

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет»

УТВЕРЖДАЮ  
Первый проректор Белорусско-Российского  
университета

Ю.В. Машин

2023

Регистрационный № УД-150303/Б.1.В.2/р

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И**  
**ПЛАСТИЧНОСТИ**  
(наименование дисциплины)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Направление подготовки 15.03.03 Прикладная механика

Направленность (профиль) Компьютерный инжиниринг

Квалификация Бакалавр

	Форма обучения
	Очная
Курс	3
Семестр	6
Лекции, часы	34
Практические занятия, часы	16
Экзамен, семестр	6
Контактная работа по учебным занятиям, часы	50
Самостоятельная работа, часы	94
Всего часов / зачетных единиц	144 / 4

Кафедра-разработчик программы: Основы проектирования машин  
(название кафедры)

Составитель: А.Е. Науменко, канд. техн. наук

(И.О. Фамилия, ученая степень, ученое звание)

Могилев, 2023

Рабочая программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика № 729 от 09.08.2021, учебным планом рег. № 150303-2.1 от 28.04.2023.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению кафедрой «Основы проектирования машин»  
(название кафедры)

«15» декабря 2023 г., протокол № 5.

Зав. кафедрой  А.П. Прудников

Одобрена и рекомендована к утверждению Научно-методическим советом  
Белорусско-Российского университета

20 12 2023, протокол № 3.

Зам. председателя  
Научно-методического совета

 С.А. Сухоцкий

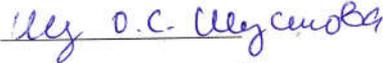
Рецензент:

О.В. Борисенко, Начальник отдела механизации, автоматизации и охраны труда  
РУП «Могилевавтодор»

(И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание рецензента)

Рабочая программа согласована:

Ведущий библиотекарь



Начальник учебно-методического  
отдела

 О.Е. Печковская

# 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

## 1.1 Цель учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины является приобретение студентами знаний в области формирования напряженного состояния, деформации тел под воздействием внешних нагрузок и внутренних напряжений, для решения с помощью аналитических и численных методов задач теории упругости.

## 1.2 Планируемые результаты изучения дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

### **знать:**

- основные уравнения теории упругости и положения механики деформируемого тела;
- основные соотношения плоской задачи теории упругости в декартовой и полярной системах координат;
- приближенные (численные и аналитические) методы решения задач.

### **уметь:**

- решать плоские задачи теории упругости различными методами;
- проводить типовые расчеты и определять вид напряженного состояния тела;
- формировать граничные условия для численных методов решения.

### **владеть:**

- аналитическими методами определения напряжений, деформаций и перемещений в балках, пластинах;
- инструментарием приближенных методов при решении основных задач теории упругости.

## 1.3 Место учебной дисциплины в системе подготовки студента

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)» (Часть Блока 1, формируемая участниками образовательных отношений).

Перечень учебных дисциплин, изучаемых ранее, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины:

- математика;
- физика;
- теоретическая механика;
- сопротивление материалов;
- материаловедение;

Перечень учебных дисциплин, которые будут опираться на данную дисциплину:

- численные методы расчета в инженерных задачах;
- моделирование в технических системах;

Кроме того, результаты, полученные при изучении дисциплины на практических занятиях будут применены при прохождении технологической (проектно-технологической) практики и преддипломной практики, а также при подготовке выпускной квалификационной работы и дальнейшей профессиональной деятельности.

## 1.4 Требования к освоению учебной дисциплины

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечивать формирование следующих компетенций:

Коды формируемых компетенций	Наименования формируемых компетенций
ПК-2	Способен проводить конструкторские и расчетные работы.

## 2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Вклад дисциплины в формирование результатов обучения выпускника (компетенций) и достижение обобщенных результатов обучения происходит путём освоения содержания обучения и достижения частных результатов обучения, описанных в данном разделе.

### 2.1 Содержание учебной дисциплины

Номера тем	Наименование тем	Содержание	Коды формируемых компетенций
1	Введение	Постановка задачи теории упругости и пластичности. Допущения.	ПК-2
2	Главные напряжения	Нагрузки и напряжения. Тензор напряжений. Инварианты тензора напряжений. Шаровой тензор и девиатор напряжений. Интенсивности касательных и нормальных напряжений. Тензор деформаций. Главные деформации. Шаровой тензор и девиатор деформаций. Инварианты тензора деформаций. Интенсивности деформаций сдвига и продольных деформаций	ПК-2
3	Структура основных уравнений теории упругости	Структура основных уравнений теории упругости. Статические уравнения теории упругости. Частный дифференциал напряжений. Парность касательных напряжений. Статические уравнения в матричной форме. Матрица операторов дифференцирования. Уравнения граничных условий. Матрица направляющих косинусов для нормали элементарной поверхности нагруженного тела. Геометрические уравнения теории упругости. Частные дифференциалы перемещений точки тела. Продольные и сдвиговые деформации. Геометрические уравнения в матричной форме.	ПК-2
4	Точные методы решения задач теории упругости	Прямая и обратная задачи теории упругости. Алгоритм решения обратной задачи. Проблема решения прямой задачи. Метод напряжений. Гармонические операторы Гамильтона и Лапласа. Уравнения Мичелла. Метод перемещений. Параметр Ламе. Полуобратный метод Сен-Венана. Применение метода Сен-Венана для решения задачи о кручении стержня с эллиптическим поперечным сечением. Относительный угол закручивания стержня. Коэффициент жёсткости стержня. Принцип Сен-Венана.	ПК-2
5	Вариационная формулировка задачи теории упругости	Энергия деформированного тела. Функционал энергии деформированного тела. Потенциальная энергия деформации тела. Энергия внешних сил. Плотность энергии деформации. Потенциал поверхностной нагрузки. Вариационный принцип Лагранжа. Вариации функционала. Экстремум и экстремали функционала. Метод Ритца для решения задачи теории упругости. Обобщённые перемещения. Базисные функции форм деформации тела. Метод Ритца для нелинейно-деформированного тела. Принцип Кастильяно. Дополнительная энергия деформации тела. Использование принципа Кастильяно при решении задач для многоконтурных тел. Общий вариационный принцип.	ПК-2

6	Классификация приближённых методов	Методы решения краевой задачи в дифференциальной форме. Прямые методы решения краевой задачи. Связь между развитием ЭВМ и приближёнными методами решения задач теории упругости. Метод конечных разностей. Проблемы практического использования метода конечных разностей для решения задач теории упругости.	ПК-2
7	Общие понятия метода конечных элементов	Реализация метода конечных элементов в современных программных комплексах обеспечивающих работу конструктора. Примеры программного обеспечения и их классификация. Типы решаемых задач с помощью МКЭ. Методы управления качеством конечно-элементной сетки. Алгоритмы оценки качества конечно-элементной сетки, валидация результата.	ПК-2

## 2.2 Учебно-методическая карта учебной дисциплины

№ недели	Лекции (наименование тем)	Часы	Практические занятия	Часы	Самостоятельная работа, часы	Форма контроля знаний	Баллы (max)
<b>Модуль 1</b>							
1	1. Введение	2			1		
2	2. Главные напряжения	2	Пр.р. 1 Изучение основных допущений модели деформируемого тела.	2	5	ЗПР	3
3	2. Главные напряжения	2			1		
4	3. Структура основных уравнений теории упругости	2	Пр.р. 2 Исследование напряженно-деформированного состояния балки	2	7	ЗПР Т	3 9
5	3. Структура основных уравнений теории упругости	2			1		
6	4. Точные методы решения задач теории упругости	2	Пр.р. 3 Статическое исследование напряженно-деформированного состояния детали.	2	5	ЗПР	3
7	4. Точные методы решения задач теории упругости	2			1		
8	4. Точные методы решения задач теории упругости	2	Пр.р. 4 Статическое исследование напряженно-деформированного состояния детали определение главных напряжений	2	7	ЗПР Т ПКУ	3 9 30
<b>Модуль 2</b>							
9	5. Вариационная формулировка задачи теории упругости	2			1		
10	5. Вариационная формулировка задачи теории упругости	2	Пр.р. 5 Проведение оценки напряженно-деформированного состояния пластин	2	5	ЗПР	3
11	5. Вариационная формулировка задачи теории упругости	2			1		
12	6. Классификация приближённых методов	2	Пр.р. 6 Проведение оценки напряженно-деформированного состояния пластин	2	7	ЗПР Т	3 9
13	6. Классификация приближённых методов	2			1		
14	6. Классификация приближённых методов	2	Пр.р. 7. Закрепление теоретических знаний и практических навыков исследования напряжений в точке используя формулы теории упругости	2	5	ЗПР	3
15	7. Общие понятия метода конечных элементов	2			1		
16	7. Общие понятия метода конечных элементов	2	Пр.р. 8. Закрепление практических навыков оценки напряженно-деформированного состояния детали	2	7	ЗПР Т	3 9
17	7. Общие понятия метода конечных элементов	2			2	ПКУ	30
18-21					36	ПА (экзамен)	40
	<b>Итого</b>	<b>34</b>		<b>16</b>	<b>94</b>		<b>100</b>

Принятые обозначения:

Текущий контроль –

Т – тестовое задание;

ЗПР – защита практической работы;

ПКУ – промежуточный контроль успеваемости.

ПА - Промежуточная аттестация.

Итоговая оценка определяется как сумма текущего контроля и промежуточной аттестации и соответствует баллам:

#### Экзамен

Оценка	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Баллы	87-100	65-86	51-64	0-50

### 3 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При изучении дисциплины используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студентов. Применение форм и методов проведения занятий при изучении различных тем курса представлено в таблице.

№ п/п	Форма проведения занятия	Вид аудиторных занятий		Всего часов
		Лекции	Практические занятия	
1	Мультимедиа	Темы 1-6		28
2	Проблемные / проблемно-ориентированные	Тема 7	П.Р. 1	8
3	С использованием ЭВМ		П.Р. 2-6, 8	12
4	Расчетные		П.Р. 7	2
	<b>ИТОГО</b>	34	16	50

### 4 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

Используемые оценочные средства по учебной дисциплине представлены в таблице и хранятся на кафедре.

№ п/п	Вид оценочных средств	Количество комплектов
1	Вопросы к экзамену	1
2	Билеты к экзамену	1
3	Тестовые задания	4
6	Вопросы для защиты практических занятий	8

### 5 МЕТОДИКА И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ

#### 5.1 Уровни сформированности компетенций

№ п/п	Уровни сформированности компетенции	Содержательное описание уровня	Результаты обучения
<i>ПК-2 Способен проводить конструкторские и расчетные работы</i>			
<i>ИПК-2.2. Применяет методы энерго-кинематических и прочностных расчетов</i>			
1	Пороговый уровень	Знание основных методов решения задач теории упругости.	Применение методов решения задач теории упругости для рассматриваемых объектов

2	Продвинутый уровень	Анализ методов решения задач теории упругости применительно к рассматриваемым объектам	Проведение выбора методов решения задач теории упругости на основании анализа условий работы объекта.
3	Высокий уровень	Оценка применимости методов решения задач теории упругости к рассматриваемым объектам	Решение задач теории упругости на основании оценки условий работы, применимости методов решения задач и ожидаемых результатов
<i>ИПК-2.3. Выбирает оптимальные решения при проведении конструкторских и расчетных работ</i>			
1	Пороговый уровень	Знание основных подходов оценки напряженно-деформированного состояния рассчитываемого объекта.	Умение определить напряженно деформированное состояние для деталей и узлов машин и механизмов
2	Продвинутый уровень	Анализ основных подходов оценки напряженно-деформированного состояния рассчитываемого объекта.	Умение произвести оценку напряженно деформированного состояния деталей и узлов машин и механизмов
3	Высокий уровень	Оптимизация конструкции рассчитываемого объекта по результатам оценки его напряженно-деформированного состояния	Умение произвести корректировку конструкции деталей и узлов машин и механизмов в результате расчета его напряженно деформированного состояния

## 5.2 Методика оценки знаний, умений и навыков студентов

Результаты обучения	Оценочные средства
<b><i>ПК-2 Способен проводить конструкторские и расчетные работы</i></b>	
Применение методов решения задач теории упругости для рассматриваемых объектов Умение определить напряженно деформированное состояние для деталей и узлов машин и механизмов	Тестовые задания. Вопросы для защиты практических занятий. Билеты к экзамену.
Проведение выбора методов решения задач теории упругости на основании анализа условий работы объекта. Умение произвести оценку напряженно деформированного состояния деталей и узлов машин и механизмов	Тестовые задания. Вопросы для защиты практических занятий. Билеты к экзамену.
Решение задач теории упругости на основании оценки условий работы, применимости методов решения задач и ожидаемых результатов Умение произвести корректировку конструкции деталей и узлов машин и механизмов в результате расчета его напряженно деформированного состояния	Тестовые задания. Вопросы для защиты практических занятий. Билеты к экзамену.

### 5.3 Критерии оценки практических занятий

Практическая работа оценивается до 3 баллов в соответствии с приведенной шкалой. При этом баллы начисляются за ее защиту в зависимости от уровня знаний студентом теоретического материала по теме работы, выполненной практической (расчетной) части и выводам по результатам расчетов.

#### Шкала критериев оценки практических работ

Баллы	Требования к знаниям
3	Студент имеет глубокие теоретические знания по теме практической работы, четко и логически последовательно отвечает на поставленные вопросы, приводит в отчете обоснованное решение практической задачи, формирует обоснованные выводы по результатам решения практической части работы.
2	Студент имеет достаточные теоретические знания по теме практической работы, способен дать правильный ответ на поставленные вопросы, приводит в отчете верное решение практической задачи, способен сформировать выводы по результатам решения практической части работы.
1	Студент имеет частичные теоретические знания по теме практической работы, способен дать правильный ответ не менее чем на половину поставленных вопросов, владеет основным подходом решения практической задачи, способен сформировать частичные выводы по результатам решения практической части работы.

Если работа выполнена, но не защищена, то баллы по ней не начисляются, а она попадает в разряд задолженностей.

### Критерии оценки тестового задания

Тестовые задания проводятся через платформу moodle. Тестовые задания включают в себя вопросы по темам лекционного курса и проводятся на 4-ой, 8-ой, 12-ой и 16-ой неделях в соответствии с таблицей 2.2.

Тестовое задание включает в себя от 10 до 20 вопросов. Каждое тестовое задание оценивается до 9 баллов, которые начисляются в зависимости от количества правильных ответов на вопросы в соответствии со шкалой

#### Шкала критериев оценки тестового задания

Баллы	Количество правильных ответов на вопросы
9	100% правильных ответов
8	85% правильных ответов
7	70% правильных ответов
6	60% правильных ответов
5	50% правильных ответов
4	40% правильных ответов
3	30% правильных ответов
2	20% правильных ответов
1	10% правильных ответов
0	Отсутствие правильных ответов

### 5.5 Критерии оценки экзамена

Проставляемая в зачетную ведомость отметка о сдаче зачета соответствует сумме баллов, набранных студентом в течение семестра до 60 баллов и полученных при сдаче экзамена до 40 баллов и выставляется в соответствии с приведенной шкалой

Оценка	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Баллы	87-100	65-86	51-64	0-50

Задание на экзамен включает в себя два теоретических вопроса и 1 задачу.

Первый теоретический вопрос оценивается в 10 баллов, второй теоретический вопрос оценивается в 15 баллов.

Полный ответ на теоретические вопросы должен включать в себя:

- теоретическое описание (оценивается до 5 баллов);
- расчетную схему (оценивается до 5 баллов);
- расчетные формулы (оценивается до 5 баллов);

Основанием для простановки неполного балла являются отсутствие или ошибки в расчетных схемах, формулах, теоретическом описании.

Задача оценивается в 15 баллов

Полное решение задачи должно включать в себя:

- расчетную схему (оценивается до 5 баллов);
- расчетные формулы с результатами расчета (оценивается до 5 баллов);
- оценку полученных результатов (оценивается до 5 баллов).

Основанием для простановки неполного балла являются отсутствие решения, ошибки в расчетной схеме и расчетных формулах, отсутствие или неверное заключение.

## **6 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

Самостоятельная работа студентов (СРС) направлена на закрепление и углубление освоения учебного материала, развитие практических умений. СРС включает следующие виды самостоятельной работы студентов:

- подготовку к защите практических занятий;
- подготовку к тестовому заданию;
- подготовку к экзамену;

Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы студентов приведен в приложении и хранится на кафедре.

Для СРС рекомендуется использовать источники, приведенные в п. 7.

## **7 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **7.1 Основная литература**

№ п/п	Библиографическое описание	Гриф	Количество экземпляров
1	Чемодуров, В. Т. Основы теории упругости, пластичности и ползучести : учебное пособие / В.Т. Чемодуров, С.Г. Ажермачев, К.С. Пшеничная-Ажермачева. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 238 с.	Рекомендовано Межрегиональным учебно-методическим советом профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (квалификация (степень) «бакалавр»)	<a href="https://znanium.com/catalog/document?id=349419">https://znanium.com/catalog/document?id=349419</a>

		(протокол № 9 от 13.05.2019)	
2	Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебник / Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М.; Под ред. Варданяна Г.С., - 2-е изд., испр. и доп. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 512 с.	Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский государственный строительный университет» в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (регистрационный № рецензии 1100 от 09.11.2010, МГУП)	<a href="https://znanium.com/catalog/document?id=359339">https://znanium.com/catalog/document?id=359339</a>

## 7.2 Дополнительная литература

№ п/п	Библиографическое описание	Гриф	Количество экземпляров
1	Самогин, Ю. Н. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов / Самогин Ю.Н., Хроматов В.Е., Чирков В.П. - Москва :Физматлит, 2012. - 200 с.	Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Механика материалов и конструкций»	<a href="https://znanium.com/catalog/document?id=61429">https://znanium.com/catalog/document?id=61429</a>

## 7.3 Перечень ресурсов сети Интернет по изучаемой дисциплине

1. <http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/pronina/publ/publ1.pdf>
2. <https://www.twirpx.com/files/science/mechanics/rigid/elasticity/>
3. [http://www.ph4s.ru/book\\_uprugost.html](http://www.ph4s.ru/book_uprugost.html)

**7.4 Перечень наглядных и других пособий, методических рекомендаций по проведению учебных занятий, а также методических материалов к используемым в образовательном процессе техническим средствам**

### 7.4.1 Методические рекомендации

1 Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Методические указания к практическим занятиям для студентов направления подготовки 15.03.03 Прикладная механика: – Могилев, Белорусско-Российский университет. (электронный вариант).

### 7.4.2 Информационные технологии

#### Мультимедийные презентации

Тема 1 - Введение.

Тема 2 – Главные напряжения.

Тема 3 – Структура основных уравнений теории упругости.

Тема 4 – Точные методы решения задач теории упругости

Тема 5 – Вариационная формулировка задачи теории упругости

Тема 6 - Классификация приближённых методов

**7.4.3 Перечень программного обеспечения, используемого в образовательном процессе**

Лицензионные:

Тема 1-7 - SolidWorks – программа для создания объемных параметрических моделей и расчета моделей методом конечных элементов.

## **8 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Материально-техническое обеспечение дисциплины содержится в паспортах лабораторий кафедры «Основы проектирования машин» «803», 805»: рег. номер ПУЛ-4.503-803/07-23.

# **ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

(наименование дисциплины)

## **АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Направление подготовки** 15.03.03 Прикладная механика

**Направленность (профиль)** Компьютерный инжиниринг

	Форма обучения
	Очная
Курс	3
Семестр	6
Лекции, часы	34
Практические занятия, часы	16
Экзамен, семестр	6
Контактная работа по учебным занятиям, часы	50
Самостоятельная работа, часы	94
Всего часов / зачетных единиц	144 / 4

### 1 Цель учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины является приобретение студентами знаний в области формирования напряженного состояния, деформации тел под воздействием внешних нагрузок и внутренних напряжений, для решения с помощью аналитических и численных методов задач теории упругости.

### 2. Планируемые результаты изучения дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

**знать:**

- основные уравнения теории упругости и положения механики деформируемого тела;
- основные соотношения плоской задачи теории упругости в декартовой и полярной системах координат;
- приближенные (численные и аналитические) методы решения задач.

**уметь:**

- решать плоские задачи теории упругости различными методами;
- проводить типовые расчеты и определять вид напряженного состояния тела;
- формировать граничные условия для численных методов решения.

**владеть:**

- аналитическими методами определения напряжений, деформаций и перемещений в балках, пластинах;
- инструментарием приближенных методов при решении основных задач теории упругости.

### 3. Требования к освоению учебной дисциплины

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечивать формирование следующих компетенций:

ПК-2. Способен проводить конструкторские и расчетные работы.

### 4. Образовательные технологии

При изучении дисциплины используются мультимедийные (лекционные занятия) а также расчетные, проблемные/проблемно-ориентированные занятия и занятия с использованием ЭВМ (практические занятия).