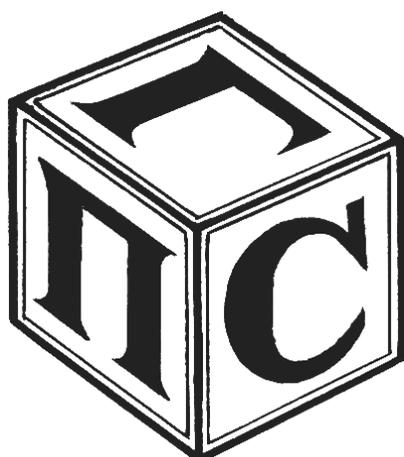


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Промышленное и гражданское строительство»

# ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности 7-06-0732-01 «Строительство»  
дневной и заочной форм обучения*



Могилев 2024

УДК 691.32:519.2  
ББК 38.626:22.172  
ПЗ7

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Промышленное и гражданское строительство»  
«28» марта 2024 г., протокол № 9

Составитель канд. техн. наук, доц. Ю. Г. Москалькова

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. В. Голушкова

В методических рекомендациях приведены теоретические и практические основы обработки опытных данных методами математической статистики и планирования эксперимента. Полученные знания закрепляются путем выполнения индивидуальных заданий, выдаваемых преподавателем в соответствии с темой магистерской диссертации.

Учебное издание

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Ответственный за выпуск	С. В. Данилов
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2024

## Содержание

Введение .....	4
1 Применение методов математической статистики для обработки опытных данных .....	5
1.1 Выбор исходных данных .....	5
1.2 Расчет характеристических значений прочности бетона .....	5
1.3 Определение модуля упругости и упругопластических характеристик бетона при кратковременном центральном сжатии .....	6
1.4 Определение опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений относительных деформаций ползучести (быстронатекающей или кратковременной), коэффициента пластичности и коэффициента упругости .....	10
1.5 Построение фактической диаграммы деформирования бетона ...	11
1.6 Построение теоретической кривой зависимости « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » согласно положениям EN 1992-1 .....	11
1.7 Исходные данные для выполнения индивидуального задания № 1 .....	16
2 Обеспеченность точности предлагаемой математической модели ..	22
2.1 Определение основных статистических параметров (математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации) .....	22
2.2 Нахождение абсцисс и ординат кривой нормального распределения .....	24
2.3 Построение гистограммы по опытным данным и кривой нормального распределения .....	25
2.4 Оценка близости эмпирических и теоретических распределений с помощью критериев согласия (нахождение критериев Пирсона, Романовского, Ястремского) .....	25
2.5 Оценка коэффициента вариации вектора ошибок предложенной математической модели согласно EN 1990 .....	27
3 Полный факторный эксперимент .....	34
3.1 Общие сведения о полном факторном эксперименте .....	34
3.2 Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий)..	37
3.3 Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения .....	38
3.4 Проверка значимости коэффициентов регрессии .....	38
3.5 Проверка адекватности полученной математической модели ....	39
4 Дробный факторный эксперимент. ....	42
4.1 Составление матрицы планирования ДФЭ .....	42
4.2 Определение смешанности оценок коэффициентов .....	42
4.3 Указания к выполнению индивидуального задания № 2 .....	44
Список литературы .....	45
Приложение А .....	46
Приложение Б .....	47

## Введение

Целью учебной дисциплины «Планирование эксперимента и статистическая обработка экспериментальных данных» является ознакомление студентов с теоретическими положениями и основами теории организации и планирования экспериментальных исследований, формирование навыков организации и планирования научной работы, проведения научного эксперимента и обработки его результатов. Дисциплина относится к циклу дисциплин специальной подготовки (компонент учреждения высшего образования), модуль «Специальные разделы естественно-научных и общеобразовательных дисциплин».

Планирование и организация эксперимента имеет большое научное и практическое значение, позволяя оптимизировать любой эксперимент с наименьшими затратами, что очень важно в организации как научного, так и практического эксперимента. Планирование эксперимента позволяет ускорить исследования, улучшить их качество и уменьшить трудоемкость. Его сущность состоит в выборе плана, удовлетворяющего заданным требованиям от начального до заключительных этапов изучения объекта исследования и реализуемого в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

Зная методы и принципы планирования эксперимента, специалист может использовать их при постановке и решении многообразных задач.

Задачами учебной дисциплины являются:

- изучение теоретических основ планирования и организации эксперимента, корреляционного и регрессионного анализа, факторного эксперимента;
- изучение современных методологических подходов к постановке и обработке результатов экспериментальных исследований и математических методов, применяемых при планировании и оптимизации эксперимента;
- формирование умения разрабатывать факторный план эксперимента и проведения дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа;
- формирование практических навыков выполнения научных экспериментальных исследований, обработки результатов экспериментов.

# 1 Применение методов математической статистики для обработки опытных данных

## 1.1 Выбор исходных данных

Испытание для определения показателей свойств бетона производится путем постепенного (ступенями) нагружения образцов-призм или образцов-цилиндров стандартных размеров осевой сжимающей нагрузкой до разрушения при определении призмной прочности с измерением в процессе нагружения образцов их деформации. Размеры образцов в зависимости от наибольшей крупности заполнителя должны удовлетворять требованиям [1].

Призмная прочность, модуль упругости и коэффициент Пуассона вычисляются по определенным в процессе испытания нагрузкам и продольным и поперечным относительным упругомгновенным деформациям, определяются на образцах-призмах квадратного сечения или цилиндрах круглого сечения с отношением высоты к ширине (диаметру), равным 4. Ширина (диаметр) образцов должна приниматься равной 70, 100, 150, 200 или 300 мм в зависимости от назначения и вида конструкций и изделий. За базовый принимают образец размерами 150 × 150 × 600 мм.

## 1.2 Расчет характеристических значений прочности бетона

Прочность бетона на сжатие  $f_c$ , МПа, вычисляют с точностью до 0,1 МПа по формуле

$$f_c = \alpha \frac{F}{A_c}, \quad (1.1)$$

где  $F$  – разрушающая нагрузка, измеренная по шкале силоизмерителя прессы (машины);

$A_c$  – среднее значение площади поперечного сечения образца, определяемое по его линейным размерам;

$\alpha$  – масштабный коэффициент, принимаемый по [1, таблица 4].

Модуль упругости вычисляют для каждого образца при уровне нагрузки, составляющей 40 % от разрушающей, по формуле

$$E'_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c}, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_c$  – напряжение в бетоне, МПа.

Коэффициент Пуассона бетона вычисляют для каждого образца при уровне нагрузки, составляющей 40 % от разрушающей, по формуле

$$\nu = \frac{\varepsilon_{2y}}{\varepsilon_{1y}}, \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon_{2y}$  – приращение упругомгновенной относительной поперечной деформации образца, соответствующее уровню нагрузки  $F = 0,4F$  и измеренное в начале каждой ступени ее приложения.

### 1.3 Определение модуля упругости и упругопластических характеристик бетона при кратковременном центральном сжатии

Величиной, выражающей прямолинейную зависимость между двумя свойствами, является коэффициент корреляции, обозначаемый буквой  $r$  и колеблющейся в пределах  $-1 \leq r \leq +1$ . Знак «+» указывает на положительную связь, а знак «-» – на отрицательную. При  $r = 1$  имеется функциональная зависимость между исследуемыми свойствами. При  $r = 0$  связь или отсутствует, или имеет криволинейный характер. Таким образом, чем ближе коэффициент корреляции к единице, тем лучше связь между изучаемыми свойствами.

Коэффициент корреляции  $r$  вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_1^n (X_c \cdot Y_c)}{\sqrt{\sum_1^n X_c^2 \cdot \sum_1^n Y_c^2}}, \quad (1.4)$$

где  $\sum_1^n (X_c \cdot Y_c)$  – сумма произведений отклонений отдельных вариантов  $V_x, V_y$  того  $X$  и другого  $Y$  свойств от соответствующих им средних арифметических  $M_x$  и  $M_y$ ;  $n$  – число наблюдений (вариант каждого ряда).

$$\sum_1^n (X_c \cdot Y_c) = \sum_1^n [(V_x - M_x) \cdot (V_y - M_y)]; \quad (1.5)$$

$$\sum_1^n X_c^2 = \sum_1^n (V_x - M_x)^2; \quad (1.6)$$

$$\sum_1^n Y_c^2 = \sum_1^n (V_y - M_y)^2; \quad (1.7)$$

$$M_x = \frac{\sum_1^n V_x}{n}; \quad (1.8)$$

$$M_y = \frac{\sum_1^n V_y}{n}. \quad (1.9)$$

## Средняя ошибка коэффициента корреляции

$$m_r = \pm \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}. \quad (1.10)$$

Достоверность коэффициента корреляции (линейного корреляционного уравнения или связи) оценивается отношением коэффициента корреляции  $r$  к его средней ошибке  $m_r$ . Если это отношение равно 4 или больше, то коэффициент корреляции считается достоверным и наличие связи между двумя свойствами является доказанной, в противном случае нельзя сделать заключения о достоверности связи между изучаемыми свойствами. То есть линейная корреляционная зависимость достоверна, если

$$\frac{|r|}{|m_r|} \geq 4. \quad (1.11)$$

Величины  $r$  и  $r/m_r$  указывают на количественную оценку связи между двумя величинами, но не выражают эту связь в виде уравнения.

При экспериментально-статистических исследованиях по выявлению зависимости между двумя величинами  $X$  и  $Y$  одной из величин (например, напряжению  $X = \sigma_c$ ) дают различные значения, а значения другой величины (например, секущего модуля деформаций бетона  $Y = E_c'$ ) определяют опытным путем. В этом случае величина  $X = \sigma_c$  является уже не статистической, а независимой переменной, заданной без ошибки. Величина  $Y = E_c'$ , являющаяся зависимой переменной, определяется в результате опыта, и поэтому она неизбежно будет иметь разные значения. Например, в разных образцах-близнецах при установлении уравнения связи в этом случае для величины  $Y = E_c'$  нужно взять ее средние значения (например, в одной призме по показаниям четырех измерителей деформаций), соответствующие заданным значениям величины  $X = \sigma_c$ .

Линейное корреляционное уравнение выражается формулой

$$Y = M_y + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (X - M_x) = M_y + r \sqrt{\frac{\sum_1^n Y_c^2}{\sum_1^n X_c^2}} \cdot (X - M_x), \quad (1.12)$$

где  $r$  – коэффициент корреляции;

$\sigma_x, \sigma_y$  – средние квадратические отклонения,

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^n X_c^2}{n-1}}; \quad \sigma_y = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^n Y_c^2}{n-1}}. \quad (1.13)$$

Математическое ожидание  $M_x, M_y$  дает представление о средней величине изучаемого свойства, а среднеквадратическое отклонение  $\sigma_x, \sigma_y$  характеризует среднюю изменчивость изучаемого свойства и имеет ту же размерность, что и  $M_x, M_y$ .

Для нормального закона распределения математическое ожидание определяется как среднее арифметическое.

Средняя ошибка линейного корреляционного уравнения (1.12), определяющая возможную его погрешность, вычисляется по формуле

$$m_{xy} = \pm \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = \pm \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 1} \cdot \sum_1^n Y_c^2}. \quad (1.14)$$

Статистические величины  $\sigma_y, m_{xy}$  служат для оценки надежности полученного линейного корреляционного уравнения (1.12).

Если необходимо определить  $X$  по  $Y$ , то нельзя это делать алгебраически из линейного корреляционного уравнения (1.12). В этом случае надо составить новое уравнение, приняв  $Y$  за независимую переменную величину, а  $X$  за зависимую переменную, т. е.

$$X = M_x + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (Y - M_y); \quad (1.15)$$

$$m_{xy} = \pm \sigma_x \sqrt{1 - r^2}. \quad (1.16)$$

Расчет удобно производить в табличной форме (таблицы 1.1–1.3).

Для вычисления коэффициента корреляции составляется таблица 1.2. В этой таблице за варианты  $V_x$  принято  $\sigma$ , а за варианты  $V_y - E'$  (опытные значения). В таблице 1.2 показаны также последовательность вычислений и их результаты.

По полученным в таблице 1.2 результатам находим величину  $\sum_1^n (X_c \cdot Y_c)$  по формуле

$$\sum_1^n (X_c \cdot Y_c) = \frac{\sum_1^n Z_c^2 - \sum_1^n X_c^2 - \sum_1^n Y_c^2}{2}. \quad (1.17)$$

Согласно (1.12) линейное корреляционное уравнение связи ( $E_c' - \sigma_c$ ) будет иметь следующий вид:

$$E_c' = a - b \cdot \sigma_c, \quad (1.18)$$

где  $a$  и  $b$  – переменные в уравнении;  
 $\sigma_c$  – напряжения в бетоне, МПа.

Таблица 1.1 – Сопоставление опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений продольных относительных деформаций  $\varepsilon_c$ , секущего модуля деформаций  $E_c'$ , касательного модуля деформаций  $E_c$  и коэффициента упругости бетона  $\nu_c$

Опытная величина (по показаниям приборов)		Теоретическая величина (корреляционные)			Отклонение теоретических величин от опытных, %		
$\sigma_c$ , МПа	$\varepsilon_c \cdot 10^{-5}$	$E_c'$ , $10^4$ МПа	$E_c$ , $10^4$ МПа	$\nu_c$	$\Delta E_c$	$\Delta E_c', \Delta \nu_c$	$\Delta E_c$
Исход- ные данные	$\frac{\sigma_{ci}}{f_c}$	Исход- ные данные	$\frac{\sigma_{ci}}{\varepsilon_c}$	$E_c' \cdot \nu_c$	$\frac{E'_{ci}}{E'_{cl}}$	$\frac{E'_{ci}}{E'_{cl}}$	$\frac{E'_{ci}}{E'_{cl}}$
Формулы для расчета							
		$\sigma_c \cdot 10$	$M_y - r \cdot (\sigma_c - M_x) \cdot \sqrt{\frac{\sum Y^2}{\sum X^2}}$	$E_c' \cdot \nu_c$	$\frac{E'_{ci}}{E'_{cl}}$	$\frac{E'_{ci}}{E'_{cl}}$	$\frac{(E_{c теор} - E_{c оп})}{E_{c теор}} \cdot 100 \%$

Таблица 1.2 – К вычислению коэффициента корреляции

$V_x$ , МПа	$\varepsilon_c \cdot 10^{-5}$	$V_y$ , $10^4$ МПа	$X_c$	$X_c^2$	$Y_c$	$Y_c^2$	$Z_c$	$Z_c^2$
Формулы для расчета								
$\sum V_x \cdot M_x = \frac{\sum V_x}{n}$		$\sum V_y \cdot M_y = \frac{\sum V_y}{n}$	$\sum X_c$	$\sum X_c^2$	$\sum Y_c$	$\sum Y_c^2$	$\sum Z_c$	$\sum Z_c^2$
$V_x = \sigma_c$	$\varepsilon_c$ (из таб- лицы 1.1)	$E' = \sigma_c / \varepsilon_c$	$M_x - V_x$	$X_c^2$	$M_y - V_y$	$Y_c^2$	$X_c + Y_c$	$Z_c^2$

Таблица 1.3 – Сопоставление опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений относительных деформаций быстронатекающей (кратковременной) ползучести  $\varepsilon_{pl}$ , коэффициента пластичности  $\lambda_c$ , характеристики  $\phi$  и удельной  $C$  быстронатекающей (кратковременной) ползучести бетона

Опытная величина		Теоретическая величина (корреляционные)			Отклонение теоретических значений от опытных, %						
$\sigma_c$ , МПа	$\eta$	$\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-5}$	$\lambda_c$	$\phi$	$C, 10^{-5}$ МПа $^{-1}$	$\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-5}$	$\lambda_c$	$\phi$	$C, 10^{-5}$ МПа $^{-1}$	$\Delta \varepsilon_{pl}, \Delta \phi, \Delta C$	$\Delta \lambda_c$
Формулы для расчета											
Исходные данные	$\sigma_{ci} / f_c$	$\lambda_{ci} \cdot \varepsilon_{оп, i}$	$1 - \nu_c$	$\lambda_c / \nu_c$	$\varepsilon_{pl} / \sigma_c$	$\lambda_{ci} \cdot \varepsilon_{теор, i}$	$1 - \nu_c$	$\lambda_c / \nu_c$	$\varepsilon_{pl} / \sigma_c$	$\frac{(\varepsilon_{pl теор} - \varepsilon_{pl оп})}{\varepsilon_{pl теор}} \cdot 100$	$\frac{(\lambda_{теор} - \lambda_{оп})}{\lambda_{теор}} \cdot 100$

Секущий модуль деформаций бетона в зависимости от его граничных значений

$$E'_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c}. \quad (1.19)$$

Зависимость «напряжение – секущий модуль деформаций» (« $\sigma_c - E'_c$ ») при сжатии призматических образцов, загружаемых с постоянной скоростью нагружения, является линейной вплоть до разрушения бетонного образца, то есть

$$E'_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = E_{c0} - \frac{E_{c0} - E'_c}{f_c} \cdot \sigma_c. \quad (1.20)$$

#### ***1.4 Определение опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений относительных деформаций ползучести (быстронатекающей или кратковременной), коэффициента пластичности и коэффициента упругости***

Упругопластические характеристики бетона при текущем напряжении кратковременного центрального сжатия  $0 \leq \sigma_c \leq f_c$  (коэффициенты упругости  $\nu_c$ , пластичности  $\lambda_c$ , характеристика  $\varphi$  и удельная деформация  $C$  быстронатекающей (кратковременной) ползучести, удельные упругие  $\delta_{el}$  и полные  $\delta$  силовые деформации), выраженные через секущий модуль деформации  $E'_c$  по (1.20) и их взаимосвязь:

$$\nu_c = \frac{\varepsilon_{el}}{\varepsilon_c} = 1 - \lambda_c = \frac{1}{1 + \varphi} = \frac{1}{1 + E_{c0} \cdot C} = \frac{E'_c}{E_{c0}}; \quad (1.21)$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_c} = 1 - \nu_c = \frac{\varphi}{1 + \varphi} = 1 - \frac{E'_c}{E_{c0}}; \quad (1.22)$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{el}} = \frac{\lambda_c}{\nu_c} = E_{c0} \cdot C = \frac{E_{c0}}{E'_c} - 1; \quad (1.23)$$

$$C = \frac{\varepsilon_{pl}}{\sigma_c} = \delta - \delta_{el} = \frac{\varphi}{E_{c0}} = \frac{1}{E'_c} - \frac{1}{E_{c0}}; \quad (1.24)$$

$$\delta_{el} = \frac{\varepsilon_{el}}{\sigma_c} = \frac{1}{E_{c0}}; \quad (1.25)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon_c}{\sigma_c} = \frac{1}{E'_c}. \quad (1.26)$$

Коэффициенты упругости  $\nu_c$  и пластичности  $\lambda_c$  так же, как и  $E_c'$ , находятся в линейной зависимости от уровня напряжений  $\eta = \frac{\sigma_c}{f_c}$ , а остальные параметры бетона – в нелинейной зависимости.

Таким образом, при помощи линейного корреляционного анализа зависимости « $E_c' - \sigma_c$ » можно оценить в аналитической форме зависимость « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » и другие упругопластические характеристики бетона при центральном сжатии.

### ***1.5 Построение фактической диаграммы деформирования бетона***

Наиболее простым способом первичного определения связи между двумя свойствами является способ графического изображения результатов вычислений. Откладывая по оси абсцисс данные одного свойства (напряжения), а по оси ординат, соответствующие им значения другого свойства (относительные деформации  $\varepsilon_c$  и  $E_c'$ ), получают группу точек. Так как на исследуемые зависимости « $\sigma_c - \varepsilon_c$ », « $E_c' - \sigma_c$ » оказывают влияние неизвестные и не подлежащие учету факторы (неоднородность бетона по сечению, неточность снятия отсчетов по силоизмерителю и деформометрам), то точки на графиках « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » и « $E_c' - \sigma_c$ » будут разбросаны.

Корреляционная связь между двумя варьирующими свойствами сама по себе не определяет причины зависимости между ними. Корреляция устанавливает только величину связи между двумя свойствами, причинную же связь между ними нужно искать в самой сущности явления. Например, искривление диаграммы сжатия бетона « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » объясняется быстроснатекающими деформациями ползучести цементного камня, причем нелинейными деформациями.

### ***1.6 Построение теоретической кривой зависимости « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » согласно положениям EN 1992-1***

Приведенная на рисунке 1.1 зависимость между напряжением  $\sigma_c$  и относительной деформацией  $\varepsilon_c$  для кратковременного осевого нагружения (напряжение сжатия и относительные деформации укорочения показаны как абсолютные значения) описывается уравнением

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta}, \quad (1.27)$$

где  $\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$  (здесь  $\varepsilon_{c1}$  – относительная деформация при максимальном (пиковом) значении напряжения).

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}. \quad (1.28)$$

Уравнение действительно для интервала относительных деформаций  $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$ , где  $\varepsilon_{cu1}$  – номинальная предельная относительная деформация.

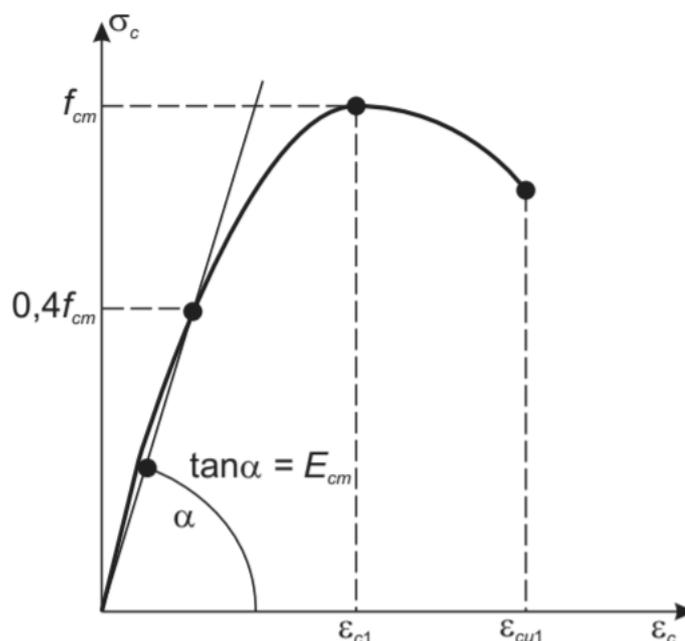


Рисунок 1.1 – График зависимости «напряжение – относительная деформация» для нелинейных расчетов конструкций (использование  $0,4f_{cm}$  для определения  $E_{cm}$  является приближением)

Другие идеализированные зависимости «напряжение – относительная деформация» могут быть применены в тех случаях, если они адекватно воспроизводят поведение бетона при нагружении.

**Пример** – Выполнить статистическую обработку данных методом линейно-корреляционного анализа при испытании образцов призм размерами  $150 \times 150 \times 600$  мм.

*Решение*

Расчет производится на основании опытных данных, представленных в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Исходные данные

Напряжение в бетоне $\sigma_c$ , МПа	Продольная относительная деформация $\varepsilon_{прод} \cdot 10^{-5}$	Поперечная относительная деформация $\varepsilon_{попер} \cdot 10^{-5}$
1	2	3
0	0	0
1,56	5,47	1,21
3,11	11,54	1,89
4,67	20,65	3,44
6,22	29,75	5,29
6,22	30,97	5,83

Окончание таблицы 1.4

1	2	3
7,78	40,1	7,86
7,78	43,75	8,59
9,33	51,06	10,36
9,33	55,69	11,44
10,89	66,65	13,96
10,89	70,55	15,37
12,44	81,51	17
12,44	90,4	21,92
14	100,4	26,9
14	111,12	31,53
14,67	115,64	36,88
14,67	121,73	38,96
16	132,69	45,64
16	146,7	55,17
17,33	161,92	68,52
18,67	180,83	78,99

Согласно опытным данным принимаем кратковременную прочность бетона  $f_c = 18,67$  МПа.

На основании опытных исходных данных составляем таблицу 1.5 и производим расчет по формулам, указанным в таблице 1.1.

Для вычисления коэффициента корреляции составляем таблицу 1.6. В этой таблице за варианты  $V_x$  принято  $\sigma_c$ , а за варианты  $V_y - E'$  (опытные значения). В таблице 1.6 показаны также последовательность вычислений и их результаты. Расчет производим по формулам, указанным в таблице 1.2.

По полученным в таблице 1.6 результатам находим величину  $\sum_1^n (X_c \cdot Y_c)$ :

$$\sum_1^n (X_c \cdot Y_c) = \frac{\sum_1^n Z_c^2 - \sum_1^n X_c^2 - \sum_1^n Y_c^2}{2} = -47,908.$$

Согласно формуле (1.4)  $r = 0,973231$  (близок к 1).

По формуле (1.10)  $m_r = \pm 0,011527$ .

По формуле (1.11)  $\frac{|r|}{|m_r|} = 84,43249 \geq 4$ , т. е. наличие линейной корреляцион-

ной зависимости между  $Y = E_c'$  и  $X = \sigma_c$  доказано с большой достоверностью.

Согласно формуле (1.12) линейное корреляционное уравнение связи « $E_c' - \sigma_c$ » будет следующим:

$$E_c' \cdot 10^4 = 1,654 - 0,9732 \cdot \sigma.$$

Таблица 1.5 – Сопоставление опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений продольных относительных деформаций  $\varepsilon_c$ , секущего модуля деформаций  $E_c'$ , касательного модуля деформаций  $E_c$  и коэффициента упругости бетона  $\nu_c$

Опытная величина (по показаниям приборов)						Теоретическая величина (корреляционная)						Отклонение теоретических величин от опытных		
$\sigma_c$ , МПа	$\eta$	$\varepsilon_c \cdot 10^{-5}$	$E_c'$ , $10^4$ МПа	$E_c$ , $10^4$ МПа	$\nu_c$	$\varepsilon_c \cdot 10^{-5}$	$E_c'$ , $10^4$ МПа	$E_c$ , $10^4$ МПа	$\nu_c$	$\Delta \varepsilon_c$ , %	$\Delta E_c'$ , $\Delta \nu_c$ , %	$\Delta E_c$ , %		
0,000	0,000	0,000	2,782	2,782	1,000	0,000	2,782	2,782	1,000	0,000	0,000	0,000		
1,560	0,084	5,470	2,852	2,923	1,025	5,954	2,620	2,468	0,942	8,125	-8,844	-18,470		
3,110	0,167	11,540	2,695	2,610	0,969	12,647	2,459	2,173	0,884	8,751	-9,591	-20,101		
4,670	0,250	20,650	2,262	1,838	0,813	20,331	2,297	1,896	0,826	-1,571	1,546	3,069		
6,220	0,333	29,750	2,091	1,571	0,751	29,121	2,136	1,640	0,768	-2,162	2,116	4,187		
6,220	0,333	30,970	2,008	1,450	0,722	29,121	2,136	1,640	0,768	-6,351	5,972	11,587		
7,780	0,417	40,100	1,940	1,353	0,697	39,416	1,974	1,400	0,709	-1,737	1,707	3,385		
7,780	0,417	43,750	1,778	1,137	0,639	39,416	1,974	1,400	0,709	-10,997	9,907	18,833		
9,330	0,500	51,060	1,827	1,200	0,657	51,468	1,813	1,181	0,652	0,793	-0,799	-1,605		
9,330	0,500	55,690	1,675	1,009	0,602	51,468	1,813	1,181	0,652	-8,203	7,581	14,587		
10,890	0,583	66,650	1,634	0,960	0,587	65,973	1,651	0,979	0,593	-1,025	1,015	2,020		
10,890	0,583	70,550	1,544	0,856	0,555	65,973	1,651	0,979	0,593	-6,937	6,487	12,553		
12,440	0,666	81,510	1,526	0,837	0,549	83,513	1,490	0,798	0,535	2,398	-2,457	-4,974		
12,440	0,666	90,400	1,376	0,681	0,495	83,513	1,490	0,798	0,535	-8,247	7,619	14,657		
14,000	0,750	100,400	1,394	0,699	0,501	105,462	1,327	0,633	0,477	4,800	-5,042	-10,339		
14,000	0,750	111,120	1,260	0,571	0,453	105,462	1,327	0,633	0,477	-5,364	5,091	9,924		
14,670	0,786	115,640	1,269	0,578	0,456	116,626	1,258	0,569	0,452	0,846	-0,853	-1,713		
14,670	0,786	121,730	1,205	0,522	0,433	116,626	1,258	0,569	0,452	-4,376	4,193	8,209		
16,000	0,857	132,690	1,206	0,523	0,433	142,901	1,120	0,451	0,402	7,146	-7,695	-15,983		
16,000	0,857	146,700	1,091	0,428	0,392	142,901	1,120	0,451	0,402	-2,658	2,590	5,112		
17,330	0,928	161,920	1,070	0,412	0,385	176,576	0,981	0,346	0,353	8,300	-9,051	-18,922		
18,670	1,000	180,830	1,032	0,383	0,371	221,681	0,842	0,255	0,303	18,428	-22,591	-50,285		

Таблица 1.6 – К вычислению коэффициента корреляции

$V_x, \text{МПа}$	$\varepsilon_c \cdot 10^{-5}$	$V_y, 10^4 \text{МПа}$	$X_c$	$X_c^2$	$Y_c$	$Y_c^2$	$Z_c$	$Z_c^2$
1,560	5,470	2,852	9,297	86,437	-1,198	1,435	8,099	65,599
3,110	11,540	2,695	7,747	60,018	-1,041	1,083	6,706	44,974
4,670	20,650	2,262	6,187	38,281	-0,607	0,369	5,580	31,133
6,220	29,750	2,091	4,637	21,503	-0,437	0,191	4,200	17,644
6,220	30,970	2,008	4,637	21,503	-0,354	0,126	4,283	18,343
7,780	40,100	1,940	3,077	9,469	-0,286	0,082	2,791	7,790
7,780	43,750	1,778	3,077	9,469	-0,124	0,015	2,953	8,720
9,330	51,060	1,827	1,527	2,332	-0,173	0,030	1,354	1,833
9,330	55,690	1,675	1,527	2,332	-0,021	0,000	1,506	2,268
10,890	66,650	1,634	0,033	0,001	0,020	0,000	-0,013	0,000
10,890	70,550	1,544	-0,033	0,001	0,110	0,012	0,078	0,006
12,440	81,510	1,526	-1,583	2,505	0,128	0,016	-1,455	2,117
12,440	90,400	1,376	-1,583	2,505	0,278	0,077	-1,305	1,703
14,000	100,400	1,394	-3,143	9,878	0,260	0,067	-2,883	8,313
14,000	111,120	1,260	-3,143	9,878	0,394	0,155	-2,749	7,555
14,670	115,640	1,269	-3,813	14,538	0,385	0,149	-3,427	11,747
14,670	121,730	1,205	-3,813	14,538	0,449	0,202	-3,364	11,316
16,000	132,690	1,206	-5,143	26,449	0,448	0,201	-4,695	22,039
16,000	146,700	1,091	-5,143	26,449	0,563	0,317	-4,579	20,971
17,330	161,920	1,070	-6,473	41,898	0,584	0,341	-5,889	34,681
18,670	180,830	1,032	-7,813	61,041	0,622	0,386	-7,191	51,714
$\sum V_x = 228,000;$ $M_x = \frac{\sum V_x}{n} =$ $= \frac{228,000}{21} = 10,857$		$\sum V_y = 34,736;$ $M_y = \frac{\sum V_y}{n} =$ $= \frac{34,736}{21} = 1,654$	$\sum X_c = 0$	$\sum X_c^2 = 461,024$	$\sum Y_c = 0$	$\sum Y_c^2 = 5,256$	$\sum Z_c = 0$	$\sum Z_c^2 = 370,465$

Граничные значения:

– при  $\sigma_c = 0$   $E_c' = E_{c0} = 27,8$  ГПа;

– при  $\sigma_c = f_c$   $E_c' = E'_{Rc} = 10,32$  ГПа.

Средняя ошибка линейного корреляционного уравнения:  $m_{xy} = \pm 1,208$  МПа.

Сопоставление опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений относительных деформаций быстронатекающей (кратковременной) ползучести  $\varepsilon_{pl}$ , коэффициента пластичности  $\lambda_c$ , характеристики  $\varphi$  и удельной  $C$  быстронатекающей (кратковременной) ползучести бетона приведено в таблице 1.7.

В таблицах 1.5, 1.7 и на рисунках 1.2–1.5 показано в численном виде и графически сопоставление теоретических (корреляционных) зависимостей « $\sigma_c - \varepsilon_c$ », « $E_c' - \sigma_c$ », « $E_c - \sigma_c$ », « $\nu_c - \sigma_c$ », « $\lambda_c - \sigma_c$ », « $C - \sigma_c$ », « $\varphi - \sigma_c$ », « $\delta - \sigma_c$ », « $\varepsilon_{pl} - \sigma_c$ » по вышеприведенным формулам при значении  $E_c'$  из линейного корреляционного уравнения (1.20) с опытными значениями вышеуказанных величин, полученным по тем же формулам, но при опытных значениях  $E_c'$ .

Как видно из рисунков 1.3 и 1.4, коэффициенты упругости  $\nu_c$  и пластичности  $\lambda_c$  так же, как и  $E_c'$ , находятся в линейной зависимости от уровня напряжений

$\eta = \frac{\sigma_c}{f_c}$ , а остальные параметры бетона – в нелинейной зависимости.

Значение начального модуля упругости бетона  $E_{c0} = 27,8$  ГПа.

Таким образом, при помощи линейного корреляционного анализа зависимости « $E_c' - \sigma_c$ » представилась возможность оценить в аналитической форме зависимость « $\sigma_c - \varepsilon_c$ » и другие упругопластические характеристики бетона при центральном сжатии.

Как видно из таблиц 1.5 и 1.7, максимальное отклонение теоретических значений искомых величин от опытных соответствует минимальному уровню напряжений  $\eta = 0,03025$ , что обусловлено большой погрешностью при оценке деформаций при малых уровнях напряжений. Зафиксировать деформации сжатия бетона в момент его разрушения очень трудно и не всегда удается. В силу вышеизложенного при установлении линейной корреляционной зависимости « $E_c' - \sigma_c$ » отсчеты по первой и последней (в момент разрушения) ступеням рекомендуется не учитывать.

### **1.7 Исходные данные для выполнения индивидуального задания № 1**

Выполнить статистическую обработку данных методом линейно-корреляционного анализа и построить опытные и теоретические диаграммы деформирования бетона по опытным данным, полученным в результате испытания стандартных бетонных образцов в виде призм с размерами  $150 \times 150 \times 600$  мм. Данные для обработки приведены в таблице 1.8 либо принимаются по результатам испытаний, выполненных в рамках работы над магистерской диссертацией.

Таблица 1.7 – Сопоставление опытных и теоретических (опытно-корреляционных) значений относительных деформаций быстронагатекающей (кратковременной) ползучести  $\varepsilon_{pl}$ , коэффициента пластичности  $\lambda_c$ , характеристики  $\phi$  и удельной быстронагатекающей (кратковременной) ползучести бетона  $C$

$\sigma_c$ , МПа	Опытные величины						Теоретические величины (корреляционные)				Отклонение теоретических значений опыта		
	$\eta$	$\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-5}$	$\lambda_c$	$\phi$	$C$ , $10^{-5}$ МПа $^{-1}$	$\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-5}$	$\lambda_c$	$\phi$	$C$ , $10^{-5}$ МПа $^{-1}$	$\Delta\varepsilon_{pl}$ , $\Delta\phi$ , $\Delta C$ , %	$\Delta\lambda_c$ , %		
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	–	0,000	0,000	0,000	–	–	–	–	
1,560	0,084	-0,137	-0,025	-0,024	-0,088	0,347	0,058	0,062	0,222	353,460	332,866		
3,110	0,167	0,362	0,031	0,032	0,116	1,469	0,116	0,131	0,472	-305,551	-270,060		
4,670	0,250	3,865	0,187	0,230	0,828	3,546	0,174	0,211	0,759	8,261	6,820		
6,220	0,333	7,394	0,249	0,331	1,189	6,765	0,232	0,303	1,088	8,513	6,535		
6,220	0,333	8,614	0,278	0,385	1,385	6,765	0,232	0,303	1,088	21,469	16,482		
7,780	0,417	12,138	0,303	0,434	1,560	11,453	0,291	0,410	1,472	5,639	4,001		
7,780	0,417	15,788	0,361	0,565	2,029	11,453	0,291	0,410	1,472	27,455	19,477		
9,330	0,500	17,527	0,343	0,523	1,879	17,935	0,348	0,535	1,922	-2,329	-1,517		
9,330	0,500	22,157	0,398	0,661	2,375	17,935	0,348	0,535	1,922	19,055	12,415		
10,890	0,583	27,510	0,413	0,703	2,526	26,833	0,407	0,686	2,464	2,459	1,459		
10,890	0,583	31,410	0,445	0,802	2,884	26,833	0,407	0,686	2,464	14,570	8,644		
12,440	0,666	36,799	0,451	0,823	2,958	38,802	0,465	0,868	3,119	-5,442	-2,914		
12,440	0,666	45,689	0,505	1,022	3,673	38,802	0,465	0,868	3,119	15,074	8,071		
14,000	0,750	50,082	0,499	0,995	3,577	55,144	0,523	1,096	3,939	-10,108	-4,823		
14,000	0,750	60,802	0,547	1,208	4,343	55,144	0,523	1,096	3,939	9,305	4,439		
14,670	0,786	62,914	0,544	1,193	4,289	63,900	0,548	1,212	4,356	-1,568	-0,709		
14,670	0,786	69,004	0,567	1,309	4,704	63,900	0,548	1,212	4,356	7,396	3,344		
16,000	0,857	75,184	0,567	1,307	4,699	85,395	0,598	1,485	5,337	-13,582	-5,466		
16,000	0,857	89,194	0,608	1,551	5,575	85,395	0,598	1,485	5,337	4,259	1,714		
17,330	0,928	99,634	0,615	1,600	5,749	114,289	0,647	1,835	6,595	-14,710	-5,189		
18,670	1,000	113,727	0,629	1,695	6,091	154,579	0,697	2,304	8,280	-35,920	-10,873		

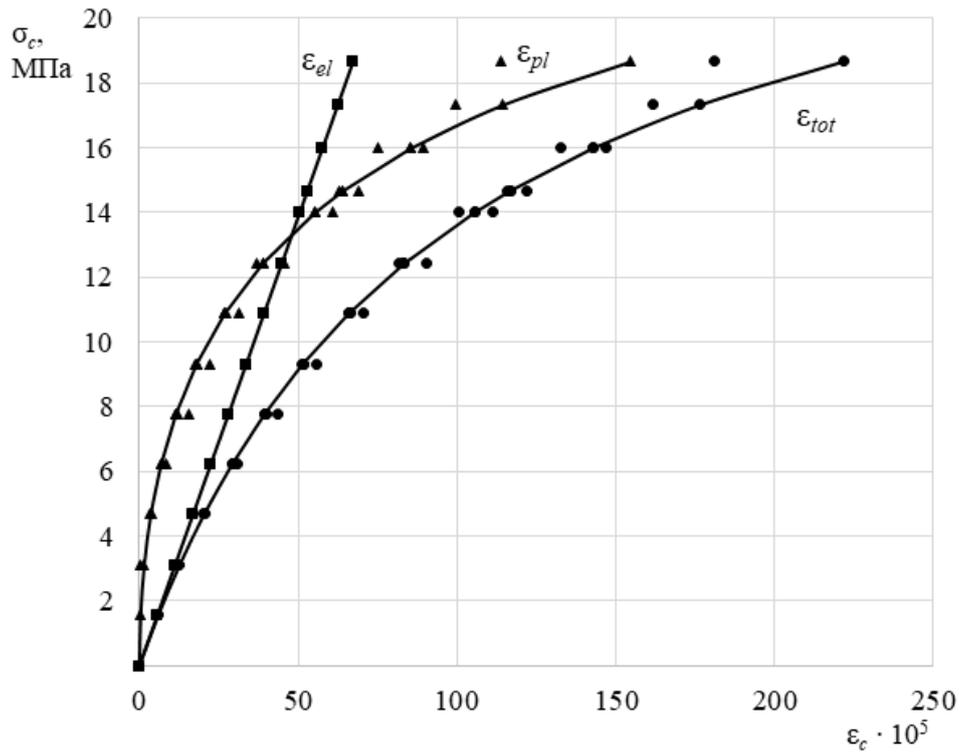


Рисунок 1.2 – Опытные и теоретические зависимости « $\sigma_c - \varepsilon_c$ »; « $\sigma_c - \varepsilon_{pl}$ »; « $\sigma_c - \varepsilon_{el}$ » согласно данным таблицы 1.5

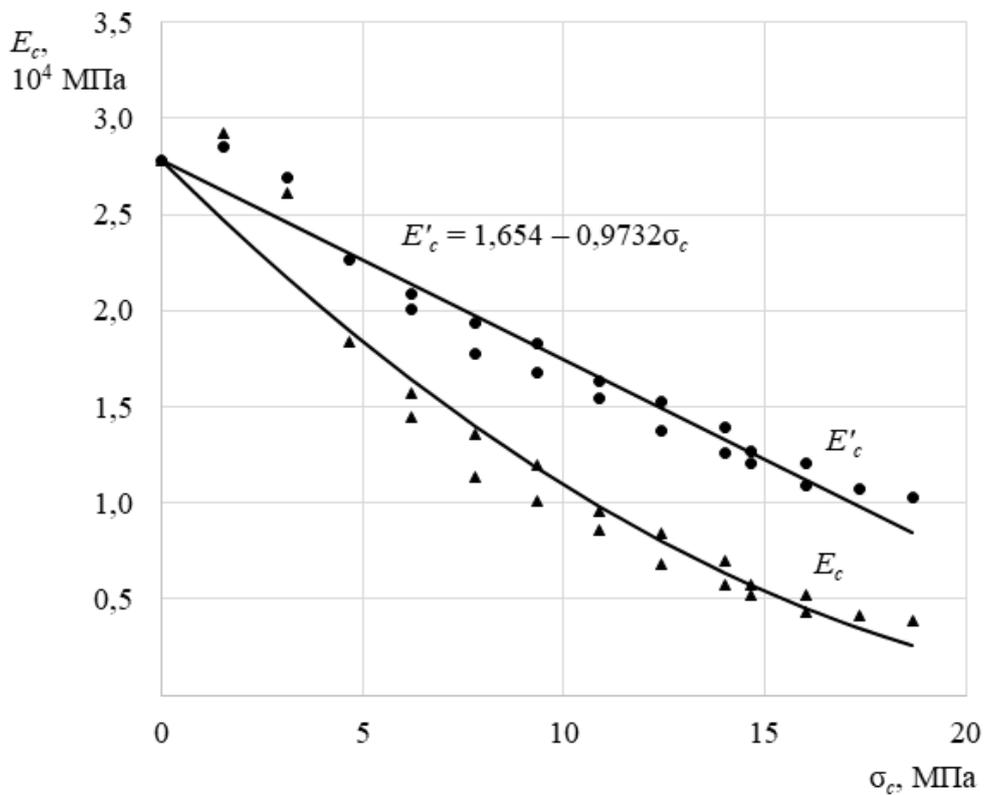


Рисунок 1.3 – Опытные и теоретические зависимости « $\sigma_c - E_c$ »; « $\sigma_c - E'_c$ » согласно данным таблицы 1.5

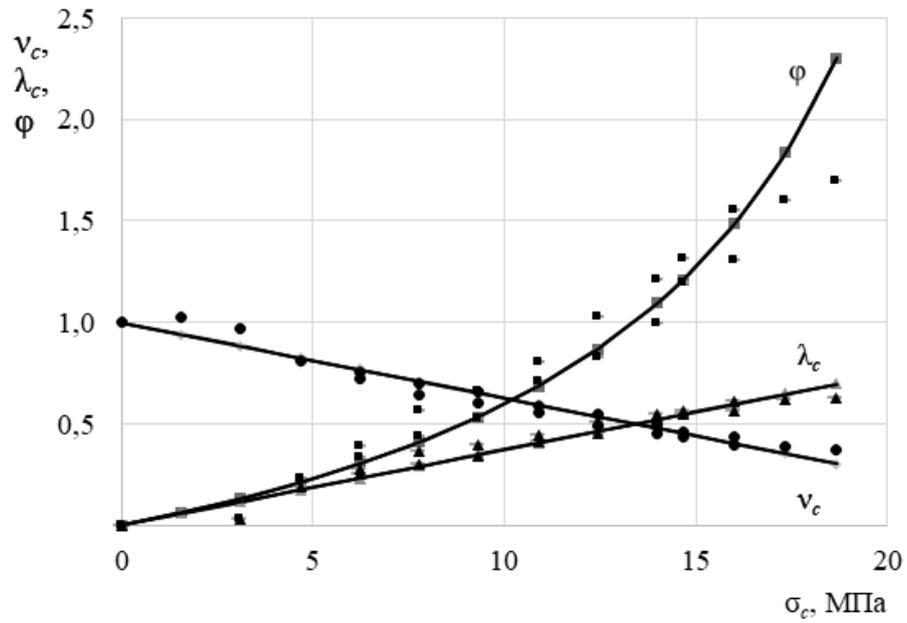


Рисунок 1.4 – Опытные и теоретические зависимости « $\nu_c - \sigma_c$ », « $\lambda_c - \sigma_c$ », « $\phi - \sigma_c$ » согласно данным таблицы 1.7

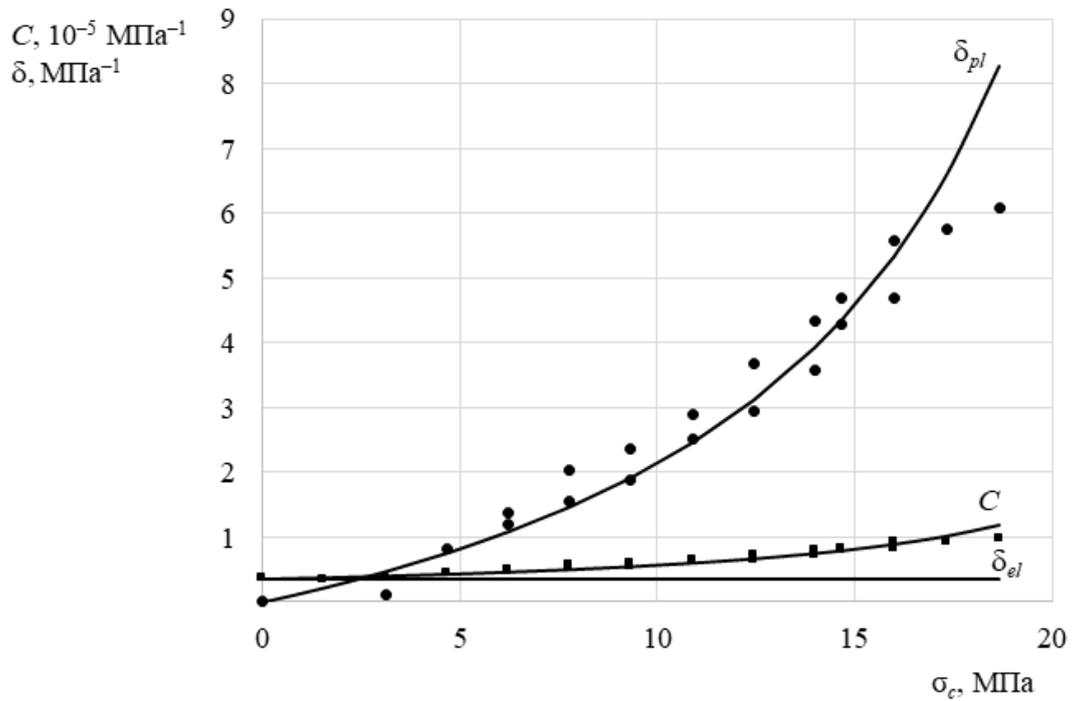


Рисунок 1.5 – Опытные и теоретические зависимости « $C - \sigma_c$ », « $\delta - \sigma_c$ » согласно данным таблиц 1.5 и 1.7

Таблица 1.8 – Исходные данные для индивидуального задания № 1

$\sigma_c$ , МПа	$\varepsilon_{прод} \times$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon_{попер} \times$ $\times 10^{-5}$	$\sigma_c$ , МПа	$\varepsilon_{прод} \times$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon_{попер} \times$ $\times 10^{-5}$	$\sigma_c$ , МПа	$\varepsilon_{прод} \times$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon_{попер} \times$ $\times 10^{-5}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3		
2,34	7,24	1,53	0,88	4,57	0,63	1,95	6,00	1,37
4,46	14,74	1,74	1,77	11,63	1,26	3,90	12,69	2,19
6,69	23,93	2,40	2,65	20,12	2,05	5,84	21,20	2,73
6,69	23,93	2,40	3,53	28,76	2,83	7,79	31,86	3,62
8,92	34,75	4,28	4,42	37,66	3,94	7,79	31,86	3,62
8,92	34,75	4,28	5,30	47,48	4,95	9,74	44,27	4,99
11,15	46,85	6,26	5,30	47,48	4,95	9,74	44,27	4,99
11,15	46,85	6,26	6,18	57,68	7,14	11,69	59,66	7,10
13,38	60,50	8,58	6,18	57,68	7,14	11,69	59,66	7,10
13,38	60,50	8,58	7,06	68,09	8,83	13,64	79,39	10,79
15,61	77,08	12,48	7,06	68,09	8,83	13,64	79,39	10,79
15,61	77,08	12,48	8,15	79,73	13,40	15,58	105,92	17,90
17,84	98,80	23,10	8,15	79,73	13,40	15,58	105,92	17,90
17,84	98,80	23,10	8,83	92,62	20,44	17,58	161,47	54,58
20,07	129,62	41,48	8,83	92,62	20,44	17,58	161,47	54,58
20,07	129,62	41,48	9,71	109,02	30,80	18,61	213,52	113,02
22,14	206,58	68,60	10,60	125,45	39,74	18,61	213,52	113,02
22,14	206,58	68,60	11,17	148,92	57,43	19,44	244,04	–
Вариант 4			Вариант 5			Вариант 6		
4,53	17,51	2,60	2,19	7,02	1,25	2,17	9,63	2,06
6,80	28,34	4,33	4,39	14,95	1,66	3,47	16,94	2,39
9,07	30,00	6,07	6,58	23,79	2,50	5,21	27,87	3,15
11,34	41,07	7,80	8,78	32,85	3,66	6,95	40,79	4,02
11,34	41,07	7,80	8,78	32,85	3,66	6,95	40,79	4,24
13,60	52,51	10,19	10,97	42,81	4,18	8,69	55,28	5,44

Продолжение таблицы 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант 4			Вариант 5			Вариант 6		
13,60	52,51	10,19	10,97	42,81	4,18	8,69	55,28	5,66
15,87	65,15	13,12	13,16	53,35	5,34	10,42	72,01	7,94
15,87	65,15	13,12	13,16	53,35	5,34	10,42	72,01	8,28
18,14	80,54	16,37	15,44	66,36	7,88	12,16	90,08	10,77
18,14	80,54	16,37	15,44	66,36	7,88	12,16	90,08	11,54
20,41	100,25	21,15	17,55	78,98	10,73	13,90	111,42	16,19
20,41	100,25	21,15	17,55	78,98	10,73	13,90	111,42	18,03
22,67	114,58	28,53	19,74	90,58	15,15	15,64	144,39	24,16
22,67	114,58	28,53	19,92	98,23	17,06	15,64	144,39	29,36
24,94	135,04	37,91	19,92	98,23	17,06	17,54	197,98	49,81
24,94	135,04	37,91	21,94	113,33	21,49	17,54	197,98	62,56
26,30	151,08	50,01	21,94	113,33	21,49	18,42	235,07	66,73
26,30	151,08	50,01	24,13	136,98	30,17	–	–	–
27,66	172,89	66,71	24,13	136,98	30,17	–	–	–
27,66	172,89	66,71	28,13	178,63	52,73	–	–	–
28,98	180,90	103,75	–	–	–	–	–	–
Вариант 7			Вариант 8			Вариант 9		
0,89	7,78	0,91	1,32	7,68	0,43	0,89	7,41	1,20
1,78	15,25	1,83	2,65	15,74	1,32	1,78	15,04	1,99
2,67	24,07	3,05	3,97	23,95	2,69	2,67	23,48	3,54
3,56	33,41	4,26	5,30	32,87	4,47	3,56	35,16	5,31
4,44	43,21	5,94	6,62	41,66	5,81	4,44	46,07	7,72
4,44	43,21	5,94	7,95	51,26	8,51	4,44	46,07	7,72
5,33	53,05	8,67	7,95	51,26	8,51	5,33	54,20	10,36
5,33	53,05	8,67	9,27	60,50	11,21	5,33	54,20	10,36
6,22	64,03	12,31	9,27	60,50	11,21	6,52	67,48	15,24
6,22	64,03	12,31	10,60	70,35	14,57	6,52	67,48	15,24
7,11	77,92	18,43	10,60	70,35	14,57	7,11	79,63	21,44
7,11	77,92	18,43	11,92	81,13	18,87	7,11	79,63	21,44
7,78	90,81	24,38	11,92	81,13	18,87	8,00	95,58	30,78
7,78	90,81	24,38	13,25	93,74	25,44	8,00	95,58	30,78
8,89	107,13	34,13	13,25	93,74	25,44	8,89	115,40	42,15
9,78	120,68	41,75	14,57	105,59	32,47	9,13	128,57	49,53
10,65	137,44	52,14	15,83	128,07	56,17	–	–	–
Вариант 10			Вариант 11			Вариант 12		
2,16	5,71	2,80	2,14	6,15	0,42	1,32	7,87	0,73
4,33	11,70	4,77	4,27	14,99	1,12	2,65	16,42	2,73
6,49	18,11	6,32	6,41	24,25	2,23	3,97	24,43	4,55
8,66	25,36	9,43	8,55	34,55	3,49	5,30	32,17	6,36
8,66	25,36	9,43	8,55	35,94	3,49	6,62	41,41	7,27
10,82	33,45	15,06	10,68	45,80	4,88	7,95	50,35	9,45
10,82	33,45	15,06	10,68	48,14	5,02	7,95	50,35	9,45
12,99	41,76	19,93	12,82	57,40	6,55	9,27	59,73	11,32
12,99	41,76	19,93	12,82	60,43	6,69	9,27	59,73	11,32

Окончание таблицы 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вариант 10			Вариант 11			Вариант 12		
15,15	51,40	25,15	14,95	70,29	9,06	10,60	69,52	14,09
15,15	51,40	25,15	14,95	74,79	9,62	10,60	69,52	14,09
17,31	61,88	29,81	17,09	84,66	11,71	11,92	80,40	15,91
17,31	61,88	29,81	17,09	90,28	12,69	11,92	80,40	15,91
19,48	74,64	35,09	19,23	92,23	15,05	13,25	92,24	20,91
19,48	74,64	35,09	19,23	108,46	17,01	13,25	92,24	20,91
21,64	90,42	41,62	21,36	120,93	20,21	14,57	102,82	26,36
21,64	90,42	41,62	21,36	131,41	23,41	15,89	114,53	20,91
23,81	110,87	49,03	22,64	139,12	25,50	17,22	134,04	26,36
23,81	110,87	49,03	22,64	149,77	29,12	15,89	114,53	33,64
25,97	137,43	57,70	23,50	155,14	30,79	–	–	–
25,97	137,43	57,70	23,50	165,18	35,12	–	–	–
26,84	163,55	66,93	24,35	170,12	37,33	–	–	–
26,84	163,55	66,93	24,35	183,71	45,21	–	–	–
27,27	178,55	72,63	25,21	189,34	48,93	–	–	–
27,70	185,13	75,33	25,21	199,99	59,65	–	–	–
28,13	214,72	91,78	26,49	213,87	–	–	–	–
28,13	214,72	91,78	–	–	–	–	–	–

## 2 Обеспеченность точности предлагаемой математической модели

### 2.1 Определение основных статистических параметров (математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации)

Математическое ожидание (генеральное среднее) случайной величины (начальный момент первого порядка) принято обозначать  $M_x$ ,  $M[X]$ ,  $m_x$  или  $m$ . Оно определяется для дискретной и непрерывной случайной величины соответственно как

$$M_x = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i; \quad (2.1)$$

$$M_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (2.2)$$

где  $X$  – дискретная физическая величина;

$x_i$  – значение, которое величина  $X$  принимает в результате опытов;

$p_i$  – вероятность события  $X = x_i$ .

Для случайных величин математическое ожидание является теоретической величиной, к которой приближается среднее значение  $x$  случайной величины  $X$  при большом количестве испытаний.

Дисперсией (вторым центральным моментом) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D_x = M \left[ (X - M_x)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Для дискретной и непрерывной случайных величин дисперсия определяется следующим образом соответственно:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2 p_i; \quad (2.4)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M_x)^2 f(x) dx. \quad (2.5)$$

Другие обозначения для дисперсии:  $D[X]$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma^2(X)$ .

Дисперсия играет важную роль при статистических расчетах и является мерой рассеяния значений  $x$  около их математического ожидания. Корень квадратный из второго центрального момента называется средним квадратичным отклонением (стандартным отклонением, или стандартом):

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{D_x}. \quad (2.6)$$

Коэффициент вариации измеряют через соотношение среднего квадратического отклонения и среднего арифметического

$$V_y = \frac{\sigma_x}{M_x} \cdot 100 \%. \quad (2.7)$$

По величине коэффициента вариации можно, в частности, судить о степени однородности признаков совокупности. Чем больше его величина, тем больше разброс значений признаков вокруг средней, тем менее однородна совокупность по своему составу и тем менее представительна средняя.

Под однородными данными понимается некоторый уровень их рассеяния, при котором рассчитываемые статистические показатели (среднее, дисперсия и др.) будут давать надежную и качественную характеристику анализируемой совокупности.

## 2.2 Нахождение абсцисс и ординат кривой нормального распределения

Нормальное распределение наиболее часто встречается на практике и теоретически наиболее полно разработано. Множество событий происходит случайно вследствие воздействия на них большого числа независимых (или слабо зависимых) возмущений, и у таких явлений закон распределения близок к нормальному. Установлено, что нормальное распределение содержит минимум информации о случайной величине по сравнению с любыми распределениями с той же дисперсией. Следовательно, замена некоторого распределения эквивалентным нормальным не может привести к переоценке точности наблюдений, что широко используется на практике.

В подавляющем числе случаев в практических расчетах предполагается, что случайная величина  $X$  распределена по так называемому нормальному закону (закону Гаусса) (рисунок 2.1), который описывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - M)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.8)$$

где  $M$  – величина математического ожидания;

$\sigma$  – среднее квадратичное отклонение (СКО), характеризующее генеральную совокупность исследуемых случайных величин.

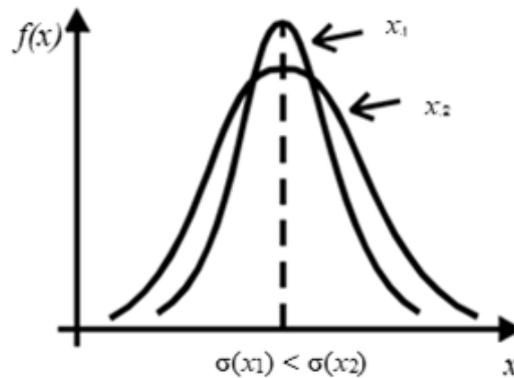


Рисунок 2.1 – Кривая Гаусса

Параметрами этого закона распределения, влияющими на его положение и форму в системе координат, являются математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины, а фактически – их статистические оценки: среднее арифметическое значение и выборочное стандартное отклонение, математическое ожидание  $M$ , среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  и его оценочное значение  $s$ , коэффициент вариации  $V$ , средняя ошибка среднего квадратического, показатель точности  $P$ , %.

Для конкретной случайной величины  $X$  величины математического ожидания  $M$  и среднее квадратическое отклонения  $\sigma$  – независимые фиксируемые константы.

Теоретическая высота кривой нормального распределения определяется по формуле

$$H = \frac{0,4 \cdot s \cdot n}{\sigma_x} \quad (2.9)$$

### ***2.3 Построение гистограммы по опытным данным и кривой нормального распределения***

В основе метода гистограмм лежит построение опытного распределения наблюдаемых значений исследуемого показателя качества – гистограммы распределения. По внешнему виду гистограммы, ее положению и величине рассеяния можно оценить, насколько результативно достигается поставленная цель в области качества, т. е. выполняются заданные требования.

Гистограмма состоит из последовательности примыкающих друг к другу прямоугольников.

Ширина столбцов равна ширине интервалов группировки и откладывается по оси абсцисс  $X$ , а их высота измеряется по оси ординат  $Y$ . Число наблюдений, попадающих в определенный интервал, определяется по высоте соответствующего прямоугольника. Основание прямоугольника равно ширине интервала группировки.

Один из способов построения нормальной кривой по данным наблюдений состоит в следующем:

- 1) находят ординаты  $y_i$  (выравнивающие частоты) теоретической кривой;
- 2) строят точки  $(x_i, y_i)$  в прямоугольной системе координат и соединяют их плавной кривой.

Близость выравнивающих частот к наблюдаемым подтверждает правильность допущения о том, что обследуемый признак распределен нормально.

### ***2.4 Оценка близости эмпирических и теоретических распределений с помощью критериев согласия (нахождение критериев Пирсона, Романовского, Ястремского)***

В математической статистике близость эмпирических и теоретических распределений оценивают с помощью критериев согласия.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Для расчета (оценки) критерия согласия необходимо построить эмпирический ряд распределения и изобразить его графически в виде гистограммы накопленных частот. По вычисленным значениям среднеквадратического отклонения и выборочного среднего рассчитывают теоретические частоты и сравнивают их с экспериментальными. Существуют разные критерии согласия. Наиболее часто применяется критерий Пирсона ( $\chi^2$  – читается «хи-квадрат»). Также рассмотрим для примера критерии Романовского и Ястремского.

Критерий согласия Пирсона применяется при проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности, но аналогично применяется и для других распределений (в этом состоит его достоинство).

Критерий Пирсона не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по выборке объема  $n$  получено эмпирическое распределение:

– значения  $X$ :  $x_1, x_2, \dots, x_s$ ;

– эмпирические частоты  $n_i$ :  $n_1, n_2, \dots, n_s$ .

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты  $n_i^l$ . При уровне значимости  $\alpha$  требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину вида

$$\chi^2 = \frac{\sum (n_i - n_i^l)^2}{n_i^l}. \quad (2.10)$$

Эта величина случайная, т. к. в разных опытах она принимает различные, заранее неизвестные значения. Ясно, что чем меньше в формуле (2.10) различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия  $\chi^2$ , и, следовательно, он в известной степени характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Доказано, что при  $n \rightarrow \infty$  закон распределения случайной величины  $\chi^2$ , независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения  $\chi^2$  с  $f$  степенями свободы (поэтому сам критерий называют критерием согласия).

Число степеней свободы находят по равенству

$$f = s - 1 - k, \quad (2.11)$$

где  $s$  – число групп (частичных интервалов) выборки;

$k$  – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение), поэтому  $k = 2$  и число степеней свободы  $f = s - 1 - 2 = s - 3$ .

Таким образом, для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу  $H_0$  (о том, что генеральная совокупность распределена нормально), надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем по формуле (2.11) – наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{\sum (n_i - n_i^l)^2}{n_i^l}. \quad (2.12)$$

Из таблицы критических точек распределения  $\chi^2$  по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = s - 3$  следует определить критическую точку  $\chi^2_{кр(mz;k)}$ . Если  $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ , то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ , нулевую гипотезу отвергают.

В качестве меры близости эмпирического и теоретического распределений В. И. Романовский предложил использовать величину  $\chi^2$ , но с учетом числа степеней свободы  $f$

$$\frac{|\chi^2 - f|}{\sqrt{2f}}, \quad (2.13)$$

где  $f$  – число степеней свободы.

Если величина этого выражения меньше трех, т. е.  $\frac{|\chi^2 - f|}{\sqrt{2f}} < 3$ , это дает основание для принятия гипотезы  $H_0$ , в противном случае, когда  $\frac{|\chi^2 - f|}{\sqrt{2f}} \geq 3$ , расхождения считаются существенными и гипотеза  $H_0$  о нормальном законе не принимается.

В качестве меры близости эмпирического и теоретического распределений Б. С. Ястремский предложил использовать величину  $\chi^2$  с учетом числа группировок:

$$\frac{|\chi^2 - n|}{\sqrt{2n + 4q}} < 3, \quad (2.14)$$

где  $s$  – количество групп выборки;

$q$  – величина, зависящая от количества групп, но при числе групп, меньшем 20, она принимается равной 0,6.

### ***2.5 Оценка коэффициента вариации вектора ошибок предложенной математической модели согласно EN 1990***

Следует применять действительные значения измеренных характеристик в функции сопротивления для получения теоретических значений  $r_{ti}$ , которые сравнивают с экспериментальными значениями  $r_{ei}$ .

Вероятностная модель сопротивления  $r$  представляется в виде

$$r = b \cdot r_i \cdot \delta, \quad (2.15)$$

где  $b$  – уклон, определяемый по методу наименьших квадратов по формуле

$$b = \frac{\sum r_e r_t}{\sum r_t^2}. \quad (2.16)$$

Значение ошибки  $\delta_i$  для каждого экспериментального значения  $r_{ei}$  определяется по формуле

$$\delta_i = \frac{r_{ei}}{b \cdot r_{ti}}. \quad (2.17)$$

Среднее значение теоретической функции сопротивления  $r_m$ , рассчитанное с использованием средних значений базисных переменных  $Z_m$ , определяется по формуле

$$r_m = b \cdot \delta \cdot r_t \cdot Z_m. \quad (2.18)$$

Логарифм вектора ошибок  $\Delta_i$  и его оценочное значение  $\bar{\Delta}$

$$\Delta_i = \ln(\delta_i). \quad (2.19)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i. \quad (2.20)$$

Выборочная дисперсия

$$s_{\Delta}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\Delta} - \Delta_i)^2. \quad (2.21)$$

Коэффициент вариации вектора ошибок

$$V_{\delta} = \sqrt{\exp(s_{\Delta}^2) - 1}. \quad (2.22)$$

Обобщенной характеристикой экспериментального распределения является коэффициент вариации. Он служит для сравнения величин рассеяния двух выборок. Та из выборок имеет большее рассеяние, у которой коэффициент вариации больше.

**Пример** – Оценить адекватность предложенной математической модели для определения сопротивления нормальных сечений железобетонных изгибаемых элементов путем сравнения расчетных и опытных значений несущей способности балочных образцов (разрушающий изгибающий момент), оценить ошибку моделирования.

## Решение

Сбор исходных данных и расчет основных статистических параметров приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Определение математического ожидания и параметров для дальнейших расчетов обеспеченности точности предлагаемой упругопластической модели сопротивления сечений, нормальных к продольной оси элемента

Номер образца	Фактический момент $M_{эксп}$ , кН·м	Расчетный момент $M_{расч}$ , кН·м	$Z_i = \frac{M_{эксп}}{M_{расч}}$	$Z_m - Z_i$	$(Z_m - Z_i)^2$
1	2	3	4	5	6
1	4,06	3,86	1,0511	-0,02815	0,001
2	4,21	4,03	1,0446	-0,02166	0,000
3	4,56	4,28	1,0642	-0,04132	0,002
4	4,34	3,95	1,0995	-0,07664	0,006
5	5,88	5,59	1,0525	-0,02958	0,001
6	8,68	8,62	1,0065	0,01644	0,000
7	5,14	5,20	0,9885	0,03444	0,001
8	4,40	4,61	0,9549	0,06804	0,005
9	4,45	4,24	1,0493	-0,02636	0,001
10	5,42	5,52	0,9829	0,04003	0,002
11	6,94	7,47	0,9299	0,09301	0,009
12	5,12	5,07	1,0090	0,01390	0,000
13	5,64	5,56	1,0151	0,00786	0,000
14	5,08	4,85	1,0473	-0,02435	0,001
15	6,73	6,95	0,9677	0,05524	0,003
16	6,73	6,63	1,0151	0,00779	0,000
17	5,95	6,11	0,9738	0,04916	0,002
18	6,18	6,26	0,9877	0,03521	0,001
19	11,00	10,92	1,0077	0,01524	0,000
20	10,41	10,83	0,9613	0,06165	0,004
21	10,50	11,20	0,9374	0,08550	0,007
22	10,85	11,43	0,9494	0,07352	0,005
23	4,33	3,92	1,1034	-0,08049	0,006
24	10,58	9,34	1,1326	-0,10972	0,012
25	10,35	10,46	0,9894	0,03355	0,001
26	10,85	10,45	1,0383	-0,01535	0,000
27	10,85	11,41	0,9506	0,07229	0,005
28	10,85	9,55	1,1358	-0,11289	0,013
29	9,33	8,27	1,1278	-0,10487	0,011
30	8,92	8,53	1,0460	-0,02311	0,001

Окончание таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6
31	9,16	8,39	1,0913	-0,06838	0,005
32	15,54	15,34	1,0130	0,00969	0,000
33	16,95	15,34	1,1050	-0,08223	0,007
34	19,25	19,16	1,0047	0,01803	0,000
35	19,25	19,27	0,9990	0,02376	0,001
36	21,00	20,21	1,0391	-0,01636	0,000
37	20,13	20,75	0,9699	0,05285	0,003
38	8,57	8,77	0,9777	0,04302	0,002
39	9,22	8,66	1,0642	-0,04348	0,002
40	8,79	8,45	1,0405	-0,01970	0,000
41	8,57	8,40	1,0204	0,00039	0,000
42	7,92	8,53	0,9280	0,09279	0,009
$m_z =$			1,02075	$\Sigma(Z_m - Z_i)^2 =$	0,1289
$s_z = \pm$			0,05606		
$V =$			0,05492	$S_{кл} =$	0,03
$m = \pm$			0,00865	$Z_{max} =$	1,1358
$P \% =$			0,84747	$Z_{min} =$	0,9299
$H =$			8,9901	$n =$	42

Расчетная модель считается надежной, если коэффициент вариации  $V$  не превышает 0,15 [4]:  $V = 0,06 < 0,15$ , следовательно, предлагаемую упругопластическую модель сопротивления можно считать надежной.

Таблица 2.2 – Нахождение абсцисс и ординат кривой нормального распределения для отношений опытных значений разрушающего момента к расчетным

Отклонение от $Z_m \pm d$ в долях		Значение абсцисс		$h$	Значение ординаты $Y$
$s_z$	величина	$X_1$	$X_2$		
0,0	0,00000	1,0208	1,0208	1	8,9901
0,5	0,02803	0,9927	1,0488	0,883	7,9382
1,0	0,05606	0,9647	1,0768	0,607	5,4570
1,5	0,08409	0,9367	1,1048	0,325	2,9218
2,0	0,11212	0,9086	1,1329	0,135	1,2137
2,5	0,14015	0,8806	1,1609	0,044	0,3956
3,0	0,16819	0,8526	1,1889	0,011	0,0989

В таблице 2.2 при  $s_z = 1,0$  величина  $s_i$  равна стандарту  $s_z$ ; при  $s_z = 0$  значения абсцисс  $X_1 = X_2 = Z_m$ ;  $X_1 = Z_m - Z_i$ ,  $X_2 = Z_m + Z_i$ ;  $h$  принимается по кривой нормального распределения Гаусса; при  $h = 1,0$  значение ординаты  $Y = H$  (теоретической высоте кривой нормального распределения).

По отношениям опытных данных к теоретическим были построены гистограмма и кривая нормального распределения (рисунок 2.3).

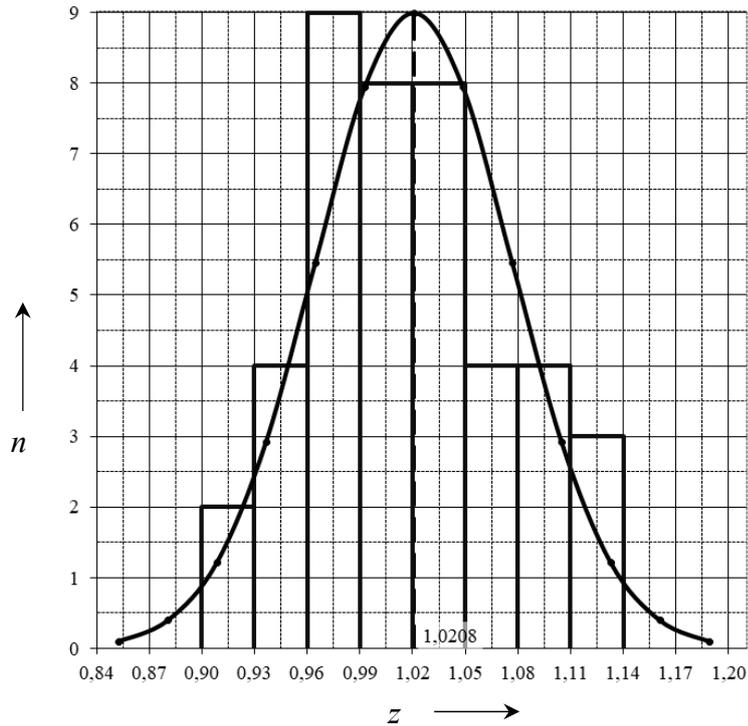


Рисунок 2.3 – Гистограмма и кривая нормального распределения для отношений опытных значений разрушающего момента к расчетным

Таблица 2.3 – Нахождение значений критерия Пирсона  $\chi^2$

Класс	Фактическая частота $m$	Теоретическая частота $m'$	$m - m'$	$(m - m')^2$	$\chi^2 = (m - m')^2 / m'$
(0,8400; 0,86999)	0	0,17	-0,17	0,0289	0,17000
(0,8700; 0,89999)	0	0,52	-0,52	0,2704	0,52000
(0,9000; 0,92999)	2	1,62	0,38	0,1444	0,08914
(0,9300; 0,95999)	4	3,70	0,3	0,09	0,02432
(0,9600; 0,98999)	9	6,47	2,53	6,4009	0,98932
(0,9900; 1,01999)	8	8,63	-0,63	0,3969	0,04599
(1,0200; 1,04999)	8	8,68	-0,68	0,4624	0,05327
(1,0500; 1,07999)	4	6,63	-2,63	6,9169	1,04327
(1,0800; 1,10999)	4	3,78	0,22	0,0484	0,01280
(1,1100; 1,13999)	3	1,65	1,35	1,8225	1,10455
(1,1400; 1,16999)	0	0,15	-0,15	0,0225	0,15000
$\Sigma =$	42	42,00		$\Sigma =$	4,20267

Число степеней свободы  $k$  рассматриваемого распределения равно числу классов минус единица,  $n$  – количество классов:  $n = 11$ ,  $k = 11 - 1 = 10$ .

$$\text{Критерий В. И. Романовского: } \frac{|\chi^2 - f|}{\sqrt{2f}} = \frac{|4,20267 - 10|}{\sqrt{2 \cdot 10}} = 1,129632 < 3.$$

$$\text{Критерий Б. С. Ястремского: } \frac{|\chi^2 - n|}{\sqrt{2n + 2,4}} = \frac{|4,20267 - 11|}{\sqrt{2 \cdot 11 + 2,4}} = 1,37608 < 3.$$

Так как критерии В. И. Романовского и Б. С. Ястремского не превышают 3, то эмпирическое наблюдение можно описать кривой нормального распределения.

В таблице 2.4 представлена обеспеченность точности рассмотренных моделей сопротивления сечений, нормальных к продольной оси изгибаемого железобетонного элемента, при статическом и малоцикловом видах нагружения.

Таблица 2.4 – Обеспеченность точности моделей сопротивления сечений, нормальных к продольной оси изгибаемого железобетонного элемента, при статическом и малоцикловом видах нагружения

Статистическая характеристика	$mz = Z_m$	$sz$	$V$	$P$	Обеспеченность точности при отклонении			
					$\pm 5 \%$	$\pm 10 \%$	$\pm 15 \%$	$\pm 20 \%$
При расчете по предлагаемой математической модели	1,02075	0,05606	0,05492	0,84747	62,76	92,23	99,25	99,95

Из таблицы 2.4 видно, что уточненная упругопластическая модель сопротивления сечений, нормальных к продольной оси элемента, позволяет с наиболее высокой точностью производить расчет для железобетонных изгибаемых конструкций, работающих в условиях малоциклового нагружения.

Таблица 2.5 – Оценка коэффициента вариации вектора ошибок для уточненной упругопластической модели сопротивления сечений, нормальных к продольной оси элемента

Номер образца	$r_e = M_{эксп},$ кН·м	$r_t = M_{расч},$ кН·м	$r_e \cdot r_t$	$r_{t2}$	Ошибка $\delta_i$	Логарифм вектора ошибок $\Delta_i$	$(\bar{\Delta} - \Delta_i)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,06	3,86	15,6626	14,9017	1,038	0,0369	0,000827
2	4,21	4,03	16,9618	16,2380	1,031	0,0308	0,000509
3	4,34	3,95	17,1259	15,5753	1,086	0,0820	0,005454
4	4,33	3,92	16,9809	15,3896	1,089	0,0855	0,005983
5	4,56	4,28	19,5079	18,3305	1,051	0,0494	0,001698
6	5,88	5,59	32,8495	31,2112	1,039	0,0383	0,000907
7	8,68	8,62	74,8389	74,3579	0,994	-0,0064	0,000213
8	5,14	5,20	26,7676	27,0799	0,976	-0,0245	0,001066
9	4,40	4,61	20,3167	21,2768	0,943	-0,0590	0,004519
10	4,45	4,24	18,8550	17,9695	1,036	0,0352	0,000732
11	5,42	5,52	29,9356	30,4571	0,970	-0,0301	0,001468

Окончание таблицы 2.5

1	2	3	4	5	6	7	8
12	6,94	7,47	51,8408	55,7489	0,918	-0,0855	0,008785
13	5,12	5,07	25,9857	25,7535	0,996	-0,0039	0,000146
14	5,64	5,56	31,3520	30,8870	1,002	0,0021	0,000037
15	5,08	4,85	24,6450	23,5329	1,034	0,0333	0,000631
16	6,73	6,95	46,7523	48,3143	0,955	-0,0457	0,002906
17	6,73	6,63	44,5668	43,9029	1,002	0,0022	0,000036
18	5,95	6,11	36,2960	37,2743	0,961	-0,0394	0,002270
19	6,18	6,26	38,7145	39,1967	0,975	-0,0252	0,001117
20	11,00	10,92	120,089	119,1750	0,995	-0,0052	0,000180
21	10,41	10,83	112,836	117,3830	0,949	-0,0524	0,003667
22	10,50	11,20	117,655	125,5100	0,925	-0,0775	0,007340
23	10,85	11,43	123,966	130,5740	0,937	-0,0648	0,005326
24	10,58	9,34	98,9035	87,3220	1,118	0,1117	0,010711
25	10,35	10,46	108,265	109,4297	0,977	-0,0235	0,001008
26	10,85	10,45	113,355	109,1777	1,025	0,0247	0,000272
27	10,85	11,41	123,805	130,2362	0,938	-0,0635	0,005139
28	10,85	9,55	103,621	91,2315	1,121	0,1145	0,011297
29	9,33	8,27	77,1829	68,4380	1,113	0,1074	0,009841
30	8,92	8,53	76,0238	72,6788	1,033	0,0321	0,000574
31	9,16	8,39	76,8229	70,3961	1,077	0,0745	0,004398
32	15,54	15,34	238,3836	235,3156	0,999	-0,0013	0,000065
33	16,95	15,34	260,0130	235,3156	1,089	0,0855	0,006212
34	19,25	19,16	368,8300	367,1056	0,990	-0,0096	0,000266
35	19,25	19,27	370,9475	371,3329	0,985	-0,0153	0,000485
36	21,00	20,21	424,4100	408,4441	1,024	0,0241	0,000301
37	20,13	20,75	417,5938	430,5625	0,956	-0,0449	0,002660
38	8,57	8,77	75,1242	76,8348	0,965	-0,0361	0,001730
39	9,22	8,66	79,9001	75,0775	1,050	0,0487	0,001864
40	8,79	8,45	74,2153	71,3296	1,026	0,0261	0,000423
41	8,57	8,40	71,9858	70,5492	1,007	0,0066	0,000001
42	7,92	8,53	67,5872	72,8344	0,915	-0,0883	0,008808

Среднее значение экспериментальных результатов  $r_{em} = 9,17839$ .

Среднее значение результатов расчета  $r_{tm} = 9,01554$ .

Уклон, определяемый по методу наименьших квадратов  $b = 1,0144$ .

Значение ошибки для экспериментальных значений  $\delta_m = 1,0082$ .

Оценочное значение вектора  $\bar{\Delta} = 0,00671$ .

Выборочная дисперсия вектора  $s_{\Delta 2} = 0,0030$ .

Коэффициент вариации для вектора ошибок  $V_{\delta} = 0,0551$ .

Среднее значение теоретической функции сопротивления, рассчитанное с использованием средних значений базисных переменных  $r_m = 9,22043$ .

Отклонение среднего значения теоретической функции  $r_m$  от среднего значения экспериментальных результатов  $r_{em}$   $\delta_{rm} = -0,46 \%$ .

Точки, представляющие пары соответствующих значений ( $r_{ti}, r_{ei}$ ), а также прямая  $r_e = b \cdot r_t$  изображены на диаграмме « $r_e - r_t$ » (рисунок 2.4).

Так как на диаграмме « $r_e - r_t$ » все точки расположены близко к прямой  $r_e = b \cdot r_t = 1,0137 \cdot r_t$  (величина достоверности аппроксимации  $R^2 = 0,9657$ ), а угол наклона прямой составляет примерно  $45^\circ$  ( $\arctan b = \arctan 1,0137 = 45,39^\circ$ ), то можно считать, что функция сопротивления является достаточно полной и точной.

Таким образом, предлагаемая модель сопротивления – уточненная упруго-пластическая модель (с учетом изменения прочностных и деформативных характеристик бетона) – обеспечивает достаточно высокую точность и может быть использована при проектировании и поверочном расчете изгибаемых железобетонных элементов по первой группе предельных состояний.

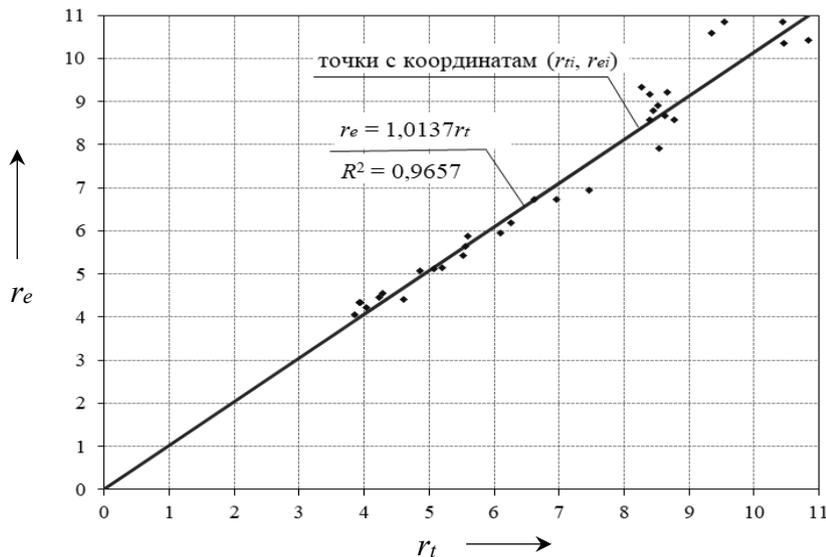


Рисунок 2.4 – Диаграмма « $r_e - r_t$ » (модель расчета разрушающего момента)

## 3 Полный факторный эксперимент

### 3.1 Общие сведения о полном факторном эксперименте

Эксперимент, в котором каждый фактор находится на верхнем или нижнем уровне, называется *двухуровневым*. Двухуровневый эксперимент для  $n$  факторов, содержащий  $2^n$  опытов, называется полным факторным экспериментом (эксперимент  $2^n$ ). Например, если число факторов 4, то следует поставить 16 опытов.

В том случае, если число опытов эксперимента равно числу определяемых коэффициентов модели, такой эксперимент является насыщенным; если число опытов больше числа коэффициентов модели – ненасыщенным. Матрица плани-

рования (МП) полного факторного эксперимента содержит все возможные сочетания значений кодированных факторов и полученные отклики. Таблица, содержащая только кодированные значения факторов, называется *репликой*. Для реплики необходимо составить матрицу планирования в натуральном масштабе для проведения опытов и контроля.

Кроме табличного, существует сокращенный метод записи реплик с помощью буквенных символов. Если первый фактор находится на верхнем уровне, ему присваивается буква *a*, второму фактору на верхнем уровне – *b* и т. д.; если на нижнем уровне – никак не обозначается, а если все факторы на нижнем уровне – единица. Для ПФЭ типа  $2^2$  краткая запись следующая: *ab, a, b, 1*.

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) исследуется один параметр и реализуются все возможные сочетания уровней факторов. Для каждого фактора выбираются два уровня – верхний и нижний, на которых фактор варьируется. Половина разности между верхним и нижним уровнями называется интервалом варьирования. Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (ограничение снизу), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его определения (ограничение сверху).

На практике интервал варьирования составляет обычно 3 %...10 % от области определения. При двух уровнях для каждого из *n* факторов общее число опытов составляет  $2^n$ . ПФЭ – это эксперимент типа  $2^n$ . ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии или по линиям:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ikl} x_i x_k x_l + \dots, \quad (3.1)$$

где  $b_0$  – свободный член;

$b_i, b_{ik}, b_{ikl}$  – коэффициенты уравнения множественной регрессии.

Так, например, при  $n = 2$   $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$ ;

при  $n = 3$   $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$ .

Модели (3.1) обычно называют *регрессионными*, а коэффициенты  $b_0, b_i, b_{ik}, b_{ikl}$  – коэффициентами уравнения регрессии.

В зависимости от объема априорной информации в математическую модель (ММ) включают не все, а лишь некоторые взаимодействия первого порядка, иногда – взаимодействия второго порядка и очень редко – взаимодействия выше третьего порядка. Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам. Зависимость количества взаимодействий различного порядка от числа факторов приведена в таблице 3.1.

Полное число всех возможных эффектов (включая  $b_0$ ) равно числу опытов ПФЭ.

Полный факторный эксперимент относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность, иначе оптимальность, полного факторного эксперимента достигается за счет нижеперечисленных его свойств. Два свойства следуют непосредственно из

построения матрицы. Первое из них – симметричность относительно центра эксперимента – формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{k=1}^N x_{ik} = 0, \quad (3.2)$$

где  $i$  – номер фактора,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  
 $N$  – число опытов.

Таблица 3.1 – Количество взаимодействий для числа факторов от 2 до 7

$n$	$N = 2^n$	Число линейных взаимодействий	Порядок взаимодействия					
			1	2	3	4	5	6
2	4	2	1	–	–	–	–	–
3	8	3	3	1	–	–	–	–
4	16	4	6	4	1	–	–	–
5	32	5	10	10	5	1	–	–
6	64	6	15	20	15	6	1	–
7	128	7	21	35	35	21	7	1

Второе свойство – так называемое условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{k=1}^N x_{ik}^2 = N. \quad (3.3)$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются  $+1$  и  $-1$ .

Мы рассмотрели свойства отдельных столбцов матрицы планирования. Рассмотрим свойства совокупности столбцов. Сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю, или

$$\sum_{k=1}^N x_{ik} x_{uk} = 0. \quad (3.4)$$

При  $i \neq u$ , а также  $i, u = 0, 1, \dots, k$ . Это важное свойство называется *ортogonalностью* матрицы планирования.

Последнее, четвертое, свойство называется *ротатабельностью*, т. е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказаний значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Выполнение этих условий обеспечивает не только минимальную дисперсию

коэффициентов регрессии, но и равенство дисперсии. Это облегчает статистический анализ результатов эксперимента.

Для составления матрицы планирования ПФЭ (реплики)  $2^3$  необходимо взять реплику ПФЭ  $2^2$  и дополнить ее значениями для третьего фактора на верхнем и нижнем уровнях. Это общее правило составления матриц ПФЭ более высокого порядка.

Еще одним способом составления реплик более высокого порядка является правило перемножения столбцов: приняв получающийся знак за новый вектор-столбец, допишем для нового фактора старую таблицу, поменяв знак на противоположный. Способ более трудоемкий, но эффективный.

Третий способ составления реплик: первый вектор-столбец – идет чередование факторов на верхнем и нижнем уровнях через 1, второй вектор-столбец – чередование через 2, далее чередование через 4 и т. д. Для данной реплики можно написать матрицу планирования эксперимента в натуральном масштабе. Именно по такой матрице проводятся физические или расчетные опыты.

### 3.2 Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий)

Опыт считается воспроизводимым, если дисперсия  $D_{y_i}$  выходного параметра  $y_i$  однородна в каждой точке факторного пространства. Оценка  $S_{y_i}$  дисперсии  $D_{y_i}$  определяется для каждой точки факторного пространства по формуле

$$S_{y_i}^2 = \frac{1}{(K-1)} \sum_{t=1}^K (y_{it} - \bar{y}_i)^2. \quad (3.5)$$

Таблица 3.2 – Матрица планирования для двух серий опытов ПФЭ типа  $2^3$

Номер точки факторного пространства	Номер опыта		$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_{j1}$	$y_{j2}$	$y_{j3}$
	Серия один	Серия два							
1	4	2	+	–	–	–	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$
2	2	4	+	+	–	–	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$
3	3	6	+	–	+	–	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$
4	7	8	+	+	+	–	$y_{41}$	$y_{42}$	$y_{43}$
5	8	5	+	–	–	+	$y_{51}$	$y_{52}$	$y_{53}$
6	1	7	+	+	–	+	$y_{61}$	$y_{62}$	$y_{63}$
7	5	3	+	–	+	+	$y_{71}$	$y_{72}$	$y_{73}$
8	6	1	+	+	+	+	$y_{81}$	$y_{82}$	$y_{83}$

Гипотезу однородности (равенства) дисперсий проверяют с помощью критерия Кохрена. Расчетное значение этого критерия определяют по формуле

$$G_p = \frac{\max S_{y_j}^2}{\sum_{i=1}^N S_{y_j}^2}. \quad (3.6)$$

Критическое значение  $G_{кр}$  находят из таблицы распределения Кохрена по числу степеней свободы числителя  $f = K - 1$ , знаменателя  $f = N$  и уровню значимости  $q$  (приложение А). Если  $G_p < G_{кр}$ , гипотеза об однородности дисперсий принимается, в противном случае – отвергается, и тогда эксперимент необходимо повторить, изменив условия его проведения (набор факторов, интервал их варьирования, точность измерительных приборов и пр.).

### 3.3 Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Расчет оценок коэффициентов уравнения регрессии производится по методу наименьших квадратов, при этом минимизируется сумма квадратов отклонений между экспериментальными значениями исследуемого параметра и значениями, вычисленными для тех же точек факторного пространства по уравнению регрессии. Благодаря предварительной стандартизации масштаба факторов и ортогональности матрицы планирования расчет оценок коэффициентов регрессии в ПФЭ превращается в простую арифметическую процедуру:

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i; \quad (3.7)$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot x_k \cdot \bar{y}_f; \quad (3.8)$$

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_0 \cdot y_k \cdot \bar{y}_f. \quad (3.9)$$

### 3.4 Проверка значимости коэффициентов регрессии

Гипотезу о статистической значимости (отличии от нуля) коэффициентов регрессии проверяют по критерию Стьюдента. Расчетное значение  $t_p$  этого критерия определяют как частное от деления модуля коэффициента  $b_i$  на оценку его среднеквадратического отклонения  $S_b$ :

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_b}. \quad (3.10)$$

В ПФЭ, благодаря одинаковой удаленности всех экспериментальных точек факторного пространства от центра эксперимента, оценки всех коэффициентов уравнения регрессии независимо от их величины вычисляются с одинаковой погрешностью (при выполнении условия воспроизводимости опытов):

$$S_b = \frac{S_y}{N}, \quad (3.11)$$

где  $S_y$  – оценка дисперсии воспроизводимости эксперимента,

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N S \cdot y_i}{N}. \quad (3.12)$$

Критическое значение критерия  $t_{кр}$  находят из таблицы распределения Стьюдента по числу степеней свободы  $f = N \cdot (K - 1)$  и уровню значимости  $q$  (см. приложение А). Если  $t_p > t_{кр}$ , гипотеза о значимости коэффициента  $b_i$  принимается, в противном случае коэффициент считается незначимым и приравнивается нулю. Необходимо помнить, что незначимость коэффициента может быть обусловлена и неверным выбором интервала варьирования фактора. Поэтому иногда бывает полезным расширить интервал варьирования и провести новый эксперимент.

### 3.5 Проверка адекватности полученной математической модели

Для проверки гипотезы об адекватности математической модели (ММ) необходимо сравнить две дисперсии:

1) дисперсию неадекватности, зависящую от разности между значениями  $y_{ip}$ , рассчитанными по ММ, и экспериментальными результатами  $y_{it}$ :

$$S_a^2 = \frac{1}{K(N - L)} \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^K (y_{ip} - y_{ft})^2 \quad (3.13)$$

или

$$S_a^2 = \frac{1}{K(N - L)} \sum_{j=1}^N (y_{ip} - \bar{y}_j)^2, \quad (3.14)$$

где  $L$  – число значимых коэффициентов исследуемого уравнения регрессии, не считая  $b_0$ ;

2) дисперсию неоднородности, характеризующую погрешности наблюдений:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_{yj}^2. \quad (3.15)$$

Заметим, что дисперсия погрешности наблюдений может быть оценена лишь путем сравнения результатов нескольких параллельных опытов, проводимых в каждой экспериментальной точке. Адекватность ММ проверяется по  $F$  – критерию Фишера. Его расчетное значение находят как частное от деления оценки дисперсии неадекватности на оценку дисперсии единичного наблюдения:

$$F_p = \frac{S_a^2}{S_y^2}, \quad (3.16)$$

причем  $S_a^2 > S_y^2$ .

Если это условие не выполняется, их нужно поменять местами. Критическое значение  $F_{кр}$  находят из таблицы распределения Фишера по числу степеней свободы числителя  $f = N \cdot (K - L)$ , знаменателя  $f = N \cdot (K - 1)$  и уровню значимости  $q$  (приложение Б).

Если  $F_p > F_{кр}$  гипотеза об адекватности отклоняется.

Как правило, вначале проверяют адекватность линейной ММ. Если предположение об адекватности подтверждается, то в качестве окончательной ММ выбирают линейную; если отклоняется – добавляют эффект взаимодействия с наибольшим коэффициентом и вновь проверяют гипотезу, и так до тех пор, пока существуют степени свободы.

Если в результате модель все же оказалась неадекватной, это говорит о том, что тип математической модели выбран неудачно и при данном шумовом уровне и классе точности измерительных приборов ММ должна быть уточнена. Для этого следует использовать более сложные модели, например, квадратичные (ортогональное и рототабельное композиционное планирование).

**Пример** – Требуется исследовать влияние производных факторов ( $U$  – опорное напряжение ( $x_1$ ),  $I$  – ток потребления ( $x_2$ ),  $T$  – конечная температура нагрева ( $x_3$ )) на качество производства магнитных дисков. Номинальное значение факторов:  $U = 30$  В,  $I = 18$  А,  $T = 220$  °С.

*Решение*

Поставим ПФЭ при трех сериях опытов в точках:

$U = (30 \pm 2)$  В;  $I = (18 \pm 1)$  А;  $T = (220 \pm 20)$  °С.

Для стандартизации масштабов факторов условия проведения опытов сведем в таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Условия проведения ПФЭ

Характеристика плана	$x_1 = U$	$x_2 = I$	$x_3 = T$
Нулевой уровень	30 В	18 А	220 °С
Интервал варьирования	2 В	1 А	20 °С
Верхний уровень	32 В	19 А	240 °С
Нижний уровень	28 В	17 А	200 °С

После составления МП эксперимента и проведения рандомизированных опытов сведем полученные результаты в таблицу 3.4, где  $y$  – количественный параметр, характеризующий качество обработанной поверхности.

Проведем статистическую обработку полученных результатов. Для проверки по критерию Кохрена (3.9) воспроизводимости опытов при выбранном уровне значимости  $q = 0,05$  вычислим в каждой точке факторного пространства среднее значение и дисперсию исследуемого параметра. Получаемые результаты запишем в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – Пример расчета ПФЭ типа 2<sup>3</sup>

Номер точки факторного пространства	Номер опыта			x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>1x2</sub>	x <sub>1x3</sub>	x <sub>2x3</sub>	x <sub>1x2x3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>i</sub>	S <sup>2</sup> <sub>y<sub>i</sub></sub>
	Серия один	Серия два	Серия три													
1	5	8	2	+	-	-	-	+	+	+	-	8,18	7,95	9,82	8,65	1,04
2	6	4	5	+	+	-	-	-	-	+	+	18,03	13,42	14,00	15,15	6,31
3	2	5	1	+	-	+	-	-	+	-	+	6,24	8,94	8,37	6,85	1,72
4	8	2	8	+	+	+	-	+	-	-	-	7,06	12,63	7,76	9,15	9,18
5	4	6	3	+	-	-	+	+	+	-	+	7,69	7,22	11,03	8,65	4,32
6	7	3	4	+	+	-	+	-	-	-	-	33,10	30,30	30,65	31,35	2,34
7	3	1	7	+	-	+	+	-	+	+	-	9,21	8,69	12,85	10,25	5,12
8	1	7	6	+	+	+	+	+	-	+	+	20,85	23,16	20,91	21,55	1,97
$\sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i$				121,6	32,0	-26,0	42,0	-5,6	15,2	-10,4	2,8	Критерий Кохрена $G_p = 0,29$ $G_{кр} = 0,52$ $(f_1 = 2, f_2 = 8, q = 0,05)$ Вывод: дисперсии однородны				
				15,2	4,1	-3,25	5,28	-0,7	1,9	-1,3	0,35					
Критерий Стьюдента $f = 16, q = 0,1, t_{кр} = 1,81$				b <sub>i</sub>	t <sub>i</sub>	Вывод	3н	3н	3н	3н	3н	3н	f <sub>1</sub>	F <sub>p</sub>	F <sub>крp</sub>	Вывод
Линейная ММ: $y = 15,2 + 4,1x_1 - 3,25x_2 + 5,25x_3$				3н	3н	3н	3н	3н	3н	3н	3н	9	1,99	2,54	ММ адекватна	
Нелинейная ММ: $y = 15,2 + 4,1x_1 - 3,25x_2 + 5,25x_3 + 1,9x_{1x3}$				3н	3н	3н	3н	3н	3н	3н	3н	9	1,99	2,54	ММ адекватна	
ММ в натуральном масштабе $y = 267,95 - 8,40 U[1 / В] - 3,25 I[1 / А] - 1,16 T[1 / °С] + 0,05 UT[1 / (В °С)]$ , где U – опорное напряжение, В; I – ток погрешления, А; T – конечная температура, °С																

## 4 Дробный факторный эксперимент

### 4.1 Составление матрицы планирования ДФЭ

Число опытов ПФЭ  $2^n$  быстро растет с увеличением числа факторов  $n$ , и при больших  $n$  этот вид эксперимента оказывается практически неприемлемым. Дробным факторным экспериментом (ДФЭ) называется система опытов, представляющая собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных.

Для построения матрицы планирования (МП) ДФЭ из имеющихся  $n$  факторов отбирают  $(n - p)$  основных факторов, для которых строят МП ПФЭ. Эту матрицу дополняют затем  $p$  столбцами, соответствующими оставшимся факторам. Уровни дополнительных факторов определяют как поэлементное умножение уровней не менее двух и не более  $(n - p)$  основных факторов. Говорят, что ДФЭ – это эксперимент типа  $2^{n-p}$ .

Выбранное для дополнительного фактора произведение называется *генератором* плана (поскольку определяет для дополнительного фактора правило чередования уровней варьирования в МП). Очевидно, что ДФЭ типа  $2^{n-p}$  будет иметь  $p$  генераторов. Например, для ДФЭ типа  $2^{3-1}$  число опытов равно четырем опытам по сравнению с 16 опытами в случае ПФЭ (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – МП ДФЭ типа  $2^{3-1}$

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1x_2$
+	–	–	+
+	+	–	–
+	–	+	–
+	+	+	+

При трех основных факторах ДФЭ содержит восемь опытов, а генераторами для дробных планов могут служить произведения  $x_1x_2$ ,  $x_1x_3$ ,  $x_2x_3$ ,  $x_1x_2x_3$ .

При введении одного дополнительного фактора (ДФЭ типа  $2^{4-1}$ ) может использоваться любая из четырех возможных генераторов:  $x_4 = x_1x_2$ ;  $x_4 = x_1x_3$ ;  $x_4 = x_2x_3$ ;  $x_4 = x_1x_2x_3$ .

Для нахождения математического описания процесса используются определенные части ПФЭ:  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  и т. д. Эта система опытов называется дробными репликами, а сам метод ДФЭ – методом дробных реплик. Возможные дробные реплики от ПФЭ типа  $2^4$  приведены в таблице 4.2.

### 4.2 Определение смешанности оценок коэффициентов

Составим матрицу ДФЭ для трех факторов (см. таблицу 4.1). По данному плану можно определить коэффициенты регрессии  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ . Однако коэффициенты регрессии  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  будут смешаны с парными взаимодействиями.

При значительном числе факторов и опытов определение смешанности по

МП является трудоемким. Для нахождения, при каких факторах и взаимодействиях оценки коэффициентов будут смешанными, вводят понятие контраста плана. Контраст получают умножением обеих частей генератора плана вводимого дополнительного фактора  $x_j$  на этот фактор.

Например, поскольку для ДФЭ (см. таблицу 4.1) генератор плана  $x_3 = x_1x_2$ , то для контраста получим  $x_3^2 = x_1x_2x_3$ , т. к.  $x_i^2 = 1$ , окончательно имеем  $1 = x_1x_2x_3$ . Чтобы определить, с какими факторами и взаимодействиями смешана оценка фактора  $x_i$ , необходимо умножить обе части контраста на этот фактор. Например, для  $x_1$  имеем  $x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$ , т. е.  $b_1$  оценивает одновременно  $\beta_1$  и  $b_{23}$ . Записывают это так  $b_1 \rightarrow \beta_1 + b_{23}$ . Для  $x_2$ :  $x_2 = x_1x_2x_3x_2 = x_1x_3$ , тогда  $b_2 \rightarrow \beta_2 + b_{13}$ ; для  $x_3$ :  $x_3 = x_1x_2x_3x_3 = x_1x_2$ , тогда  $b_3 \rightarrow \beta_3 + b_{13}$ , где  $\beta_i$  – действительные значения коэффициентов  $b_i$ .

В зависимости от числа факторов, входящих в контраст, говорят о разрешающей способности ДФЭ. Так, если для ДФЭ типа  $2^{4-1}$  в качестве генератора плана выбрано  $x_4 = x_1x_2x_3$  (контраст соответственно будет  $1 = x_1x_2x_3x_4$ ), то говорят, что у такого эксперимента разрешающая способность равна 4; если генератор  $x_1x_2 = x_4$  и контраст  $1 = x_1x_2x_4$ , то разрешающая способность равна 3.

Генераторы плана с наибольшей разрешающей способностью называют главными и отдают им предпочтение.

Необходимо отметить, что следствием уменьшения числа опытов по сравнению с ПФЭ является и уменьшение точности оценок, вызванное их смешанностью. Для насыщенного и сверхнасыщенного ДФЭ невозможна проверка адекватности ММ, так как для нее уже не остается степеней свободы.

**Пример** – Продолжим рассмотрение примера, приведенного в подразделе 3.5 для ПФЭ. Воспользовавшись информацией, что взаимодействия факторов  $x_1x_2$  и  $x_1x_2x_3$  оказались статистически незначимыми, исследуем влияние на качество поверхности магнитных дисков дополнительных факторов: скорости нагрева  $V$  и изотермической выдержки  $t$ , поставив для этой цели ДФЭ типа  $2^{5-2}$ .

### Решение

Условия проведения опытов сведем в таблицу 4.2. Факторы  $x_1x_2x_3$  остаются такими же, как в таблице 4.1.

Таблица 4.2 – Условия проведения ДФЭ

Характеристика плана	$x_1 = U$	$x_2 = I$	$x_3 = T$	$x_4 = V$	$x_5 = t$
Нулевой уровень	30 В	18 А	220 °С	10 °С/с	80 с
Интервал варьирования	2 В	1 А	20°С	3 °С/с	15 с
Верхний уровень	32 В	19 А	240 °С	13 °С/с	95 с
Нижний уровень	28 В	17 А	200 °С	7 °С/с	65 с

Для факторов  $x_4$  и  $x_5$  генераторами плана выберем взаимодействия  $x_1x_2$

и  $x_1x_2x_3$ , тогда контрасты будут соответственно  $1 = x_1x_2x_4$  и  $1 = x_1x_2x_3x_5$ , а обобщающий контраст  $1 = x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_3x_4x_5$ .

Найдем смешанность оценок:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{1345};$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{14} + \beta_{135} + \beta_{2345};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234} + \beta_{125} + \beta_{45};$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12} + \beta_{12345} + \beta_{35};$$

$$b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{234} + \beta_{25} + \beta_{145};$$

$$b_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{134} + \beta_{15} + \beta_{245}.$$

После составления МП эксперимента и проведения рандомизированных опытов сведем полученные результаты в таблицу 4.5, после чего проведем статистическую обработку полученных результатов. Для проверки по критерию Кохрена (3.6) воспроизводимости опытов при выбранном уровне значимости  $q = 0,05$  вычислим в каждой точке факторного пространства среднее значение и дисперсию (3.5) исследуемого параметра. Получаемые результаты заносим в таблицу 4.5.

Рассчитаем оценки коэффициентов регрессионного уравнения и проверим их статистическую значимость по критерию Стьюдента при  $q = 0,05$ . По критерию Фишера проверим адекватность линейной, а затем нелинейной ММ при  $q = +0,05$ .

Поскольку как линейная, так и нелинейная модели оказались неадекватными, делаем вывод о несоответствии выбранной ММ экспериментальным результатам. В дальнейших исследованиях следует использовать более сложные модели, например, квадратичные (ортогональное и рототабельное композиционное планирование).

### **4.3 Указания к выполнению индивидуального задания № 2**

По теме магистерской диссертации произвести планирование эксперимента ПФЭ или, если возможно, ДФЭ. В течение семестра провести часть экспериментальных исследований. Выполнить линейно-корреляционный и/или регрессионный анализ полученных данных, проверить адекватность полученной математической модели, оценить ошибку моделирования.

## Список литературы

1 **ГОСТ 10180–2012**. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. – Введ. 01.02.2016 г. (взамен ГОСТ 10180–90). – Минск: Гос. комитет по стандартизации РБ, 2015. – 36 с.

2 **ТКП ЕН 1992-1-1–2009\* (02250)**. Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1: Общие правила и правила для зданий. – Переиздание (июнь 2015 г.) с Изменением № 1 (введено в действие с 01.04.2015 г. приказом Минстройархитектуры от 17.10.2014 г. № 281); введ. 01.01.2010 г. – Минск: М-во архитектуры и стр-ва РБ, 2015. – 205 с.

3 **СП 5.03.01–2020**. Бетонные и железобетонные конструкции. – Переиздание (март 2022 г.) с Изменением № 1 (введено в действие с 20.05.2022 г. постановлением Минстройархитектуры от 15.03.2022 г. № 33). – Введ. 16.09.2020 г. (с отменой СНиП 2.03.01–84 и СНБ 5.03.01–02). – Минск: Минстройархитектуры, 2020. – 244 с.

4 **ТКП ЕН 1990–2011\* (02250)**. Еврокод. Основы проектирования строительных конструкций. – Переиздание (апрель 2015 г.) с Изменением № 1 (введено в действие с 01.04.2015 г. приказом Минстройархитектуры от 17.10.2014 г. № 281); введ. 01.07.2012 г. (взамен СТБ ЕН 1990–2007). – Минск: М-во архитектуры и стр-ва РБ, 2015. – 94 с.

## Приложение А (справочное)

Случайная величина  $t$ , распределенная по закону Стьюдента с числом степеней свободы  $f = n$ . Таблица А.1 содержит значения  $\varepsilon_1$ , полученные из условия  $P(|G| < \varepsilon) = 1 - q$ .

Таблица А.1 – Таблица  $t$ -распределения

$n$	$1 - q$					
	0,99	0,95	0,90	0,80	0,50	0,20
1	63,657	12,706	6,314	3,078	0,727	0,325
2	9,935	4,303	2,920	1,886	0,617	0,289
3	5,841	3,182	2,353	1,638	0,584	0,277
4	4,604	2,776	2,132	1,533	0,569	0,271
5	4,032	2,571	2,015	1,476	0,559	0,267
6	3,707	2,447	1,943	1,440	0,553	0,265
7	3,499	2,365	1,895	1,415	0,549	0,263
8	3,355	2,306	1,860	1,397	0,546	0,262
9	3,250	2,262	1,833	1,383	0,543	0,261
10	3,169	2,228	1,812	1,372	0,542	0,260
11	3,106	2,201	1,796	1,363	0,540	0,260
12	3,055	2,119	1,782	1,356	0,539	0,259
13	3,012	2,160	1,771	1,350	0,538	0,259
14	2,977	2,145	1,761	1,345	0,537	0,258
15	2,947	2,131	1,753	1,341	0,536	0,258
16	2,921	2,120	1,746	1,337	0,535	0,258
18	2,878	2,101	1,734	1,330	0,534	0,257
20	2,845	2,086	1,725	1,325	0,533	0,257
23	2,807	2,069	1,714	1,319	0,532	0,256
25	2,787	2,060	1,708	1,316	0,531	0,256
30	2,750	2,042	1,697	1,310	0,530	0,256
40	2,704	2,021	1,684	1,303	0,529	0,255
60	2,660	2,000	1,671	1,296	0,527	0,254
100	2,617	1,980	1,658	1,289	0,526	0,254
> 100	2,576	1,960	1,645	1,282	0,524	0,253

*Примечание* – Допускается линейная интерполяция по аргументу  $n$ , погрешность интерполяции не превышает 0,007

## Приложение Б (справочное)

Случайная величина  $F$ , распределенная по закону Фишера с числом степеней свободы  $f_1 = n_1$  для числителя и  $f_2 = n_2$  для знаменателя. Таблица Б.1 содержит значения  $\varepsilon_2$ , полученные из условия  $P(|F| < \varepsilon) = 0,95$  (верхняя строка при всех  $n_2$ )  $P(|F| < \varepsilon) = 0,99$  (нижняя строка при тех же  $n_2$ ).

Таблица Б.1 – Таблица  $F$ -распределения

$n_2$	$n_1$							
	2	3	4	6	9	12	24	> 24
1	199,5	215,7	224,0	234,0	241,0	244,9	249,0	254,3
	4999	5403	5625	5859	6022	6106	6235	6366
2	19,00	19,16	19,25	19,33	19,38	19,41	19,55	19,50
	99,00	99,17	99,25	99,33	99,39	99,42	99,46	99,50
3	9,55	9,28	9,12	8,94	8,81	8,74	8,64	8,53
	30,82	29,46	28,71	27,99	27,34	27,05	26,60	26,12
4	6,94	9,59	6,39	6,16	6,00	5,91	5,77	5,63
	18,00	16,69	15,98	15,21	14,66	14,37	13,93	13,46
5	5,79	5,41	5,19	4,95	4,77	4,68	4,53	4,36
	13,27	12,06	11,39	10,67	10,16	9,89	9,47	9,02
6	5,14	4,76	4,53	4,28	4,10	4,00	3,84	3,67
	10,52	9,78	9,15	8,47	7,98	7,72	7,31	6,88
7	4,74	4,35	4,12	3,87	3,68	3,57	3,41	3,23
	9,55	8,45	7,85	7,19	6,72	6,49	6,07	6,65
8	4,46	4,07	3,84	3,58	3,39	3,28	3,12	2,93
	8,65	7,59	7,01	6,37	5,91	5,67	5,28	4,86
9	4,26	3,86	3,63	3,73	3,18	3,07	2,90	2,71
	8,02	6,99	6,42	5,80	5,35	5,11	4,73	4,31
10	4,10	3,71	3,48	3,22	3,02	2,91	2,74	2,54
	7,56	6,55	5,99	5,39	4,94	4,71	4,33	3,91
11	3,98	5,59	3,36	3,09	2,90	2,79	2,51	2,40
	7,21	6,22	5,76	5,07	4,63	4,40	4,03	3,60
12	3,88	3,49	3,26	3,00	2,80	2,69	2,50	2,30
	6,93	5,95	5,41	4,82	4,39	4,16	3,78	3,36
13	3,80	3,41	3,18	2,92	2,71	2,60	2,42	2,21
	6,70	5,74	5,21	4,62	4,19	3,96	3,59	3,17
14	3,74	3,34	3,11	2,85	2,65	2,53	2,35	2,13
	6,51	5,56	5,04	4,46	4,03	3,80	3,43	3,00
16	3,63	3,24	3,01	2,74	2,54	2,42	2,24	2,01
	6,23	5,29	4,77	4,20	3,78	3,55	3,18	2,75

Окончание таблицы Б.1

$n_2$	$n_1$							
	2	3	4	6	9	12	24	> 24
18	3,55	3,16	2,93	2,66	2,46	2,34	2,15	1,92
	6,01	5,09	4,58	4,01	3,60	3,37	3,00	2,57
20	3,49	3,10	2,87	2,60	2,39	2,28	2,08	1,84
	5,85	4,94	4,43	3,87	3,46	3,23	2,86	2,42
24	3,40	3,01	2,78	2,51	2,30	2,18	1,98	1,37
	5,61	4,72	4,22	3,67	3,26	3,03	2,66	2,21
32	3,29	2,90	2,67	2,40	2,19	2,07	1,86	1,59
	5,34	4,46	3,97	3,43	3,02	2,80	2,42	1,96
48	3,19	2,80	2,57	2,30	2,08	1,96	1,75	1,45
	5,08	4,22	3,74	3,20	2,80	2,58	2,20	1,70
>48	2,99	2,60	2,37	2,09	1,88	1,75	1,52	1,00
	4,61	3,78	3,32	2,80	2,41	2,18	1,79	1,00

*Примечание* – Допускается линейная интерполяция по аргументу  $n_2$  и квадратичная по  $n_1$ , погрешность интерполяции не превышает 0,01