Запишем уравнение равновесия кривошипа:

$$\vec{R}_{12} + \vec{F}_{yp} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции  $R_{10}$  и модуль реакции  $F_{yp}$ .

Составим уравнение равновесия моментов сил кривошипа относительно точки  $O$ :

$$R_{12} \cdot h - F_{yp} \cdot L_{OA} = 0;$$

$$F_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h}{L_{OA}} = \frac{611,99 \cdot 11,3}{15} = 461,03 \text{ Н}.$$

Теперь в уравнении равновесия кривошипа две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению (рисунок 6.1,  $\kappa$ ). К вектору  $R_{12}$  построим определенную выше силу  $F_{yp}$ . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором  $R_{10} = 473 \text{ Н}$ .

### **Контрольные вопросы**

- 1 Перечислите задачи силового анализа.
- 2 Какие силы действуют в механизмах?
- 3 В чем заключается метод планов сил плоских механизмов?

## 7 Практическое занятие № 7. Аналитический расчет планетарных механизмов

Планетарным называется зубчатый механизм, содержащий колеса с подвижными осями. Звенья планетарного механизма имеют особенные названия. Зубчатые колеса с подвижной осью называются сателлитами. Подвижное звено, в котором помещена ось сателлита, называется водилом  $H$ . В планетарной передаче есть два центральных колеса: центральное с внешними зубьями, называемое солнечным, центральное с внутренними зубьями, называемое эпициклом (короной), одно из этих колес будет неподвижным – опорным.

Аналитический метод кинематического анализа планетарных механизмов основан на методе обращенного движения. Сущность метода заключается в том, что всем звеньям планетарной ступени сообщается частота вращения водила  $n_H$  но в противоположном направлении. Тогда водило становится неподвижным, а остальные звенья приобретут дополнительную скорость  $n_H$ .

На рисунке 7.3 приведена схема исследуемого механизма. Исходные данные:  $n_{об} = n_H$  – числа зубьев колес зубчатого ряда;  $z_1 = 112$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 18$ ,  $z_4 = 90$  – числа зубьев планетарной ступени. Необходимо определить частоты вращения всех звеньев механизма  $n_1, n_4, n_5, n_6$ .

Передаточное отношение обращенного механизма определится по формуле

$$i_{14}^H = \frac{n_1^H}{n_4^H} = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H}.$$

Верхний индекс  $H$  указывает, что параметры относятся к обращенному механизму. Передаточное отношение  $i_{14}^H$  выразим через числа зубьев колес:

$$i_{14}^H = \left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{40}{112} \cdot \frac{90}{18} = 1,786.$$

Подставляя значение  $i_{14}^H = 1,786$  в предыдущее выражение, найдем частоту вращения колеса 4:

$$1,786 = \frac{0 - 1800}{n_4 - 1800},$$

отсюда  $n = 791873 \text{ мин}^{-1}$ .

Частоту вращения колеса 6 определим из выражения

$$i_{56} = -\frac{z_6}{z_5} = \frac{n_5}{n_6};$$

$$n_6 = -\frac{n_5 \cdot z_5}{z_6} = -\frac{791,9 \cdot 8}{26} = -234,6 \text{ мин}^{-1}.$$

Для определения частоты вращения колеса 2 запишем формулу Виллиса для первой ступени планетарного механизма:

$$i_{12}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H};$$

$$U_{12}^H = \frac{z_2}{z_1};$$

$$\frac{40}{112} = \frac{0 - 1800}{n_2 - 1800},$$

где  $n_2 = -3240 \text{ мин}^{-1}$ .

### **Контрольные вопросы**

- 1 Что такое планетарный механизм?
- 2 В чем состоит отличие планетарного механизма от рядового?
- 3 В чем заключается аналитический метод анализа планетарного механизма?

## **8 Практическое занятие № 8. Определение угловых скоростей и ускорений звеньев**

Кинематика – раздел механики, изучающий движение с геометрической точки зрения, т. е. без учета причин, вызывающих его.

Для характеристики движения используют следующие кинематические параметры: перемещение  $s(t)$ , м; скорость  $v$ , м/с  $\left(v = \frac{ds}{dt}\right)$ ; ускорение  $a$ , м/с<sup>2</sup>

$\left(a = \frac{dv}{dt}\right)$ . Можно применять их аналоги – функцию положения  $s(\varphi_1)$ , м;

передаточную функцию скорости  $v_q$ , м/рад  $\left(v_q = \frac{ds}{d\varphi_1}\right)$ ; передаточную функцию

ускорения  $a_q$ , м/рад<sup>2</sup>  $\left(a_q = \frac{dv_q}{d\varphi_1}\right)$ . При этом  $\varphi_1$  – обобщенная координата угла

поворота входного звена  $I$ ;  $t$  – время. Связь между скоростями и ускорениями, их передаточными функциями определяется по следующим формулам:

$$v = v_q \cdot \omega; \quad (8.1)$$

$$a = a_q \cdot \omega^2. \quad (8.2)$$

Направление угловой скорости звена определяется направлением линейной скорости точки рассматриваемого звена. Для определения направления угловой скорости звена линейная скорость точки переносится в рассматриваемую точку звена и в какую сторону скорость поворачивает звено, туда будет направлена угловая скорость  $\omega$ .

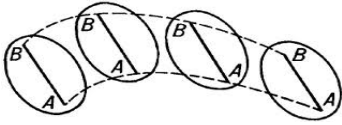
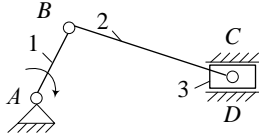

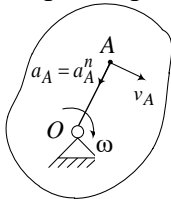
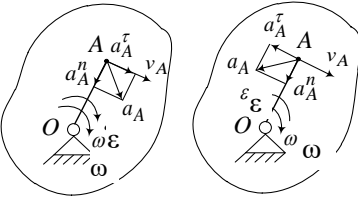
$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 70}{30} = 7,3 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon_1 = 0 \text{ при } \omega_1 = \text{const}.$$

Направление углового ускорения определяется направлением тангенциального ускорения точки звена при переносе его в рассматриваемую точку звена. В какую сторону поворачивает тангенциальное ускорение рассматриваемой точки звена, туда и направлено угловое ускорение звена  $\varepsilon$ .

В таблице 8.1 рассмотрены основные виды движения и приведены их кинематические соотношения.

Таблица 8.1 – Основные виды движения

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
Поступательное движение тела – это движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы и тело движется без поворота		$v_A = v_B = \frac{ds}{dt}$	$a_A = a_B = \frac{dv}{dt}$
Прямолинейное движение ползуна – частный случай поступательного движения по прямой		$v_3 = \frac{ds}{dt}$	$a_3 = \frac{dv}{dt}$
Круговое поступательное – траектория окружности	Круговое поступательное движение груза 		
Вращательное движение – движение, при котором одна точка тела неподвижна относительно выбранной системы отсчета	Равномерное вращение 	$v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n;$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$
	Ускоренное Замедленное 	$v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau;$ $\vec{a}_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2};$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA};$ $a_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA}$



## Окончание таблицы 8.1

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
Сложное движение – результат сложения двух разных видов движений: переносного $e$ (вращательное) и относительного $r$ (поступательное)		$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_{AA'}^r$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^e + \vec{a}_{AA'}^r + \vec{a}^k$ ; $a^k = 2\omega \cdot v_{AA'}^r$
<i>Примечание</i> – $\vec{a}_A^n$ – вектор нормального ускорения точки, направляется к центру вращения; $a^k$ – ускорение Кориолиса, направляется поворотом на $90^\circ$ вектора относительной скорости $\vec{v}_{AA'}^r$ по направлению переносного вращения $\omega$			

**Контрольные вопросы**

- 1 Что такое кинематика?
- 2 Как определяется направление угловой скорости звена?
- 3 Как определяется направление углового ускорения?

**9 Практическое занятие № 9. Метод кинематических диаграмм**

Для наглядного представления кинематических характеристик какого-либо звена механизма в течение цикла движения используются кинематические диаграммы. Это могут быть графические зависимости вида  $S = S(t)$ ,  $V = V(t)$ ,  $a = a(t)$ ,  $\psi = \psi(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ . Рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма построение диаграммы перемещения ползуна (рисунок 9.1).

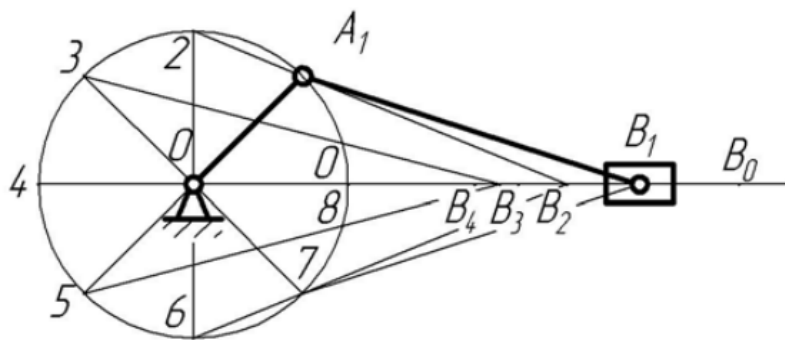


Рисунок 9.1 – Кривошипно-ползунный механизм

Используя метод засечек, построим в масштабе  $K_l$  несколько положений механизма.

В выбранном масштабе методом засечек строим кинематическую схему механизма в 8 положениях и определяем перемещение ползуна для каждого

положения графически. Строим по полученным перемещениям ползуна диаграмму перемещений  $S_B = S_B(t)$  (рисунок 9.2).

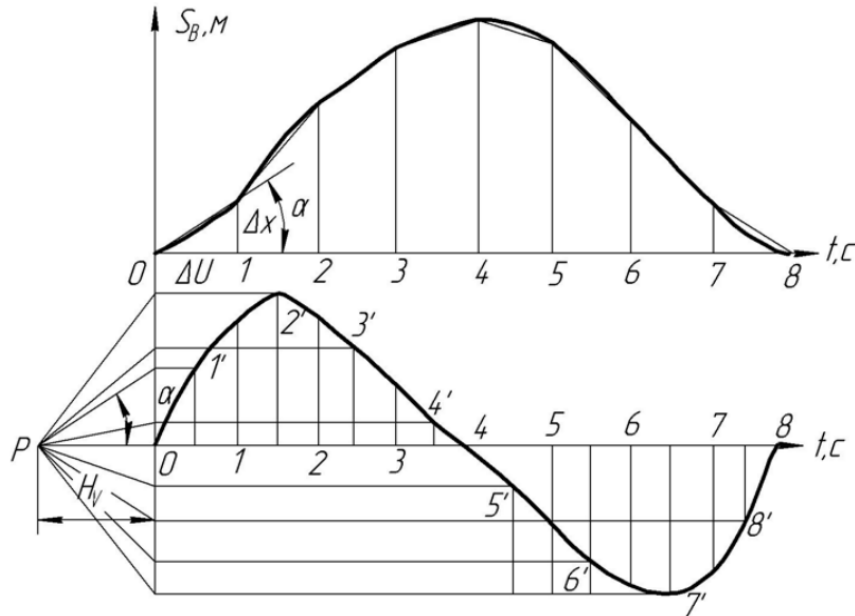


Рисунок 9.2 – Метод графического дифференцирования

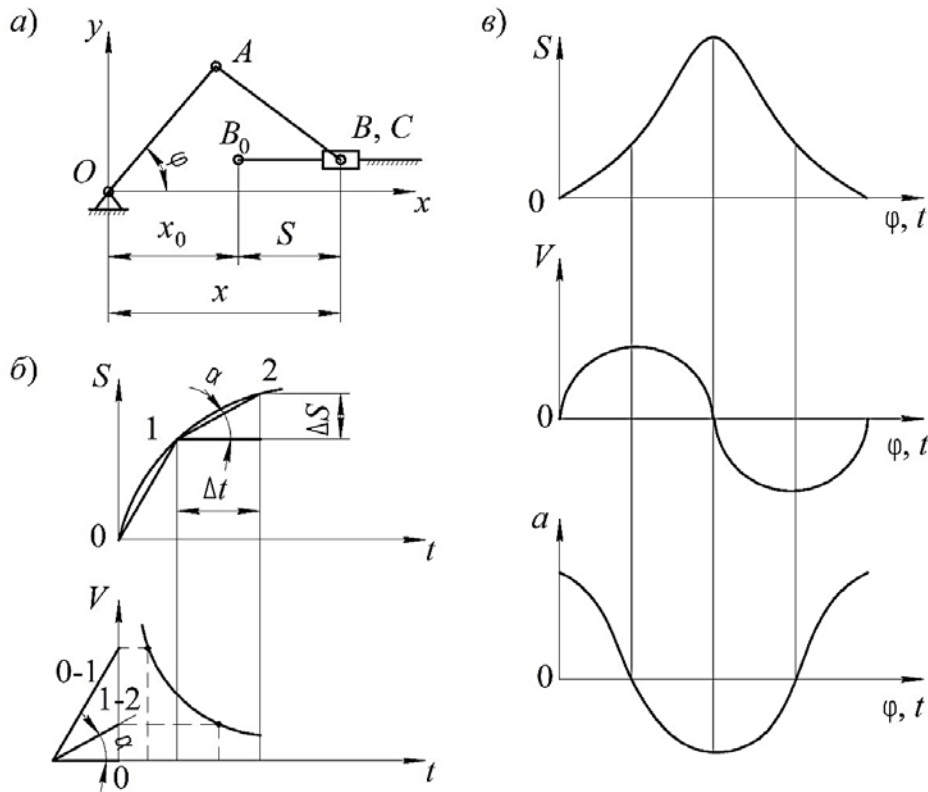
Далее, используя метод графического дифференцирования по методу хорд, получим диаграмму  $V_B = V_B(t)$ . Для этого заменим участки кривой  $S_B = S_B(t)$  на интервалах  $0 - 1$ ,  $1 - 2$ ,  $2 - 3$  и т. д. хордами, т. е. плавную кривую заменяем ломаной линией. Под диаграммой  $S_B = S_B(t)$  расположим оси координат  $V_B = V_B(t)$  (см. рисунок 9.2). На продолжении оси абсцисс этой диаграммы откладываем произвольный отрезок  $H_v$ , называемый базой дифференцирования. Из конца этого отрезка, точки  $P$ , называемой полюсом дифференцирования, проводим лучи, параллельные хордам, до пересечения с осью ординат диаграммы  $V_B = V_B(t)$ . Полученные точки сносим параллельно оси абсцисс на соответствующие ординаты, восстановленные из середины интервалов абсцисс диаграммы  $V_B = V_B(t)$ . Полученные точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и т. д. соединяем плавной кривой, которая и является диаграммой  $V_B = V_B(t)$ . Аналогично, применяя метод хорд, можно получить диаграмму ускорения  $a_B = a_B(t)$ .

**Метод кинематических диаграмм** отличается простотой реализации, хорошо иллюстрирует связь между кинематическими параметрами, однако дает низкую точность результатов. Рассмотрим его теперь на примере кривошипно-ползунного механизма (рисунок 9.3).

Положение точки  $B$  при заданном значении обобщенной координаты  $\varphi$  определяется координатой  $x$ . Если обозначить координату точки  $B$  в крайнем положении механизма  $x_0$ , то ее перемещение  $S_B = x - x_0$ . Перемещение представляет функцию угла  $\varphi$ . Задаваясь значениями этого угла, по планам положений механизма определим перемещения  $S$  и построим график  $S(\varphi)$ . Поскольку  $\varphi = \omega t$ , ось  $\varphi$  можно считать осью  $t$ , следовательно, полученный график есть график  $S(t)$ . Согласно определению скорости и графическому смыслу производной имеем

$$V = dS/dt = \operatorname{tg}\alpha_S \cdot k_V,$$

где  $\alpha_S$  – угол наклона касательной к графику  $S(t)$ .



*a* – кинематическая схема механизма; *б* – метод графического дифференцирования, кинематические графики перемещений; *в* – метод скоростей и ускорений ползуна

Рисунок 9.3 – Метод хорд

Отсюда следует способ построения графика  $V(t)$ : проводятся касательные в выбранных точках графика  $S(t)$ , измеряются углы наклона  $\alpha_S$ , вычисляются тангенсы этих углов. Аналогичным образом находится ускорение:

$$a = dV/dt = \operatorname{tg}\alpha_V \cdot k_a.$$

Между графиками  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $a(t)$  существует связь, как между интегральными и дифференциальными кривыми.

Экстремуму интегральной кривой соответствует ноль на дифференциальной кривой.

Точке перегиба интегральной кривой соответствует экстремум дифференциальной кривой.

Возрастающим значениям интегральной кривой соответствуют положительные значения дифференциальной кривой, убывающим – отрицательные.

Непосредственное применение указанного способа построения графиков не практикуется из-за сложности точного построения касательных. Обычно

используется его модификация, которая называется методом хорд: *касательные, проведенные в точках, лежащих на серединах выбранных участков, заменяются хордами этих участков.*

### **Контрольные вопросы**

- 1 В чем заключается аналитический метод кинематического анализа?
- 2 Что такое функция положения?
- 3 В чем заключается метод кинематических диаграмм?

## **10 Практическое занятие № 10. Определение уравнивающей силы методом Жуковского**

Для динамического расчета будем использовать два метода: *метод планов сил* и *метод рычага Жуковского*. Метод планов сил позволяет определить силу, уравнивающую заданные внешние силы и силы инерции, а также позволяет определить реакции в кинематических парах. Метод основан на принципе освобожденности от связей (отброшенные связи заменяются реакциями) и на принципе Даламбера. *Уравнивающая сила* прикладывается к концу кривошипа перпендикулярно ему и уравнивает все остальные силы, приложенные к звеньям механизма.

Метод рычага Жуковского основан на принципе возможных перемещений (принципе Даламбера – Лагранжа), согласно которому работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот метод позволяет оценить уравнивающую силу без определения реакций в кинематических парах.

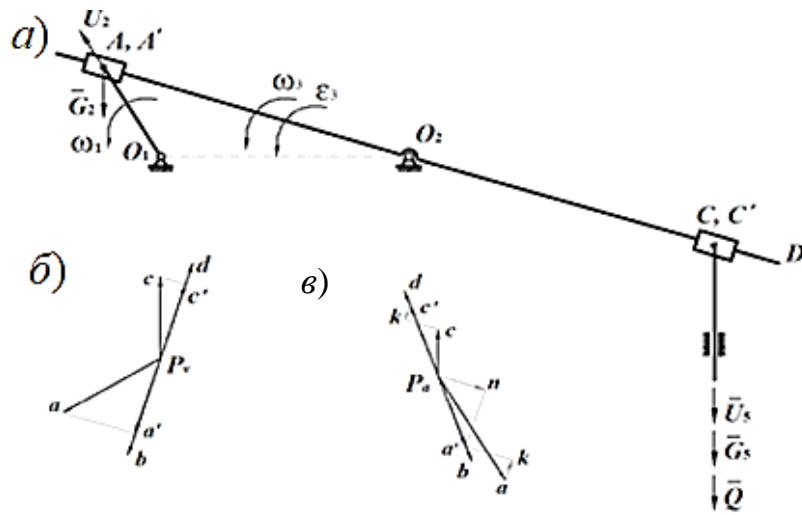
Метод рычага Жуковского представляет собой геометрическую интерпретацию принципа возможных перемещений. Он применяется для плоских механизмов и позволяет определить уравнивающую силу без предварительного определения реакций в кинематических парах. Суть метода состоит в следующем: если в соответствующие точки плана скоростей механизма приложить все активные силы и силы инерции, повернутые на  $90^\circ$  в одну сторону, то сумма моментов этих сил относительно полюса плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, равна нулю.

Исходные данные: частота вращения кривошипа  $n_1 = 100 \text{ мин}^{-1}$ ; сила полезного сопротивления  $Q = 2000 \text{ Н}$ ; массы звеньев (рисунок 10.1, а)  $m_5 = 30 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 10 \text{ кг}$ ;  $P_{vc} = 42 \text{ мм}$ ;  $P_{va} = 50 \text{ мм}$ ;  $h_{G2} = 25 \text{ мм}$ .

Расчет сил инерции:

$$U_5 = m_5 \cdot a_{s5} = 30 \cdot 0,3 = 90 \text{ Н};$$

$$U_2 = m_2 \cdot a_{s2} = 10 \cdot 0,7 = 70 \text{ Н}.$$



*a* – план механизма; *б* – план скоростей; *в* – план ускорений

Рисунок 10.1 – Механизм с качающейся кулисой

Расчет сил тяжести:

$$G_5 = m_5 \cdot g = 30 \cdot 9,8 = 294 \text{ Н};$$

$$G_2 = m_2 \cdot g = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ Н}.$$

Порядок определения уравновешивающей силы следующий:

- строим план скоростей, повернутый на  $90^\circ$  (рисунок 10.2);
- переносим в соответствующие точки плана скоростей все силы, кроме реакций;
- план скоростей рассматриваем как жесткий рычаг с опорой в полюсе. Рычаг находится в равновесии под действием приложенных сил;
- составляем уравнение равновесия рычага в форме суммы моментов сил относительно полюса плана скоростей:

$$\sum M_{P_v} = 0: P'_{yp} \cdot P_v a + G_2 \cdot h_{G_2} - U_2 \cdot h_{U_2} - (Q + G_5 + U_5) \cdot P_v c = 0.$$

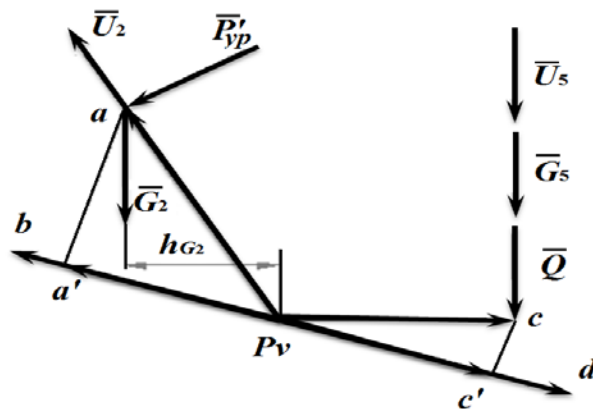


Рисунок 10.2 – Рычаг Жуковского

Определяем уравнивающую силу:

$$P'_{yp} = \frac{(Q + G_5 + U_5) \cdot P_v c + U_2 \cdot h_{U_2} - G_2 \cdot h_{G_2}}{P_v a} =$$

$$= \frac{(2000 + 294 + 90) \cdot 42 + 70 \cdot 0 - 98 \cdot 25}{50} = 2051,56 \text{ Н.}$$

### Контрольные вопросы

1 Как формулируется принцип Даламбера для механизмов? В чем состоит причина его использования при решении динамических задач для механизмов?

2 Как учитываются силы инерции при вращательном движении? Что такое момент инерции тела?

3 На чем базируется метод рычага Жуковского? Что на самом деле представляет этот рычаг?

## 11 Практическое занятие № 11. Кинематический анализ зубчатых механизмов

Зубчатые механизмы служат для передачи вращения. В машиностроении чаще используются зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ , и увеличивающие вращающий момент  $T$ , Н·м, т. е. усилие. Такие передачи называют *редукторами*. Их необходимость обусловлена тем, что выпускаемые промышленностью двигатели быстроходны. Рабочие же органы, как правило, тихоходны и требуют больших усилий для выполнения работы. Но бывают зубчатые механизмы, которые увеличивают угловую скорость, – *мультипликаторы*. Они могут использоваться, например, для центрифуг.

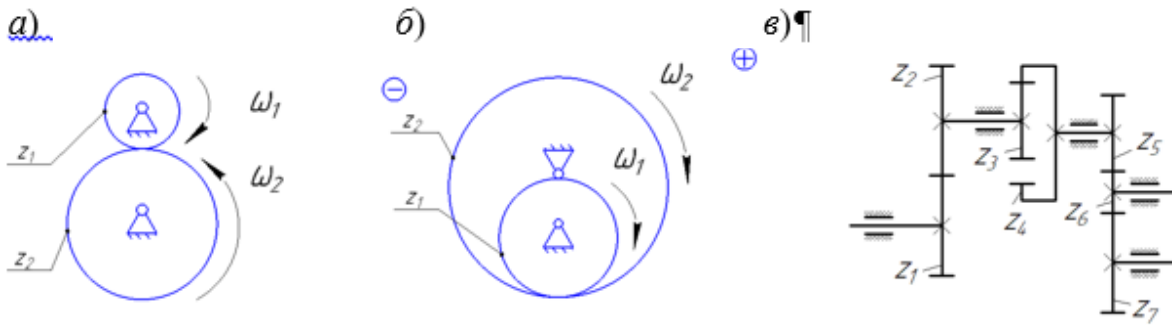
*Передаточное отношение*  $i$  – отношение угловой скорости  $\omega_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ , ведущего зубчатого колеса к угловой скорости ведомого  $\omega_2$  с учетом направления вращения (это справедливо и для частот вращения  $n_1$  и  $n_2$ , об/мин), индексы в формуле указывают на номера колес:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}. \quad (11.1)$$

Знак «плюс» используют при внутреннем зацеплении, а «минус» – при внешнем (рисунок 11.1, а, б). Передаточное отношение не следует путать с *передаточным числом*  $u$ , под которым понимают отношение числа зубьев большего колеса  $z_2$  к меньшему  $z_1$ :

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (11.2)$$

Передаточное число всегда больше единицы и знака не имеет. Часто передаточное отношение определяют через число зубьев.



*a* – внешнее зацепление; *b* – внутреннее зацепление; *в* – схема зубчатого ряда

Рисунок 11.1 – Зубчатые ряды

*Зубчатым рядом* называют зубчатый механизм, образованный зубчатыми колесами с неподвижными осями. Зубчатый ряд может состоять из одной или нескольких передач (рисунок 11.1, *в*).

Если зубчатый ряд имеет несколько зацеплений, то его передаточное отношение будет равно произведению передаточных отношений каждого зацепления. Например (см. рисунок 11, *в*), для зубчатого ряда от колеса 1 к колесу 7 передаточное отношение

$$i_{17} = i_{12}i_{34}i_{56}i_{67} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = -\frac{z_2 z_4 z_7}{z_1 z_3 z_5}. \quad (11.3)$$

### Контрольные вопросы

- 1 Что такое зубчатый ряд?
- 2 Что такое передаточное отношение?
- 3 Как определить передаточное отношение?

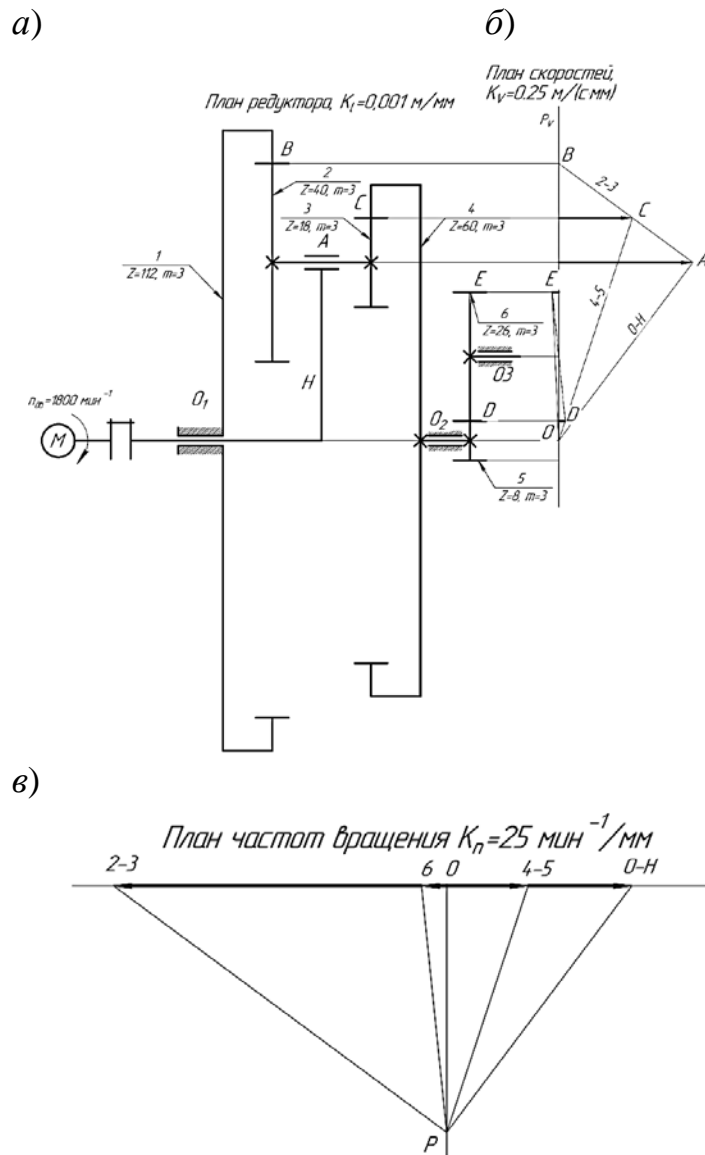
## 12 Практическое занятие № 12. Графический метод кинематического анализа комбинированных зубчатых механизмов

На рисунке 12.2 приведена схема исследуемого механизма.

Исходные данные:  $n_{\text{об}} = n_H = 1800 \text{ мин}^{-1}$ ;  $z_5 = 8$ ,  $z_6 = 26$  – числа зубьев колес зубчатого ряда;  $z_1 = 112$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 18$ ,  $z_4 = 90$  – числа зубьев планетарной ступени. Необходимо определить частоты вращения всех звеньев механизма  $n_2$ ,  $n_4$ ,  $n_5$ ,  $n_6$ .

Передаточное отношение обращенного механизма определится по формуле

$$i_{14}^H = \frac{n_1^H}{n_4^H} = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H}.$$



*a* – кинематическая схема механизма; *б* – план скоростей механизма; *в* – план частот вращения зубчатых колес механизма

Рисунок 12.2 – Графический метод кинематического анализа

Верхний индекс *H* указывает, что параметры относятся к обращенному механизму. Передаточное отношение  $i_{14}^H$  выразим через числа зубьев колес:

$$i_{14}^H = \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( \frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{40}{112} \cdot \frac{90}{18} = 1,786.$$



Подставляя значение  $i_{14}^H = 1,786$  в предыдущее выражение, найдем частоту вращения колеса 4:

$$1,786 = \frac{0 - 1800}{n_4 - 1800},$$

откуда  $n_4 = 791,873 \text{ мин}^{-1}$ .

Частоту вращения колеса 6 определим из выражения

$$i_{56} = -\frac{z_6}{z_5} = \frac{n_5}{n_6};$$

$$n_6 = -\frac{n_5 \cdot z_5}{z_6} = -\frac{791,9 \cdot 8}{26} = -243,6 \text{ мин}^{-1}.$$

Для определения частоты вращения колеса 2 запишем формулу Виллиса для первой ступени планетарного механизма:

$$i_{12}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H}; \quad i_{12}^H = \frac{z_2}{z_1};$$

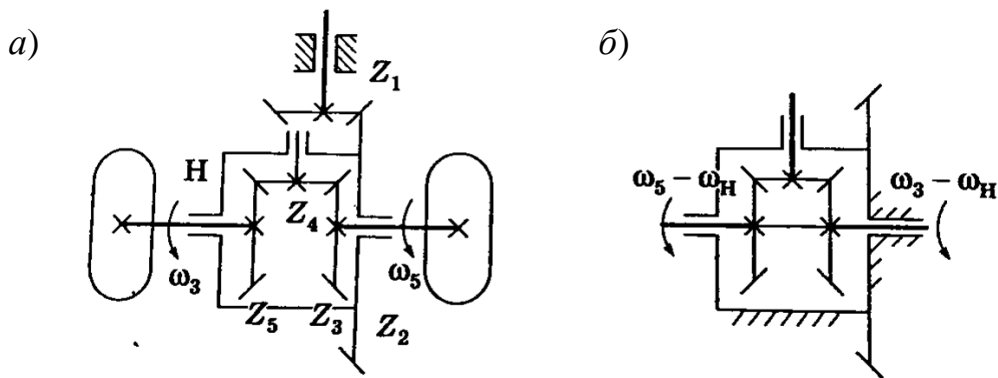
$$\frac{40}{112} = \frac{0 - 1800}{n_2 - 1800};$$

$$n_2 = -3240 \text{ мин}^{-1}.$$

### 13 Практическое занятие № 13. Синтез зубчатых механизмов

Метод кинематического исследования планетарных механизмов применим и к анализу дифференциальных зубчатых механизмов. Одним из наиболее известных механизмов является автомобильный дифференциальный механизм (рисунок 13.1). Его назначение – передача движения от карданного вала автомобиля к колесам. Механизм, представленный на рисунке 13.1, *а*, включает главную передачу, образованную коническими колесами  $Z_1$  и  $Z_2$ , корпус дифференциала, являющийся в то же время водилом дифференциального механизма, несколько сателлитов  $Z_4$  и два центральных колеса  $Z_3$  и  $Z_5$ , жестко посаженных на полуоси колес.

Применим к этому механизму принцип обращенного движения, сообщив всем звеньям механизма дополнительную скорость  $\omega_h$ . На рисунке 13.1, *б* изображена схема обращенного механизма.



*a* – дифференциальный механизм; *б* – обращённый механизм

Рисунок 13.1 – Автомобильный дифференциал

Для него можно записать

$$i_{35}^h = \frac{\omega_3 - \omega_h}{\omega_5 - \omega_h} = \frac{z_5}{z_3}. \quad (13.1)$$

Поскольку  $Z_5 = Z_3$ ,  $i = -1$ . Знак «минус» указывает на то, что колеса  $Z_3$  и  $Z_5$  в обращенном механизме вращаются в противоположном направлении. Произведя подстановку, получим уравнение автомобильного дифференциала

$$\omega_3 + \omega_5 = 2\omega_h. \quad (13.2)$$

При движении по прямому участку дороги  $\omega_3 = \omega_5 = \omega_h$ , следовательно, дифференциал как бы жестко связывает полуоси, происходит кинематическая блокировка дифференциала. Совершенно по-другому ведет себя дифференциал при движении по закруглению. Внешнее колесо движется с большей угловой скоростью, чем внутреннее, но так, что их средняя скорость равна скорости водила. Если бы колеса были связаны жесткой осью, происходила бы пробуксовка одного или обоих колес, что ухудшало бы условия эксплуатации автомобиля.

В том случае, когда одно колесо свободно пробуксовывает, второе колесо неподвижно, при этом скорость буксующего колеса равна  $2\omega_h$ . В этих условиях автомобиль не может двигаться. В таких случаях применяют механическую блокировку дифференциала.

### **Контрольные вопросы**

- 1 В чем отличие планетарного и дифференциального механизмов?
- 2 Почему дифференциальные механизмы не обладают определенным передаточным отношением?
- 3 Каким образом можно получить планетарный механизм из дифференциального?
- 4 Определите степень подвижности дифференциального механизма.
- 5 Запишите условие соосности для дифференциального механизма.

## 14 Практическое занятие № 14. Синтез планетарных механизмов

Задача синтеза планетарного механизма заключается в назначении чисел зубьев зубчатых колес с учетом условий обеспечения требуемого передаточного отношения, соосности, сборки и соседства, отсутствия подрезания.

Условие соосности обеспечивает совпадение осей вращения центральных зубчатых колес и водила, иначе механизм заклинит.

Условие соседства сателлитов выражается в том, что соседние сателлиты не должны касаться друг друга окружностями вершин.

Условие сборки заключается в том, что при сборке после установки первого сателлита может оказаться, что остальные сателлиты установить нельзя. Это происходит потому, что поставленный первым сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес.

Условие отсутствия подрезания колес с внешними зубьями обеспечивается, если для всех колес с внешними зубьями число зубьев не меньше 17.

Рассмотрим методику синтеза планетарного механизма, ограничиваясь соблюдением условия заданного передаточного отношения и условия соосности. Дана схема механизма (рисунок 14.1), для которой надо подобрать числа зубьев, обеспечивающие  $i_{1H} = 10$ .

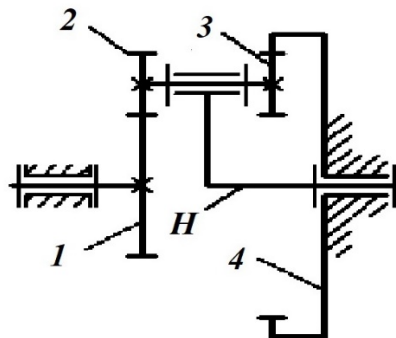


Рисунок 14.1 – Схема планетарного механизма

Определяем передаточное отношение соответствующего обращенного механизма:

$$i_{14}^H = 1 - i_{1H} = 1 - 10 = -9.$$

Разложим полученное передаточное отношение на множители. Здесь возможны разнообразные варианты, например:

$$i_{14}^H = \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( -\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{9}{1} = -\frac{2 \cdot 9}{2 \cdot 1}.$$

Запишем условие соосности для данного вида механизма и проверим его выполнение для принятых чисел зубьев:

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3;$$

$$2 + 2 = 4;$$

$$9 - 1 = 8.$$

Очевидно, что условие соосности не выполняется ( $4 \neq 8$ ). Для выполнения условия соосности и обеспечения минимального числа зубьев колес необходимо умножить верхнюю формулу на 34, а нижнюю – на 17.

$$68 + 68 = 136;$$

$$153 - 17 = 136.$$

Таким образом, получаем числа зубьев из условия соосности  $z_1 = 68$ ,  $z_2 = 68$ ,  $z_3 = 17$ ,  $z_4 = 153$ .

### ***Контрольные вопросы***

- 1 В чем заключается методика синтеза планетарного механизма с учетом условий соосности, соседства и сборки?
- 2 Какие названия имеют звенья планетарного механизма?
- 3 Приведите примеры планетарных механизмов.

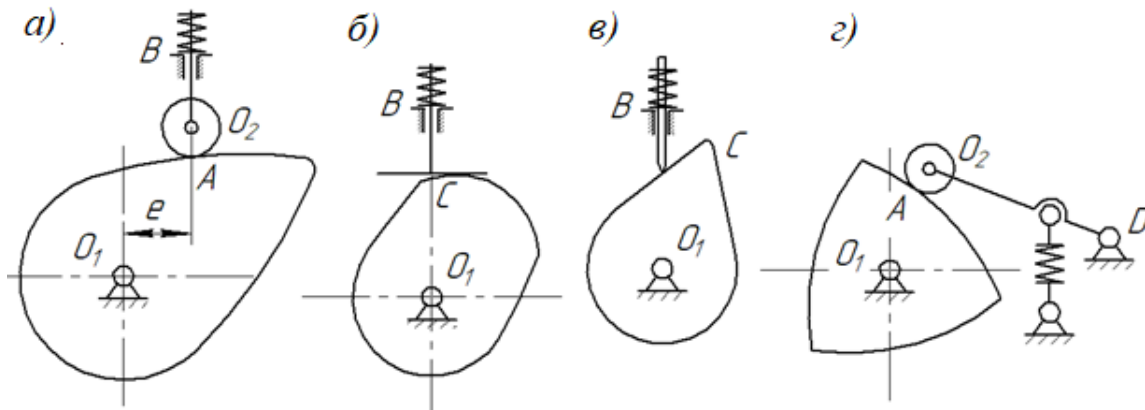
## **15 Практическое занятие № 15. Анализ и синтез кулачковых механизмов**

Кулачковым механизмом называется механизм, в состав которого входит кулачок. Кулачком называется звено, имеющее элемент высшей пары, выполненной в виде поверхности переменной кривизны.

Простейший кулачковый механизм состоит из трёх звеньев: входного звена – кулачка  $1$ , совершающего вращательное движение, выходного звена  $3$  – толкателя или колебателя и стойки  $0$  (рисунок 15.1,  $a-v$ ). Выходное звено в кулачковом механизме называется толкателем при возвратно-поступательном его движении или коромыслом (колебателем) при возвратно-колебательном движении. Для уменьшения трения о поверхность кулачка выходное звено часто снабжают роликом  $2$  (рисунок 15.1,  $a, z$ ).

Постоянное соприкосновение звеньев в кулачковой паре обеспечивается замыканием силовым или геометрическим (пазовый кулачок, рамочный толкатель и т. п.). По форме элементов кинематической пары выходные звенья

могут быть остроконечные, роликовые, плоские (тарельчатые), сферические (грибовидные) и др.



*a* – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; *б* – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем; *в* – центральный кулачковый механизм с игольчатым толкателем; *г* – кулачковый механизм с роликовым колебателем

Рисунок 15.1 – Кинематические схемы кулачковых механизмов

Кулачковый механизм называется центральным, если ось толкателя проходит через центр вращения кулачка ( $e = 0$ ), и дезаксиальным, если ось толкателя смещена относительно центра вращения кулачка на некоторую величину  $e$ , называемую дезаксиалом (см. рисунок 15.1, *б*, *в*).

Достоинством кулачковых механизмов является способность воспроизводить движения выходных звеньев по сложным законам. Наличие высшей пары, обуславливающей значительные удельные давления, вызывающие повышенный износ элементов пары, а также необходимость замыкания пары относятся к недостаткам кулачковых механизмов.

Профилем кулачка называется кривая, полученная в сечении элемента кулачка плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения.

Профиль кулачка  $l$ , которого касается ролик, называется действительным. Траектория центра ролика  $2$  при движении его относительно кулачка называется центровой профилем. Центральной и действительный профили кулачка являются эквидистантными (равноотстоящими) кривыми (рисунок 15.2).

Минимальный радиус кулачка  $R_0$  – радиус-вектор, соединяющий центр вращения кулачка с ближайшей точкой профиля кулачка (см. рисунок 15.2). Различают минимальный радиус  $R_0$  действительного профиля и минимальный радиус  $R'_0$  центрального профиля кулачка:

$$R'_0 = R_0 + r_p,$$

где  $r_p$  – радиус ролика.

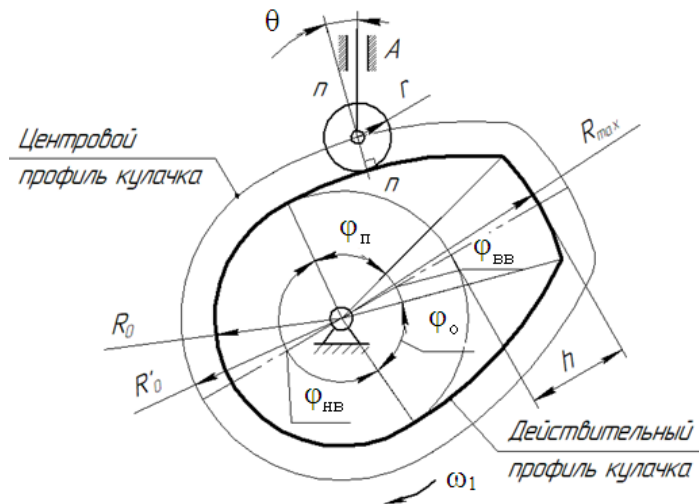


Рисунок 15.2 – Геометрические параметры кулачка

Максимальный радиус кулачка  $R_{\max}$  – радиус-вектор, соединяющий центр вращения кулачка с самой удалённой точкой профиля.

Подъём толкателя  $h$  – разность длин максимального  $R_{\max}$  и минимального  $R_0$  радиусов кулачка.

При вращении кулачка на один оборот различают такие фазы движения выходного звена, как фазы подъёма, верхнего выстоя, опускания, нижнего выстоя (или нерабочая фаза). Этим фазам соответствуют центральные углы поворота кулачка –  $\varphi_n, \varphi_{вв}, \varphi_o, \varphi_{нв}$ .

$$\varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_o + \varphi_{нв} = 360^\circ.$$

Сумма углов  $\varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_o = \varphi_p$  называется рабочим углом кулачка (см. рисунок 15.2).

Угол  $\theta$ , заключённый между нормалью  $nn$  к профилю кулачка в точке касания и направлением движения выходного звена, называется углом давления (см. рисунок 15.2).

Задачей кинематического анализа кулачковых механизмов является определение закона движения выходного звена по заданному закону движения кулачка и кинематической схеме механизма. Решение этой задачи обычным графическим методом планов связано с определёнными трудностями, а именно: в неоднократном вычерчивании схемы кулачкового механизма, соответствующей определённым углам поворота кулачка. Поэтому в основу анализа кулачковых механизмов положен другой метод – метод обращённого движения, который заключается в том, что мысленно всему механизму сообщают вращение вокруг центра вращения кулачка с угловой скоростью  $(-\omega_1)$ , равной, но противоположно направленной угловой скорости кулачка. Тогда кулачок становится как бы неподвижным, т. к.  $\omega_1 + (-\omega_1) = 0$ , а стойка  $O$  с выходным звеном  $3$  будут вращаться вокруг центра вращения кулачка  $O_1$  в противоположную сторону (рисунок 15.3). Относительное вращение звеньев от этого не изменится, а перемещение выходного звена  $S_i$  будет таким, как и в истинном

движении при неподвижной стойке. Например, для кулачкового механизма с роликовым толкателем (см. рисунок 15.3) перемещение толкателя в этом положении  $S_i$  представляет собой расстояние от окружности минимального радиуса  $R'_0$  кулачка до центрального профиля кулачка.

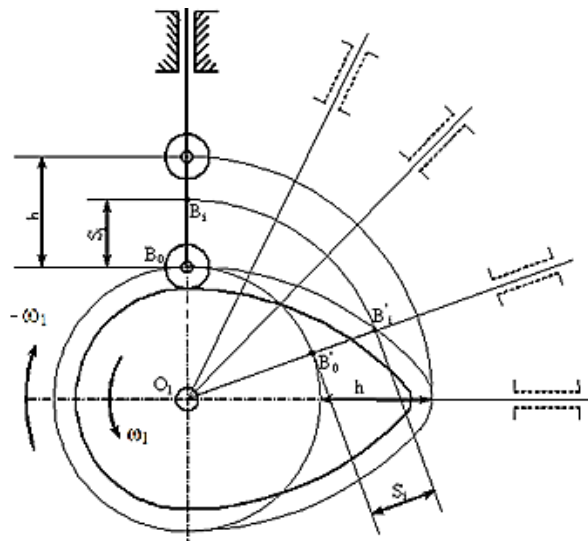


Рисунок 15.3 – Схема перемещения толкателя кулачкового механизма с роликовым толкателем

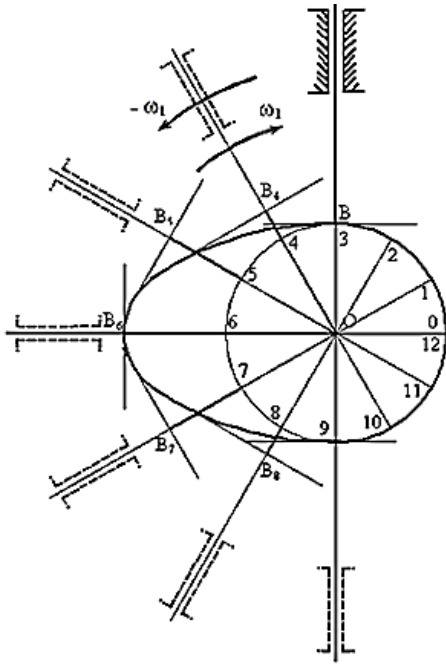
Таким образом, по кинематической схеме кулачкового механизма в обратном движении определяются ряд положений выходного звена и соответствующие им перемещения, а затем строится диаграмма перемещений  $S = f(\varphi)$  или  $\psi = f(\varphi)$ .

#### **Анализ кулачкового механизма с плоским толкателем.**

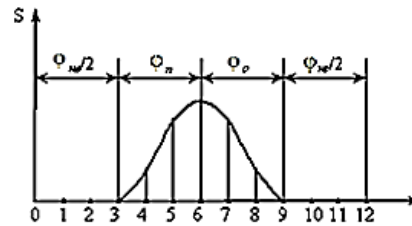
Используя метод обращённого движения, строим планы механизма, для чего окружность минимального радиуса кулачка делим на 12 равных частей и нумеруем точки деления (0, 1, ..., 12) в обратном движении (рисунок 15.4, а). Через точки деления из центра  $O$  проводим лучи ( $O-0$ ,  $O-1$ ,  $O-2$ , ...), которые и определяются текущими положениями оси толкателя в обратном движении механизма.

Плоскость тарелки в каждом положении перпендикулярна к оси толкателя и должна касаться профиля кулачка. Поэтому на планах механизма строим положение тарелки, проводим касательные к профилю, которые и определяют искомое положение плоскости тарелки. Расстояния (например,  $4-B_4$ ,  $5-B_5$  и т. п.) от окружности минимальным радиусом до соответствующего положения плоскости тарелки представляют собой перемещения толкателя, которые откладываем в масштабе в соответствующих положениях в направлении оси ординат на диаграмме  $S = f(\varphi)$  (рисунок 15.4, б).

а)



б)



а – кинематическая схема кулачкового механизма; б – диаграмма перемещения толкателя

Рисунок 15.4 – Анализ кулачкового механизма с плоским толкателем

### Контрольные вопросы

- 1 Основные геометрические параметры кулачка.
- 2 Что такое анализ кулачкового механизма? Объясните на примере кулачкового механизма с роликовым толкателем.
- 3 Что такое анализ кулачкового механизма? Объясните на примере кулачкового механизма с плоским толкателем.
- 4 Назовите схемы кулачковых механизмов.

## 16 Практическое занятие № 16. Расчет геометрии зубчатых колес

Исходными данными для расчета параметров являются число зубьев шестерни  $z_5$ , число зубьев колеса  $z_6$ , модуль  $m$ .

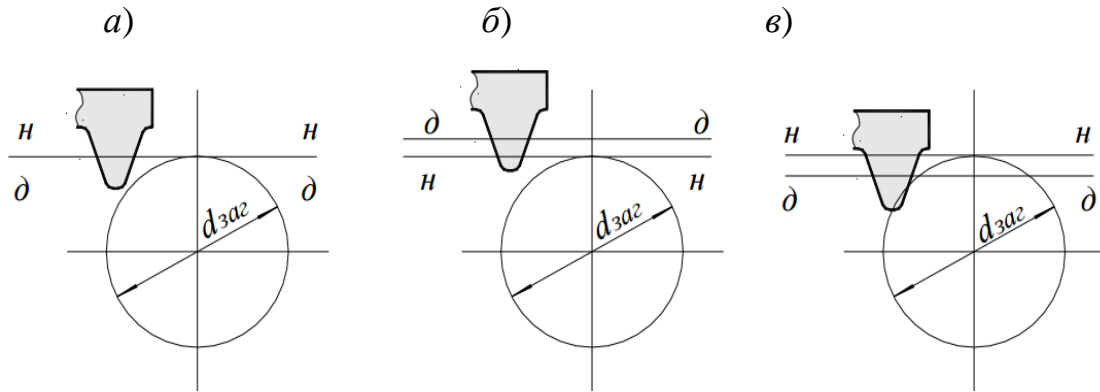
Нарезание производится по методу обкатки инструментом реечного типа, который профилируется на основе исходного контура по ГОСТ 13755–81.

Известно, что при нарезании по методу обкатки зубчатых колес с числом зубьев  $z < 17$  происходит подрезание ножки зуба, ослабление прочности зубчатого колеса и ухудшение других качественных показателей передачи. Подрезание не допускается. Избежать его можно соответствующей установкой режущего инструмента.

Если при нарезании делительная прямая рейки (прямая, по которой толщина зуба равна ширине впадины) касается делительной окружности нарезаемого



колеса, то такие зубчатые колеса называются колесами без смещения (рисунок 16.1, а), если не касается или пересекает делительную окружность, то такие колеса называются колесами со смещением. Смещение принимается положительным, если делительная прямая не пересекает делительную окружность нарезаемого колеса (рисунок 16.1, б), и отрицательным, если пересекает ее (рисунок 16.1, в). Положительное смещение дает возможность нарезания колес без подрезания ножки зуба.



а – нулевое смещение; б – положительное смещение; в – отрицательное смещение

Рисунок 16.1 – Виды смещения режущего инструмента

Если при расчете геометрических параметров руководствоваться только отсутствием подрезания ножки и возможностью сохранения делительного межосевого расстояния, то коэффициенты смещения будут выбираться следующим образом:

1) при  $z_{\Sigma} = z_5 + z_6 \geq 34$  коэффициент смещения шестерни определяется по формуле

$$X_5 = \frac{17 - z_5}{17},$$

а коэффициент смещения колеса  $X_6 = -X_5$ ;

2) при  $z_{\Sigma} < 34$  коэффициенты смещения обоих колес вычисляются по формулам

$$X_5 = \frac{17 - z_5}{17}; \quad X_6 = \frac{17 - z_6}{17};$$

3) при заданном требуемом межосевом расстоянии  $a_w$  определяется суммарный коэффициент смещения  $X_{\Sigma}$ , а затем  $X_5$  и  $X_6$ .

### **Пример выполнения задания**

Исходные данные:

– число зубьев шестерни  $z_5 = 8$ ;

- число зубьев колеса  $z_6 = 26$ ;
- модуль  $m = 3$  мм;
- угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ ;
- коэффициент высоты головки  $h_a^* = 1$ ;
- коэффициент радиального зазора  $c^* = 0,25$ .

### Решение

#### 1 Суммарное число зубьев

$$z = z_5 + z_6 = 8 + 26 = 34.$$

#### 2 Минимальные коэффициенты смещения

$$X_5 = \frac{17 - z_5}{17} = \frac{17 - 8}{17} = 0,53;$$

$$X_6 = -X_5 = -0,53.$$

#### 3 Угол профиля исходного контура $\alpha = 20^\circ$ .

#### 4 Угол зацепления $\alpha = \alpha_w = 20^\circ$ .

#### 5 Делительное межосевое расстояние

$$a = a_w = 0,5 \cdot m \cdot (z_5 + z_6) = 0,5 \cdot 3 \cdot (8 + 26) = 51 \text{ мм.}$$

#### 6 Межосевое расстояние $a_w = a = 51$ мм.

#### 7 Делительная высота головки зуба

$$h_{a5} = m \cdot (h_a^* + X_5) = 3(1 + 0,53) = 4,59 \text{ мм};$$

$$h_{a6} = m \cdot (h_a^* + X_6) = 3(1 - 0,53) = 1,41 \text{ мм.}$$

#### 8 Делительная высота ножки зуба

$$h_{f5} = m \cdot (h_a^* + c^* - X_5) = 3(1 + 0,25 - 0,53) = 2,16 \text{ мм};$$

$$h_{f6} = m \cdot (h_a^* + c^* - X_6) = 3(1 + 0,25 + 0,53) = 5,34 \text{ мм.}$$

#### 9 Высота зуба

$$h_5 = h_6 = h = 2,25 \cdot m = 2,25 \cdot 3 = 6,75 \text{ мм.}$$

#### 10 Делительные диаметры

$$d_5 = m \cdot z_5 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ мм};$$

$$d_6 = m \cdot z_6 = 3 \cdot 26 = 78 \text{ мм.}$$

### 11 Основной диаметр

$$d_{b5} = m \cdot z_5 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 8 \cdot \cos 20 = 22,55 \text{ мм;}$$

$$d_{b6} = m \cdot z_6 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 26 \cdot \cos 20 = 73,3 \text{ мм.}$$

### 12 Начальный диаметр

$$d_{w5} = d_5 = 24 \text{ мм;}$$

$$d_{w6} = d_6 = 78 \text{ мм.}$$

### 13 Диаметр вершин зубьев

$$d_{a5} = m \cdot z_5 + 2m \cdot (h_a^* + X_5) = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot (1 + 0,53) = 33,18 \text{ мм;}$$

$$d_{a6} = m \cdot z_6 + 2 \cdot m \cdot (h_a^* + X_6) = 3 \cdot 26 + 2 \cdot 3 \cdot (1 - 0,53) = 80,82 \text{ мм.}$$

### 14 Диаметр впадин зубьев

$$d_{f5} = m \cdot z_5 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^* - X_5) = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \cdot (1 + 0,25 - 0,53) = 19,68 \text{ мм;}$$

$$d_{f6} = m \cdot z_6 - 2 \cdot m \cdot (h_a^* + c^* - X_6) = 3 \cdot 26 - 2 \cdot 3 \cdot (1 + 0,25 + 0,53) = 67,32 \text{ мм.}$$

### 15 Начальная толщина зуба и делительная толщина зуба

$$S_5 = 0,5 \cdot \pi \cdot m + 2 \cdot m \cdot X_5 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 0,53 \cdot \operatorname{tg} 20 = 5,87 \text{ мм;}$$

$$S_6 = 0,5 \cdot \pi \cdot m + 2 \cdot m \cdot X_6 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (-0,53) \cdot \operatorname{tg} 20 = 3,55 \text{ мм.}$$

### 16 Основная толщина зуба

$$S_5 = d_{b5} \left( \frac{\pi}{2 \cdot z_5} + \frac{2 \cdot X_5 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z_5} + \operatorname{inv} \alpha \right) = 22,55 \cdot \left( \frac{3,14}{2 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 0,53 \cdot \operatorname{tg} 20}{8} + \operatorname{inv} 20 \right) = 5,85;$$

$$S_6 = d_{b6} \left( \frac{\pi}{2 \cdot z_6} + \frac{2 X_6 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z_6} + \operatorname{inv} \alpha \right) = 73,3 \cdot \left( \frac{3,14}{2 \cdot 26} + \frac{2 \cdot (-0,53) \cdot \operatorname{tg} 20}{26} + \operatorname{inv} 20 \right) = 4,43.$$

### 17 Угол профиля по окружности вершин

$$\alpha_{a5} = \arccos \frac{d_{b5}}{d_{a5}} = \arccos \frac{22,55}{33,18} = 47,19;$$

$$\alpha_{a6} = \arccos \frac{d_{b6}}{d_{a6}} = \arccos \frac{73,3}{80,82} = 24,91.$$

18 Толщина зуба по окружности вершин

$$S_{a5} = d_{a5} \left( \frac{S_5}{d_5} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_{a5} \right) = 33,18 \left( \frac{5,85}{24} + \operatorname{inv}20 - \operatorname{inv}47,19 \right) = 0,09 \text{ мм};$$

$$S_{a6} = d_{a6} \left( \frac{S_6}{d_6} + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_{a6} \right) = 80,82 \left( \frac{4,43}{78} + \operatorname{inv}20 - \operatorname{inv}24,91 \right) = 3,4 \text{ мм}.$$

19 Делительный шаг

$$P = \pi \cdot m = 3,14 \cdot 3 = 9,42 \text{ мм}.$$

20 Основной шаг

$$P_b = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha = 3,14 \cdot 3 \cdot \cos 20 = 8,85 \text{ мм}.$$

21 Радиус кривизны галтели

$$\rho = 0,38 \cdot m = 0,38 \cdot 3 = 1,14 \text{ мм}.$$

22 Начальный шаг

$$P_w = P = \pi \cdot m = 3,14 \cdot 3 = 9,42 \text{ мм}.$$

Проверка коэффициента торцового перекрытия:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{z_5 \operatorname{tg}\alpha_{a5} + z_6 \operatorname{tg}\alpha_{a6} - (z_5 + z_6) \operatorname{tg}\alpha_w}{2\pi} = \\ &= \frac{8 \cdot \operatorname{tg}47,19 + 26 \cdot \operatorname{tg}24,91 - (8 + 26) \cdot \operatorname{tg}20}{2 \cdot 3,14} = 1,33 \text{ мм}. \end{aligned}$$

## 17 Практическое занятие № 17. Построение картины эвольвентного зацепления

Зубчатые колеса, применяемые в машиностроении, имеют эвольвентный профиль зуба.

Эвольвента (развертка) окружности есть кривая, центры кривизны которой лежат на окружности. Эвольвента окружности полностью определяет геометрию зуба.

Основные параметры эвольвентного колеса следующие (рисунок 17.1):

- число зубьев  $z$ ;
- окружность впадин диаметром  $d_f$ ;
- окружность вершин диаметром  $d_a$ ;
- основная окружность диаметром  $d_b$ ;
- делительная окружность диаметром  $d$  (делит зуб на две части: головку и ножку);
- высота головки зуба  $h_a$ ;
- высота ножки зуба  $h_f$ ;
- высота зуба  $h = h_a + h_f$ ;
- толщина зуба  $S$ ;
- делительный шаг зубьев  $p$ ;
- модуль зубьев (отношение делительного шага к числу  $\pi$ )

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (17.1)$$

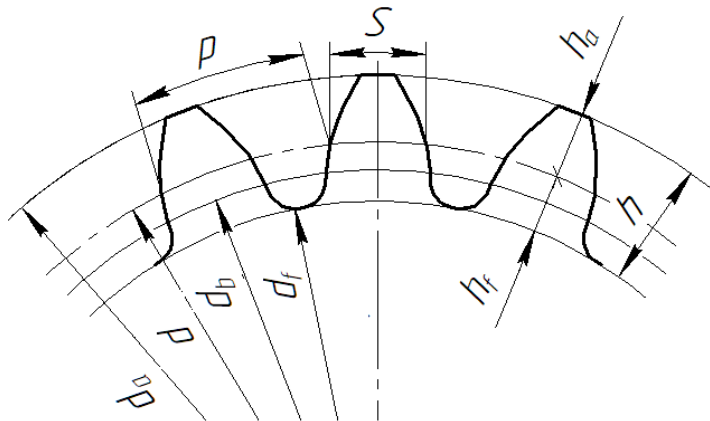


Рисунок 17.1 – Геометрические параметры эвольвентного зубчатого колеса

Модуль измеряется в миллиметрах и регламентирован ГОСТ 9563–74.

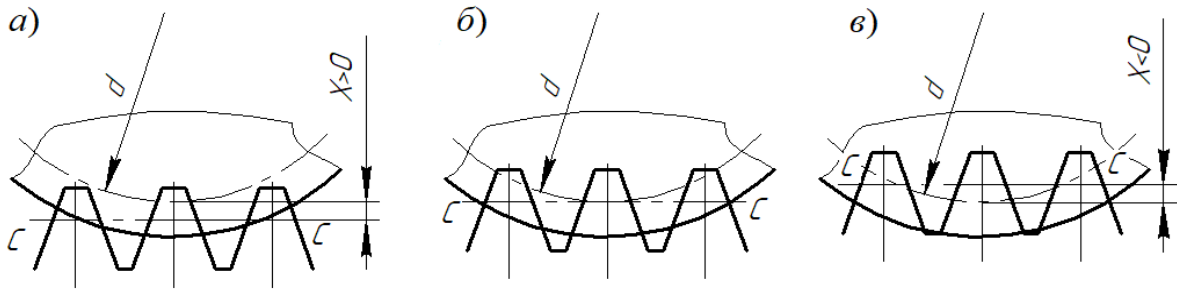
Для получения зубчатых передач меньших габаритов колеса должны иметь малые числа зубьев. Вместе с тем в процессе изготовления колес с числами зубьев  $z < 17$  часть зуба у основания срезается режущей кромкой инструмента. В результате получается колесо с подрезанным зубом. Подрез зуба ослабляет его

ножку и уменьшает эвольвентную часть профиля. Поэтому для устранения подрезания зубьев выполняют корригирование (смещение).

Смещением  $X$  (рисунок 17.2) называется расстояние между средней линией рейки  $CC$  и делительной окружностью:

$$X = x \cdot m, \quad (17.2)$$

где  $x$  – коэффициент смещения.



*a* – положительное смещение; *б* – нулевое колесо; *в* – отрицательное смещение

Рисунок 17.2 – Схемы колес со смещением

При нарезании колес средняя линия рейки  $CC$  может занимать три различные позиции по отношению к заготовке:

- 1) средняя линия  $CC$  катится без скольжения по делительной окружности  $x = 0$  (см. рисунок 17.2, *б*);
- 2) средняя линия  $CC$  смещена от центра колеса  $x > 0$  (см. рисунок 17.2, *а*);
- 3) средняя линия  $CC$  смещена к центру колеса  $x < 0$  (см. рисунок 17.2, *в*).

Различают три вида колес: нулевые, положительные, отрицательные.

Зубчатые колеса с  $z < 17$  проектируют только положительными. Минимальный коэффициент смещения инструмента рассчитывают из условия отсутствия подрезания по формуле

$$x = \frac{17 - z}{17}. \quad (17.3)$$

Максимальное смещение инструмента ограничено условием  $S_a \geq 0,3 m$ . В противном случае зуб может оказаться заостренным.

В процессе зацепления зубья касаются друг друга различными точками профиля (рисунок 17.3). Так как эти точки лежат на нормали к профилям, которая одновременно является касательной к обеим основным окружностям, то совокупность точек касания (линия  $ab$ ) совпадает с общей для обеих основных окружностей касательной  $NN$ . Эта линия называется теоретической линией зацепления, а линия  $ab$  – активной линией зацепления, где располагаются все точки контакта зубьев. Угол  $\alpha_W$ , измеряемый между нормалью  $NN$  к профилям в полюсе (см. рисунок 17.3) зацепления  $P$  и общей касательной к обеим начальным окружностям, называется углом зацепления.

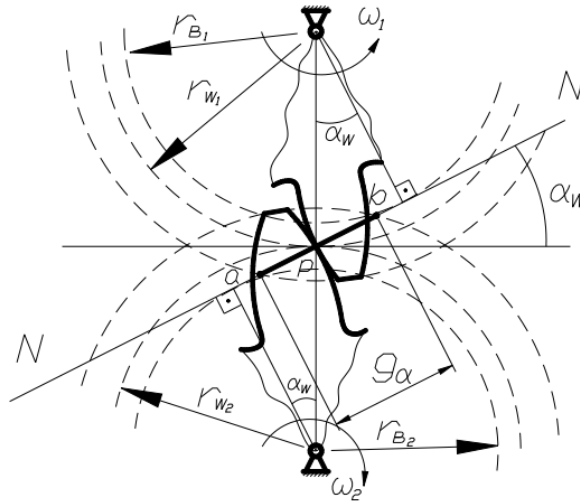


Рисунок 17.3 – Картина построения эвольвентного зацепления

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Что такое эвольвента и как она образуется?
- 2 Какие элементы эвольвентного колеса являются расчетными?
- 3 Что такое средняя линия рейки, смещение, модуль?
- 4 Какое колесо называют нулевым, положительным, отрицательным?
- 5 Как рассчитать размеры нулевого колеса, если известны  $m$  и  $z$ ?
- 6 Как рассчитать минимальную величину смещения?
- 7 Почему требуется выполнять условие  $S_a \geq 0,3 m$ ?

### **Список литературы**

- 1 **Комар, В. Л.** Теория механизмов и машин: учебное пособие / В. Л. Комар, А. П. Прудников. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – 334 с.
- 2 **Волков, В. В.** Теория механизмов и машин: учебник / В. В. Волков. – Старый Оскол: ТНТ, 2018. – 328 с.
- 3 **Леонов, И. В.** Теория механизмов и машин. Основы проектирования по динамическим критериям и показателям экономичности: учебник / И. В. Леонов. – Москва: Юрайт, 2018. – 239 с.