МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Могилев 2024

УДК 517
ББК 22.1
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» апреля 2024 г., протокол № 8

Составители: канд. физ.-мат. наук Л. И. Сотская;
канд. пед. наук Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Интегральное исчисление функции одной переменной», достаточное количество примеров с подробными решениями, примеры для самостоятельного решения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Первообразная и неопределенный интеграл

1.1 Теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X (на отрезке, в конечном или бесконечном интервале или полуинтервале).

Функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$ в промежутке X, если $F(x)$ дифференцируема в этом промежутке и для любого $x \in X$ значение производной $F'(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X .$$

Теорема. Любая непрерывная в промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ в этом промежутке.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на множестве X, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т. е. $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке называют неопределенным интегралом от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx$.

При этом символ $\int$ называют знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а x – переменной интегрирования.

Нахождение неопределенного интеграла данной функции называется интегрированием.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке, то правомерна запись

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная величина, называемая постоянной интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

Пусть для функции $f(x)$, определенной в некотором промежутке X, в этом промежутке существуют первообразная $F(x)$ и неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.

1 Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x),$$

или, что то же самое, дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\,.$$

2 Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x)+C\,.$$

3 Постоянный множитель a $(a \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx\,.$$

4 Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx\,.$$

5 Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C\,.$$

6 Инвариантность формул интегрирования. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)du = F(u)+C\,,$$

где $u = u(x)$ – дифференцируемая функция.

Таблица интегралов

1 $\int 0\,dx = C\,.$

2 $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha \neq -1:$

а) $\int dx = x + C$; б) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$.

3 $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$:

а) $\int e^x\,dx = e^x + C$.

4 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

5 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

6 $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

7 $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C$.

8 $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}x + C$.

9 $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C_1$, $a \neq 0$:

а) $\int \frac{1}{1 + x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C$.

10 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1$, $a \neq 0$:

а) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x + C$.

11 $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$, $a \neq 0$ («высокий» логарифм).

12 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$ («длинный» логарифм).

13 $\int \sqrt{x^2 + A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

14 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

15 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

16 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применении свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

1.2 Примеры решения задач

1 $\int 2^x\left(1+3x^2 2^{-x}\right)dx = \int\left(2^x+3x^2\right)dx = \int 2^x dx + \int 3x^2 dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C$.

2 $\int \dfrac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx = \int\left(1+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)dx = \int dx + 3\cdot\int\dfrac{dx}{\cos^2 x} = x + 3\mathrm{tg}x + C$.

3 $\int \dfrac{x^2-8}{x^2-9}dx = \int\dfrac{x^2-9+1}{x^2-9}dx = \int\left(1+\dfrac{1}{x^2-9}\right)dx = \int dx + \int\dfrac{dx}{x^2-3^2} = x + \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C$.

4 $\int \dfrac{\sqrt{x}-2x^3}{x^2}dx = \int\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}dx - \int\dfrac{2x^3}{x^2}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx - 2\int x dx = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} + x^2 + C$.

1.3 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int\left(x^2+2x+\dfrac{1}{x}\right)dx.$

2 $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx.$

3 $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$

4 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

5 $\int 3^x 5^x dx$.

6 $\int\left(\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

7 $\int\dfrac{x-2}{x^3}dx$.

8 $\int\dfrac{10x^8-3}{x^4}dx$.

9 $\int\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$.

10 $\int\left(2^x+3^x\right)^2 dx$.

11 $\int\dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

12 $\int\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

13 $\int e^x\left(1-\dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$.

14 $\int\dfrac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.

15 $\int\dfrac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$.

16 $\int\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$.

17 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$.

18 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

19 $\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx$.

20 $\int \frac{4\sqrt{1-x^2} + 3x^2}{x^2 - 1} dx$.

21 $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx$.

22 $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$.

1.4 Домашнее задание

1 $\int \left(2x^8 - 5x^5 - 1\right) dx$. Ответ: $\frac{2}{9}x^9 - \frac{5}{6}x^6 - x + C$.

2 $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2 + 7} \right) dx$. Ответ: $5\ln|x| - 40\sqrt[4]{x} - \frac{3\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{7}}{7} + C$.

3 $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$. Ответ: $3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$ $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$.

4 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$. Ответ: $-\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C$.

5 $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$. Ответ: $x + \cos x + C$.

6 $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C$.

7 $\int \frac{3 - \sqrt{5 + x^2}}{5 + x^2} dx$. Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{5} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + C$.

8 $\int \frac{2 + 3x^2}{x^2\left(1 + x^2\right)} dx$. Ответ: $-\frac{2}{x} + \mathrm{arctg}x + C$.

9 $\int \frac{xe^x - x}{x} dx$. Ответ: $e^x - x + C$.

10 $\int \frac{2x\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$. Ответ: $x^2 - \mathrm{ctg}x + C$.

2 Основные методы интегрирования

2.1 Метод подведения под знак дифференциала. Теоретические сведения

Свойство инвариантности неопределенного интеграла позволяет свести нахождение неопределенного интеграла от функции $g(x)$ к следующей процедуре: выделить в ней в качестве сомножителей производную $u'(x)$

некоторого промежуточного аргумента u и функцию $f(u)$ этого аргумента, т. е. представить $g(x)$ в виде $f(u)\cdot u'(x)$, а затем найти первообразную $F(u)$ функции $f(u)$:

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))\cdot u'(x)dx = \int f(u(x))\cdot du(x) = F(u(x)) + C\,. \tag{2.1}$$

Процедура нахождения неопределенного интеграла при помощи (2.1) *носит название интегрирования подведением под знак дифференциала* (*производную* $u'(x)$ *«подводят» под знак дифференциала:* $u'(x)dx = du(x)$).

2.2 Примеры решения задач

1 $\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}(-3x)'dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = e^{-3x} + C$.

2 $\int 3x^2\cos(x^3+1)dx = \int \cos(x^3+1)\cdot d(x^3+1) = \sin(x^3+1) + C$.

3 $\int \frac{y^2}{\sqrt{y^6+6}}dy = \frac{1}{3}\int \frac{dy^3}{\sqrt{(y^3)^2+6}} = \frac{1}{3}\ln\left|y^3 + \sqrt{y^6+6}\right| + C$.

4 $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C\,.$$

2.3 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \cos x\cdot d(\cos x)$.

2 $\int \frac{dx}{x+2}$.

3 $\int \frac{dx}{3x-1}$.

4 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

5 $\int \sqrt{8-2x}\,dx$.

6 $\int \sin(2x-3)dx$.

7 $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

8 $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$.

9 $\int \frac{x}{x^4+1}dx$.

10 $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

11 $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$.

12 $\int \mathrm{ctg}(3x)\,dx$.

13 $\int e^{x^2}x\,dx$

14 $\int \frac{4\cdot \mathrm{arctg}x - x}{1+x^2}dx$.

15 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

16 $\int \frac{x+\arccos^2(3x)}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

17 $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

18 $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

19 $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

20 $\int \cos^{-2}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx.$

2.4 Домашнее задание

1 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$. Ответ: $\ln\left|x^2-3x+8\right|+C$.

2 $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Ответ: $\mathrm{arctg}(x+2)+C$.

3 $\int \frac{x^3dx}{x^8-4}$. Ответ: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right|+C$.

4 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$. Ответ: $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$.

5 $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$. Ответ: $\ln|2+\ln x|+C$.

6 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $-\frac{1}{\arcsin x}+C$.

7 $\int \mathrm{tg}(3x+4)dx$. Ответ: $-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x+4)|+C$.

8 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$. Ответ: $\cos\frac{1}{x}+C$.

9 $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}$. Ответ: $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C$.

10 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\mathrm{ctg}x}}$. Ответ: $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\mathrm{ctg}x)^3}+C$.

2.5 Метод подстановки. Теоретические сведения

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, *где функция* $f(x)$ *определена на некотором множестве X. Введем новую переменную формулой* $x = \varphi(t): T \to X$, *где функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема на некотором множестве T и осуществляет взаимно однозначное отображение T на X, т. е. имеет обратную функцию* $t = \varphi^{-1}(x): X \to T$.

Справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.2)$$

Таким образом, вычисление $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $t = \varphi^{-1}(x)$.

2.6 Примеры решения задач

1 $\int x \cdot \sqrt{x-3}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x-3} = t, \\ x = t^2+3, \quad dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt =$

$$= \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}(x-3)^2\sqrt{x-3} + 2(x-3)\sqrt{x-3} + C.$$

2 $\int \frac{dx}{e^x+1} = \begin{bmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t, dx = \frac{1}{t}dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t\cdot(t+1)} = \int \frac{1+t-t}{t\cdot(t+1)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} =$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

3 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 2\int \frac{dt}{t+1} =$

$$= 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

2.7 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+1}}{2}+C$.

2 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}+C$.

3 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$.

4 $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$. Ответ: $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C$.

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

6 $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{1+x}}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-1-x+4\sqrt{1+x}-4\ln\left|\sqrt{1+x}+1\right|+C$.

7 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. Ответ: $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+C$.

2.8 Домашнее задание

1 $\int \frac{xdx}{(3-x)^7}$. Ответ: $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$.

2 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$.

3 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$.

4 $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$. Ответ: $\frac{1}{97\cdot(1-x)^{97}}-\frac{1}{49\cdot(1-x)^{98}}+\frac{1}{99\cdot(1-x)^{99}}+C$.

2.9 Интегрирование по частям. Теоретические сведения

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на множестве X, и кроме того, на этом множестве существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и интеграл $\int udv$, причем

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) называется *формулой интегрирования по частям.* Ее используют в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно представить в виде udv таким образом, что интеграл, полученный в правой части формулы (2.3), может оказаться проще исходного интеграла. При этом за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании.

2.10 Примеры решения задач

1 $\int \arcsin x dx = \left[\begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right] = x \cdot \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$$= x \cdot \arcsin x + \int \frac{d\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C .$$

2 $\int x^2 \sin x dx = \left[\begin{matrix} u = x^2; & du = 2x dx; \\ dv = \sin x dx; & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right] =$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = = \left[\begin{matrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x dx\right) = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \cos x\right) + C .$$

2.11 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \ln x dx$. Ответ: $x \cdot (\ln x - 1) + C$.

2 $\int x \cdot \ln(6x) dx$. Ответ: $\dfrac{x^2}{4}(2\ln(6x) - 1) + C$.

3 $\int x \cdot \cos(2x) dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2} x \sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x) + C$.

4 $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Ответ: $x \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$.

5 $\int x \cdot e^{-2x} dx$. Ответ: $C - \dfrac{1}{2} e^{-2x}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

6 $\int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$. Ответ: $C - \dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$.

7 $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} \cdot dx$. Ответ: $x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

8 $\int e^x \cos x dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$.

9 $\int x^3 e^{x^2} dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{x^2} + C$.

2.12 Домашнее задание

1 $\int x \cdot 2^{-x} dx$. Ответ: $C - \dfrac{x\ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2}$.

2 $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x\right) + C$.

3 $\int x^2 \ln x dx$. Ответ: $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$.

4 $\int \arcsin^2 x dx$. Ответ: $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + 2x + C$.

5 $\int x \ln^2 x dx$. Ответ: $\dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - \dfrac{x^2 \ln x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + C$.

6 $\int \dfrac{x}{\sin^2 x} dx$. Ответ: $C - x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x|$.

7 $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$. Ответ: $-\dfrac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.

3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Теоретические сведения

Интегрирование произвольной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}$ с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.

Если $m \geq n$, т. е. исходная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ неправильная, то следует предварительно выделить из этой дроби целую часть делением числителя на знаменатель «уголком», т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n} + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степеней $m-n \geq 0$ и r соответственно, причем $r < n$.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, следует предварительно разложить ее на сумму простейших дробей.

Среди правильных рациональных дробей выделяют четыре типа, которые относят к простейшим рациональным дробям:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

где a, p, q, A, M, N – действительные числа; $k>1$ – целое и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней $\left(p^2-4q<0\right)$.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трех типов:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \left[\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t, \\ x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2}\ln\left|t^2+q-\frac{p^2}{4}\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{4q-p^2}} +$$

$$+ C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3.2 Пример решения задач

Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx$.

Решение

Раскладывают правильную дробь $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Приводят дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивают числители левой и правой частей. Получают

$$x^2+2 = A\left(x^2+2x+1\right) + B_1\left(x^2-x-2\right) + B_2(x-2).$$

Рассмотрим несколько способов нахождения коэффициентов A, B_1, B_2.

Способ 1. Метод сравнения коэффициентов.

Из тождественного равенства многочленов приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях правой и левой частей равенства:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1 = A + B_1 \\ x^1 & 0 = 2A - B_1 + B_2 \\ x^0 & 2 = A - 2B_1 - 2B_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{3}, \\ B_1 = \dfrac{1}{3}, \\ B_2 = -1. \end{cases}$$

Способ 2. Метод частных значений.

Подставляют произвольные значения x в равенство, получают

$$\begin{array}{c|c} x = -1 & 3 = -3B_2 \\ x = 2 & 6 = 9A \\ x = 0 & 2 = A - 2B_1 - 2B_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = -1, \\ A = \dfrac{2}{3}, \\ B_1 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Способ 3. Комбинированный метод.

В данном примере можно скомбинировать оба способа:

$$\begin{array}{c|c} x = -1 & 3 = -3B_2 \\ x = 2 & 6 = 9A \\ x^2 & 1 = A + B_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = -1, \\ A = \dfrac{2}{3}, \\ B_1 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Итак,

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{2}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Представляют данный интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

3.3 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \frac{x+3}{x(x+2)(x-1)}dx$. Ответ: $-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+C$.

2 $\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C$.

3 $\int \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+2x+3\right)+C$.

4 $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

5 $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$. Ответ: $\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C$.

6 $\int \frac{x^4+x}{x^3-1}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

7 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$. Ответ: $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

3.4 Домашнее задание

1 $\int \frac{5}{\left(x^2+1\right)(x+2)}dx$. Ответ: $-\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+\ln|x+2|+C$.

2 $\int \frac{dx}{x^3-8}$. Ответ: $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

3 $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$. Ответ: $2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$.

4 $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. Ответ: $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$.

4 Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций

4.1 Интегрирование тригонометрических функций. Теоретические сведения

4.1.1 Интегралы вида

$$\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx,\quad \int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\quad \int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$$

находят с помощью тригонометрических формул преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

4.1.2 Рассмотрим интегралы вида

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx.$$

1 Если хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно, то от нечетной степени отделяют множитель $\sin x$ (или $\cos x$), а оставшийся множитель в четной степени преобразуют по формуле $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ (или $\cos^2 x=1-\sin^2 x$) и применяют подстановку $t=\cos x$ (или $t=\sin x$).

2 Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них − нуль), то применяют формулы понижения порядка степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

3 Если $m+n=-2k\quad(k\in N)$, то применяют подстановку $t=\mathrm{tg}x$ (или $t=\mathrm{ctg}x$).

4.1.3 Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция, аргументами которой являются $\sin x$ и $\cos x$, в общем случае приводят к интегралам от рациональных функций с аргументом t с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

При этом

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\ \Rightarrow x=2\mathrm{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

4.1.4 Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то для нахождения интеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ используют подстановку $t = \mathrm{tg}x$. При этом

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Такой же подстановкой находится интеграл вида $\int R\left(\mathrm{tg}x\right) \cdot dx$.

Метод интегрирования функций $R(\sin x, \cos x)$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки всегда приводит к цели, но в силу своей общности он часто является не наилучшим в смысле краткости и простоты необходимых преобразований. Поэтому универсальную подстановку следует применять лишь в тех случаях, когда невозможно найти интеграл более легким способом.

4.2 Примеры решения задач

1 $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot d(\sin x) =$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

2 $\int \cos 2x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(-x) + \cos 5x\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos x dx + \frac{1}{10}\int \cos 5x d(5x) =$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

3 $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t; & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} =$

$$= 2\int \frac{dt}{1 - t^2 + 4t + 3 + 3t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{d\left(t+1\right)}{1 + \left(t+1\right)^2} =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(t+1\right) + C = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

4 $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \begin{bmatrix} & t = \mathrm{tg}\, x, & \\ x = \mathrm{arctg}t, & dx = \frac{dt}{1+t^2}, & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

4.3 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3}\,dx$. Ответ: $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} + C$.

2 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. Ответ: $C - \frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x}$.

3 $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$. Ответ: $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C$.

4 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$. Ответ: $\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C$.

5 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$. Ответ: $C - \frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$. Ответ: $C - \frac{2}{3 + \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

7 $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}x - \sqrt{7}}{2\mathrm{tg}x + \sqrt{7}}\right| + C$.

8 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$. Ответ: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C$.

9 $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$. Ответ: $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{4} + C$.

10 $\int \frac{1 + \mathrm{tg}x}{\sin 2x}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}x| + \frac{1}{2}\mathrm{tg}x + C$.

4.4 Домашнее задание

1 $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. Ответ: $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C$.

2 $\int \cos x \cdot \cos^2 3x dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{28}\sin 7x + C$.

3 $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{2}\right) + C$.

4 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C$.

5 $\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}$. Ответ: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\mathrm{tg}x-3}{4\mathrm{tg}x+1}\right| + C$.

6 $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{3}} + C$.

7 $\int \cos 4x \cdot \cos 7x\, dx$. Ответ: $\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{22}\sin 11x + C$.

4.5 Интегрирование простейших иррациональных функций. Теоретические сведения

4.5.1 Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к табличным интегралам вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+A^2}}$ (если $a>0$) или $\int \frac{dt}{\sqrt{A^2-t^2}}$ (если $a<0$).

4.5.2 В интеграле вида $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(m \neq 0)$ из числителя выделяется производная $2ax+b$. В результате приходим к табличным интегралам и интегралам первого вида.

4.5.3 Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (m \neq 0),\ (r = 1;\, 2)$$

сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{mx+n}.$$

4.5.4 Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R – рациональная функция двух аргументов, находят с помощью тригонометрических подстановок следующим образом.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной $u = x + \frac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трех видов:

1) $\int R\left(u, \sqrt{m^2-u^2}\right)du$;
2) $\int R\left(u, \sqrt{u^2-m^2}\right)du$;
3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2+m^2}\right)du$,

которые приводятся к интегралу вида $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$ соответствующей тригонометрической подстановкой:

1) $u = m \cdot \sin t$ или $u = m \cdot \cos t$;

2) $u = \dfrac{m}{\sin t}$ или $u = \dfrac{m}{\cos t}$;

3) $u = m \cdot \mathrm{tg} t$ или $u = m \cdot \mathrm{ctg} t$.

4.5.5 Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots \right) dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов; m_1, n_1, m_2, n_2, $\ldots$ – целые числа, находят с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots$.

4.5.6 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ берется в конечном виде в трех случаях (условия Чебышева):

1) если p – целое число;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, подстановкой $a + bx^n = t^s$;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число, подстановкой $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

4.6 Примеры решения задач

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C.$$

2 $$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}} +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

3 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}} = \left[x = \frac{1}{t};\ \ dx = -\frac{1}{t^2}dt \right] = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{8}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+8t+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+4)^2-15}} = -\int \frac{d(t+4)}{\sqrt{(t+4)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}} = -\ln\left|t+4+\sqrt{(t+4)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|t+4+\sqrt{t^2+8t+1}\right| + C, \qquad \text{где } t = \frac{1}{x}.$$

4 $$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}} = \begin{bmatrix} t^4 = x+3 \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = 4\int \frac{t^3dt}{(t-1)t^2} = 4\int \frac{t\,dt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 4\left(t+\ln|t-1|\right) + C = 4\left(\sqrt[4]{x+3}+\ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right) + C.$$

5 $$\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{\sin t}, \\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{bmatrix} = -\int \sin^3 t dt = \int \left(1-\cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C = \begin{bmatrix} \sin t = \dfrac{1}{x}, \\ \cos t = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{1}{3}\frac{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}{x^3} + C.$$

6 $$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = [x = 3\sin t;\quad dx = 3\cos t dt] = \int 9\sin^2 t\,\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt =$$

$$= 81\int \sin^2 t\cos^2 t dt = 81\cdot\frac{1}{4}\int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{81}{8}\int (1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C = \frac{81}{8}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{3}\right)\right) + C.$$

4.7 Задания для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы.

1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. Ответ: $\displaystyle\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$.

2 $\displaystyle\int \frac{2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$. Ответ: $\displaystyle C - 2\sqrt{1-x-x^2} + 7\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+11}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5{,}5}\right|+C$.

4 $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+8x+11}}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8x+11}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5{,}5}\right|+C$.

5 $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. Ответ: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

6 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. Ответ: $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$.

7 $\int \frac{dx}{\left(2+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2\left(1-x^2\right)}}+C$.

8 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$. Ответ: $C-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$.

9 $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4x+1}}$. Ответ: $C-\ln\left|\frac{1}{x}-2+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-2\right)^2}\right|$.

10 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4x+7\right)^3}}$. Ответ: $\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C$.

11 $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{12-3x^2}}{x+\sqrt{12-3x^2}}\right|+C$.

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$. Ответ: $\frac{x}{4\cdot\sqrt{4+x^2}+C}$.

13 $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$. Ответ: $C-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}$.

14 $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$. Ответ: $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C$.

4.8 Домашнее задание

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. Ответ: $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$.

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)^3}}$. Ответ: $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C$.

4 $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

5 $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx$. Ответ: $C-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}$.

6 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$. Ответ: $\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{1}{8}\sin 2\left(\arccos\frac{2}{x}\right)+C$.

5 Определенный интеграл

5.1 Теоретические сведения

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. Выберем на каждом из них точки ξ_i, $x_{i-1}<\xi_i<x_i$ (рисунок 5.1)

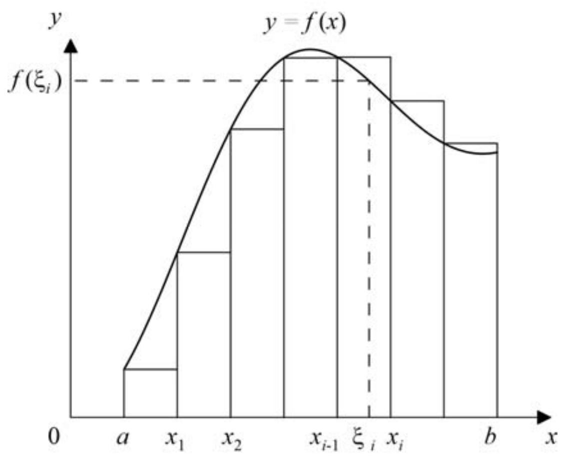

Рисунок 5.1

Сумма вида $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ называется n-й интегральной суммой функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Геометрически сумма S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, в основании которых лежат частичные отрезки длиной $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, а высоты их равны $f(\xi_i)$.

Предел интегральной суммы S_n, найденный при условии, что длина наибольшего частичного отрезка стремится к нулю, называется ***определённым интегралом*** от функции $y = f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т. е. по определению $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Функция $y = f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением; $[a;b]$ – отрезком интегрирования, a – нижним, b – верхним пределом интегрирования.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$, т. е. предел интегральной суммы S_n существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки Δx_i, ни от выбора на них точек ξ_i.

Если $f(x) \ge 0$, $x \in [a;b]$, то геометрически определённый интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Эта фигура называется ***криволинейной трапецией***. В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ принимает значения разных знаков, определённый интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней. Например, для функции, график которой изображён на рисунке 5.2, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

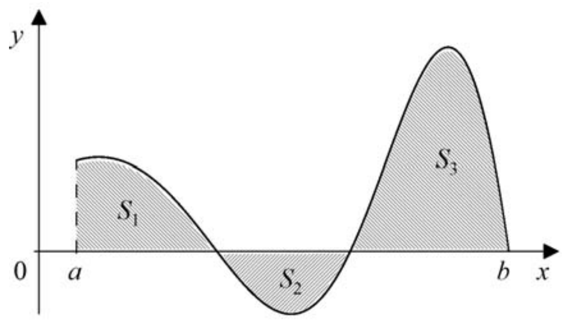

Рисунок 5.2

Перечислим основные свойства определённого интеграла:

– если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ интегрируемы на соответствующих отрезках, то

1) $\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$;

2) $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (c = \text{const})$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

– если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

– если $\varphi(x) \leq f(x)$, $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx$;

– если $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $a < b$, то $m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$;

– если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c$, $a \leq c \leq b$, такая, что верно равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq f(\mathrm{c}) \cdot (b-a);$$

– если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$, то $\Phi'(x) = f(x)$, где $\Phi(x)$ – первообразная для $y = f(x)$. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$ – интеграл с переменным пределом;

– если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание: $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ – нечетная функция;} \\ 2 \cdot \int\limits_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ – четная функция.} \end{cases}$

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем для любого $t \in [\alpha;\beta]$ $\varphi(t) \in [a;b]$. Тогда, если $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \tag{5.1}$$

Это ***формула замены переменной*** для определенного интеграла.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du\,.$$

5.2 Примеры решения задач

1 Вычислить $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

Решение

$$\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \int\limits_0^8 \sqrt{2x}dx + \int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \sqrt{2}\cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^8 + \left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-0\right)+\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-0\right)=33\frac{1}{3}.$$

2 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Решение

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

3 Вычислить $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+1)\Big|_{-1}^0 = \operatorname{arc\,tg}1 - \operatorname{arc\,tg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

4 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение

Применим подстановку $t=\sqrt{1+x}$. Тогда $x+1=t^2$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$. При $x=3$ $t=2$, а при $x=8$ $t=3$.

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt}{t} = 2\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{8}{3}-2\right)\right) = \frac{32}{3}.$$

5 Вычислить $\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \left(\pi\cdot\sin\pi+\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\cos 0\right) = \left(0-1\right)-\left(0+1\right) = -2.$$

5.3 Задания для самостоятельной работы

Вычислить определённые интегралы.

1 $\int_1^2 \left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx$. Ответ: $\frac{21}{4}$.

2 $\int_1^4 \sqrt{x}\;dx$. Ответ: $\frac{14}{3}$.

3 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Ответ: $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2\approx 0{,}14$.

4 $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

5 $\int_0^1 \frac{x^2\;dx}{x^2+1}$. Ответ: $\frac{4-\pi}{4}$.

6 $\int_0^2 \frac{x^3\;dx}{\sqrt{x^4+4}}$. Ответ: $\sqrt{5}-1$.

7 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 6\cos^2 x\sin x dx$. Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

8 $\int_1^3 \frac{xdx}{1+x^2}$. Ответ: $\ln\sqrt{5}$.

9 $\int_1^5 \frac{dx}{3+\sqrt{x-1}}$. Ответ: $4+6\ln 0,6$.

10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.

11 $\int_4^5 (x-3)e^x dx$. Ответ: e^5.

12 $\int_1^3 x^2 \ln x dx$. Ответ: $9\ln 3-\frac{26}{9}$.

5.4 Домашнее задание

Вычислить определённые интегралы.

1 $\int_0^{\pi/6} \cos 3x\, dx$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

2 $\int_0^2 \frac{3x+4}{x+2} dx$. Ответ: $6-\ln 4$.

3 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

4 $\int_0^1 x\cdot e^{-x}\, dx$. Ответ: $\frac{e-2}{e}$.

5 $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{2\sin x\, dx}{4+\cos^2 x}$. Ответ: 0.

6 $\int_0^4 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Ответ: 4π.

7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$. Ответ: 1.

8 $\int_0^1 x\cdot e^x dx$. Ответ: 1.

6 Несобственные интегралы

6.1 Теоретические сведения

Интегралы на бесконечном промежутке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ (рисунок 6.1).

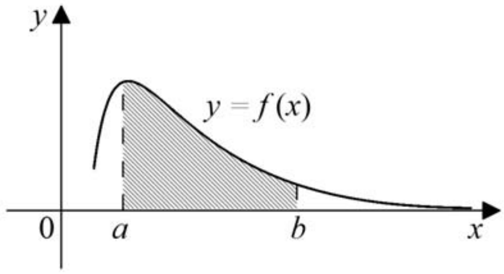

Рисунок 6.1

Тогда предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{6.1}$$

называется ***несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** или ***несобственным интегралом первого рода***. Если данный предел существует, то интеграл называется сходящимся; если же предел не существует, в частности, бесконечен, – расходящимся. Аналогично определяются несобственные ***интегралы с бесконечным нижним пределом*** и обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$, то интеграл (6.1) сходится ***абсолютно***.

Для установления сходимости интеграла (6.1) можно использовать следующие признаки сравнения:

1) если $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ для $\forall x \ge a$ и сходится $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, то сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$; если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ также расходится;

2) ***предельный признак сравнения***: если для $\forall x \ge a$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание: интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Интегралы от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;b]$, кроме $x = c \in [a;b]$, где она терпит разрыв (рисунок 6.2).

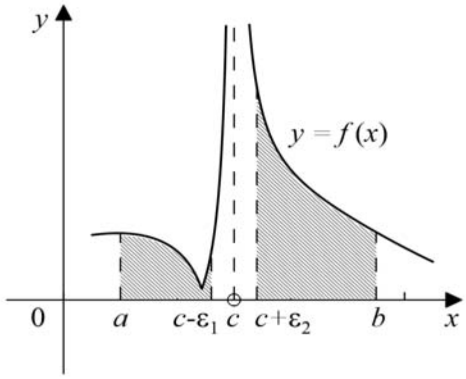

Рисунок 6.2

Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (6.2)$$

называется ***несобственным интегралом от разрывной функции*** или ***несобственным интегралом второго рода***.

Если оба предела, стоящие в левой части (6.2), существуют, то данный интеграл называется ***сходящимся***, а если хотя бы один из них не существует – ***расходящимся***. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода аналогичны признакам сходимости интегралов первого рода.

6.2 Примеры решения задач

1 Дан интеграл $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^m}$ $(m > 0)$. Установить, при каких значениях m этот интеграл сходится, а при каких – расходится.

Решение

Пусть $(a>0)$, тогда

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}=\lim_{A\to\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^m}=\left|\begin{matrix} m=1: & \int\frac{dx}{x}=\ln|x|, \\ m\neq 1: & \int x^{-m}\,dx=\frac{x^{-m+1}}{-m+1}.\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{A\to\infty}\ln|x|\Big|_a^A=\lim\limits_{A\to\infty}(\ln|A|)-\ln|a|=\infty-\ln a=\infty & \text{при } m=1,\\ \lim\limits_{A\to\infty}\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\Big|_a^A=\frac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1} & \text{при } m\neq 1.\end{cases}$$

Если $m>1$, то

$$\frac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{-m+1}\cdot\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A^{m-1}}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{\infty}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=0-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}$$

существует.

Если $m<1$, то

$$\frac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{-m+1}\cdot\lim_{A\to\infty}A^{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\infty-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}$, где $a>0$, сходится при $m>1$ и расходится при $m\leq 1$.

2 Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}.$$

Решение

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Big|_1^b=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{3}-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

3 Установить сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}$.

Решение

Сравним подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}$ с функцией $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. Так, если $x\geq 1$ $e^x>1$, то $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}<\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

т. е. интеграл сходится. По признаку сравнения исходный интеграл также сходится.

4 Установить, при каких значениях n интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^n}$ сходится и при каких – расходится.

Решение

Пусть $n\neq 1$. Тогда

$$\int_0^1\frac{dx}{x^n}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-n}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-n+1}}{1-n}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad n>1,\\ \dfrac{1}{1-n} & \text{при} \quad n<1.\end{cases}$$

При $n=1$ имеем $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty.$

Итак, $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^n}=\begin{cases}\text{сходится} \quad \text{при} \quad n<1 \quad \text{и} \quad \text{равен} \quad \dfrac{1}{1-n},\\ \text{расходится} \quad \text{при} \quad n\geq 1.\end{cases}$

5 Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$.

Решение

Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x=1$. Следовательно,

$$\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e\ln^{-3}x\,d(\ln x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^{-2}x}{-2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^e=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 e}+\frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=-\frac{1}{2}+\infty=+\infty.$$

Интеграл расходится.

6 Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2x^3}$.

Решение

Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=0$. Тогда при $x \ge 0$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2x^3} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ (сходится) (см. пример 4).}$$

По признаку сравнения и данный интеграл сходится.

6.3 Задания для самостоятельной работы

Вычислить несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}\, dx$. Ответ: $\frac{1}{2}$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{\sqrt{x}}$. Ответ: расходится;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln 3$;

4) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$. Ответ: 1;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$. Ответ: расходится;

7) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}dx$. Ответ: расходится.

Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:

1) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$. Ответ: 2;

2) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. Ответ: расходится;

3) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$. Ответ: расходится;

4) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. Ответ: $\frac{8}{3}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. Ответ: $-\frac{3}{2}$;

6) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-6x^2}$. Ответ: расходится;

7) $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Ответ: 3.

6.4 Домашнее задание

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{2x^2+3}$. Ответ: расходится;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Ответ: π;

3) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{3e^3}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$;

6) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ответ: $\frac{3\pi^2}{8}$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Ответ: расходится.

7 Приложения определенного интеграла

7.1 Теоретические сведения

Геометрические приложения определенного интеграла.
Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ для $x\in[a;b]$), прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox (рисунок 7.1), выражается интегралом

$$S=\int_a^b (x)dx. \qquad (7.1)$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ ($g(y)\geq 0$ для $y\in[c;d]$) и осью Oy (рисунок 7.2), выражается интегралом

$$S=\int_c^d g(y)dy. \qquad (7.2)$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\leq f_2(x)$ для $x\in[a;b]$) (рисунок 7.3), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (7.3)$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$ и двумя непрерывными кривыми $x=g_1(y)$ и $x=g_2(y)$ ($g_1(y)\leq g_2(y)$ для $y\in[c;d]$), осью Oy (рисунок 7.4), вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d \left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy. \qquad (7.4)$$

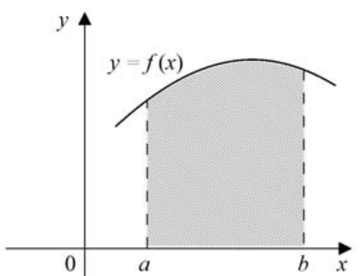

Рисунок 7.1

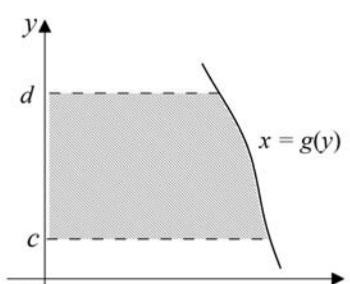

Рисунок 7.2

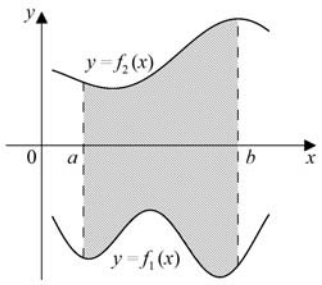

Рисунок 7.3

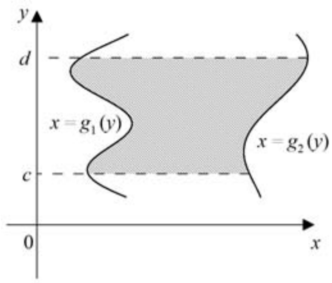

Рисунок 7.4

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$) (рисунок 7.5), вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \quad (7.5)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и кривой, вычисляется по формуле

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt, \quad (7.6)$$

где $x(\alpha)=a$, $y(\beta)=b$ ($y(t)\geq 0$ для $t\in[\alpha;\beta]$).

Вычисление объемов тел вращения.

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, вращается вокруг оси Ox (рисунок 7.6), то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \quad (7.7)$$

Если фигура, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($0\leq f_1(x)\leq f_2(x)$ для $x\in[a;b]$), вращается вокруг оси Ox (рисунок 7.7), то объём тела находится по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b \left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx. \quad (7.8)$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ и отрезком оси Oy, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy. \qquad (7.9)$$

Если фигура, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ ($0 \le g_1(y) \le g_2(y)$ для $y \in [c;d]$), вращается вокруг оси Oy (рисунок 7.8), то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d \left(g_2^2(y) - g_1^2(y)\right) dy. \qquad (7.10)$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объём тела вращения выражается интегралом

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \cdot \sin\varphi \, d\varphi. \qquad (7.11)$$

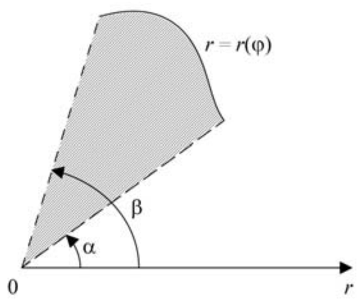

Рисунок 7.5

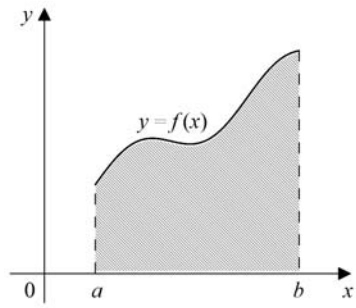

Рисунок 7.6

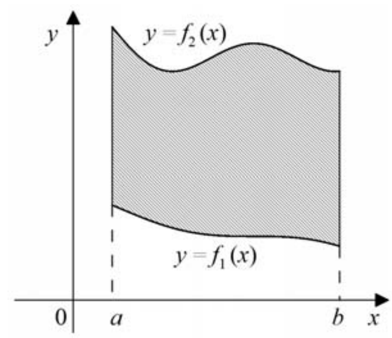

Рисунок 7.7

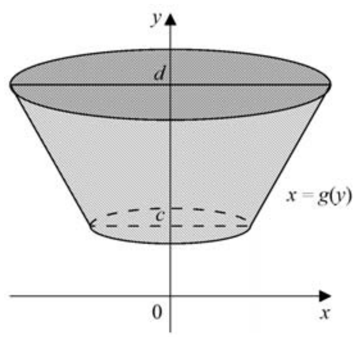

Рисунок 7.8

Вычисление дуги кривой.

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ на $[a;b]$ и функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a;b]$, то длина дуги кривой, содержащейся между точками $x = a$, $x = b$, определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (7.12)$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ на $[c;d]$ и функция $x = g(y)$ имеет непрерывную производную на $[c;d]$, то длина дуги кривой находится по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dy. \tag{7.13}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [t_1;t_2]$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные дифференцируемые функции, то длина дуги кривой находится по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt. \tag{7.14}$$

Если задано полярное уравнение кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, где производная $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{7.15}$$

Физические приложения определенного интеграла.

Вычисление пройденного пути по скорости.

Если $v = v(t)$ – скорость движения материальной точки вдоль некоторой прямой, то путь S, пройденный ею за промежуток времени $[t_1;t_2]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Вычисление работы переменной силы.

Пусть под действием силы $F(x)$ материальная точка движется вдоль прямой, параллельной оси $0x$. Работа силы на участке пути $[a;b]$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{7.16}$$

Вычисление силы давления жидкости на пластину.

Пусть пластина, погруженная вертикально в жидкость, ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ и $x = b$. Тогда сила давления жидкости на пластину вычисляется по формуле

$$P = g\rho \cdot \int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx, \tag{7.17}$$

где g – ускорение свободного падения, $g \approx 9{,}8$ м/с^2;

ρ – плотность жидкости.

Вычисление статических моментов.

Пусть дана криволинейная трапеция (пластина), ограниченная линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Поверхностная плотность пластины постоянна и равна ρ. Тогда статические моменты плоской фигуры относительно осей координат $0x$ и $0y$ вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx; \quad M_y = \rho\int_a^b x \cdot f(x)\,dx.$$

Пусть дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, и имеет плотность $\rho = \rho(x)$. Тогда статические моменты относительно осей $0x$ и $0y$ вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx; \quad M_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx;$$

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho(t) \cdot y(t) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt, \; M_y = \int_\alpha^\beta \rho(t) \cdot x(t) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + [\left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

если кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$.

Вычисление моментов инерции.

Моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с плотностью $\rho = \rho(x)$ относительно осей $0x$ и $0y$

$$J_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f^2(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx; \quad J_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Момент инерции относительно оси $0x$ дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, вычисляется по формуле

$$J_x = \rho \cdot \int_\alpha^\beta y^2(t) \cdot \sqrt{\left(x'_y\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt.$$

Соответственно, $J_y = \rho \cdot \int_\alpha^\beta x^2(t) \cdot \sqrt{\left(x'_y\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt$.

Вычисление координат центра масс.

Координаты центра масс дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с плотностью $\rho = \rho(x)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M}; \quad y_c = \frac{M_x}{M}, \tag{7.18}$$

массу дуги M находят по формуле

$$M=\int_a^b \rho(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

или

$$M=\int_\alpha^\beta \rho(t)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

если кривая задана уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1;t_2]$. Координаты центра масс плоской пластины также вычисляют по формулам (7.18), но здесь

$$M=\rho\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

7.2 Примеры решения задач

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$ и $y=x^2$.

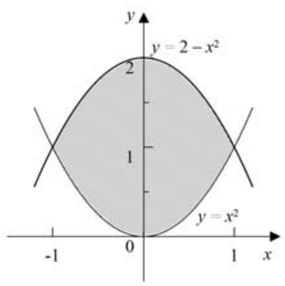

Рисунок 7.9

Решение

Найдём точки пересечения кривых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x^2. \end{cases}\quad x^2=2-x^2;\ 2x^2=2,\ x^2=1;\ \begin{cases} x=\pm1, \\ y=1. \end{cases}$$

Площадь фигуры (см. рисунок 7.1) находим по формуле (7.3):

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(2-\frac{2}{3}\right)-\left(-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}.$$

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Решение

Площадь фигуры (рисунок 7.10) найдем по формуле (7.5).

Если $x=0$, то $t=0$; если $x=2\pi a$, то $t=2\pi$. Отсюда

$$S=\int_0^{2\pi} a\left(1-\cos t\right)\cdot a\left(1-\cos t\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^2 dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t\right)dt+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\left(t-2\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

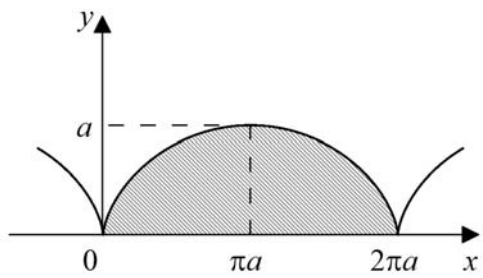

Рисунок 7.10

3 Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$ и $2x+2y-3=0$.

Решение

При вычислении объёмов тел вращения нет необходимости изображать сами тела; достаточно построить фигуры (рисунок 7.11), которые вращаются. $y=\dfrac{x^2}{2}$ – парабола; $2x+2y-3=0$ – прямая.

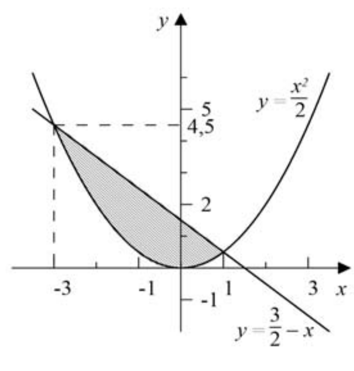

Рисунок 7.11

Найдем пределы интегрирования, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y=x^2, \\ 2x+2y-3=0; \end{cases} \begin{cases} 2y=x^2, \\ 2y=3-2x; \end{cases} \begin{cases} x^2+2x-3=0, \\ y=\dfrac{3-2x}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_1=-3, \\ y_1=\dfrac{9}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_1=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим формулу (7.8):

$$V_x = \pi\int_{-3}^{1}\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right)dx = \pi\cdot\left(\frac{9}{4}x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = 18\frac{2}{15}\pi.$$

4 Найти длину кардиоиды $r = a(1-\cos\varphi)$.

Решение

Применим формулу (7.15), где $r' = a\cdot\sin\varphi$.

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\cdot\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 4a\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi-\cos 0) = -4a(-1-1) = 8a.$$

5 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которой находится на поверхности воды и равен 6 м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Решение

Уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R = 3$ имеет вид $x^2 + y^2 = 9$. Так как стенка (рисунок 7.12) имеет форму полукруга, то из формулы $x^2 + y^2 = 9$ выразим $y = \sqrt{9-x^2}$.

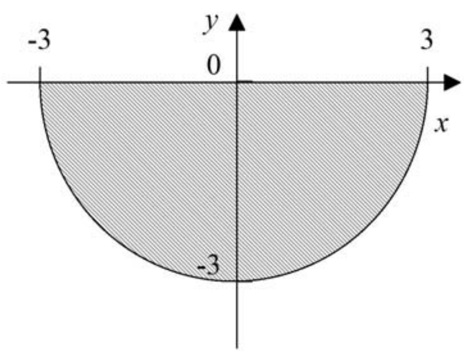

Рисунок 7.12

Применим формулу (7.17):

$$P = 2\int_0^3 \rho \cdot g \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\cdot 9{,}8\cdot 1000 \cdot \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\cdot x\,dx =$$

$$= 19600 \cdot \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]\Bigg|_0^3 = 176400\ \text{Н} = 176{,}4\ \text{кН}.$$

6 Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания $R = 3\,\text{м}$, глубина $H = 5\,\text{м}$. Котёл наполнен жидкостью, плотность которой $\rho = 0{,}8\ \text{г/см}^3$. Найти работу по выкачиванию жидкости из котла.

Решение

Применим формулу (7.16). Сечение котла плоскостью $x0y$ есть парабола с уравнением $y = ax^2$, которому удовлетворяет точка $N(3;5)$. Имеем $5 = 9a$; $a = \dfrac{5}{9}$. Тогда уравнение данной параболы $y = \dfrac{5}{9}x^2$.

Разделим параболу (рисунок 7.13) на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $5 - y$ равна dy. Слой можно приближенно считать цилиндром. Тогда его объём $dv = \pi x^2 dy$. Из уравнения параболы находим $x^2 = \dfrac{9}{5}y$. Тогда $dv = \pi\dfrac{9}{5}ydy$. Масса слоя жидкости $dm = \rho\cdot dv = \dfrac{9}{5}y\cdot\pi\rho\,dy$.

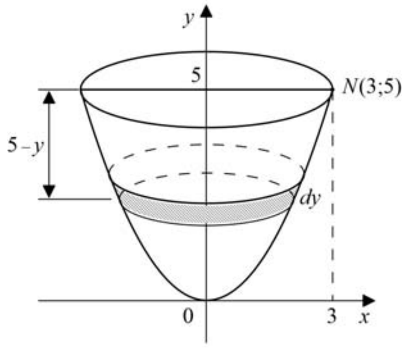

Рисунок 7.13

Работа по выкачиванию жидкости, которая состоит в том, что надо поднять все слои жидкости на высоту $5 - y$,

$$A = \int_0^5 \frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)\,y\,dy = \frac{9}{5}\pi\rho g\int_0^5 (5y - y^2)\,dy = \frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3}\right) = \frac{9}{5}\pi\rho g\cdot\frac{125}{6} = \frac{75}{2}\pi\rho g.$$

По условию $\rho = 0{,}8$ г/см^3, $g = 9{,}8$ м/с^2. Подставив эти значения в последнюю формулу, получим

$$A = \frac{75}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 9{,}8 \approx 294\,300 \text{ Дж.}$$

7.3 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 6x - 7$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

2 Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$. Ответ: $4{,}5$.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Ответ: $8\ln 2$.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ответ: $2a^2$.

5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$. Ответ: $\frac{3\pi a^2}{8}$.

6 Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$:

а) вокруг оси $0x$;
б) вокруг оси $0y$.

Ответы: а) $\frac{128\pi}{7}$; б) $\frac{64\pi}{5}$.

7 Найти длину дуги кривой $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$. Ответ: $\ln 3 - 0{,}5$.

8 Скорость прямолинейного движения материальной точки v, м/с; $v = t \cdot e^{-0{,}01t}$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. Ответ: 10^4 м.

9 Найти координаты центра масс однородной дуги астроиды $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте. Ответ: $x_c = \frac{2}{5}a$, $y_c = \frac{2}{5}a$.

10 Найти координаты центра масс однородной дуги полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и момент инерции полуокружности относительно оси $0x$.

Ответ: $x_c=0$, $y_c=\dfrac{2R}{\pi}$, $J_x=\dfrac{\pi R^2}{2}$.

11 Найти статический момент дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси $0x$. Ответ: $\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ (где ε – эксцентриситет эллипса).

7.4 Домашнее задание

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+6$ и $y=-5x$. Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$. Ответ: $\dfrac{3\pi a^2}{2}$.

3 Вычислить объём полученной вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $4x-y=0$. Ответ: $\dfrac{20\pi}{3}$.

4 Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y=x^2$, $x=y^2$. Ответ: $\dfrac{3\pi}{10}$.

5 Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на $6\,\text{см}$, если сила в $10\,\text{Н}$ растягивает её на $1\,\text{см}$? Ответ: $0{,}18\,\text{Дж}$.

6 Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $H=3{,}5\,\text{м}$ и радиусом основания $R=1{,}5\,\text{м}$ на его стенки, если $\rho=900\,\text{кг}/\text{м}^3$. Ответ: $P=161700\pi,\text{Н}=161{,}7\pi,\text{кН}$.

7 Найти координаты центра масс дуги окружности $\begin{cases}x=a\cdot\cos t,\\ y=a\cdot\sin t,\end{cases}$ расположенной в первой четверти. Ответ: $x_c=\dfrac{2a}{\pi}$, $y_c=\dfrac{2a}{\pi}$.

Список литературы

1 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2. – 863 с.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник: в 2 т. / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 2. – 544 с.

3 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

4 Сборник задач по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / Под ред. А. С. Поспелова. – Москва: Юрайт, 2021. – Ч. 1. – 355 с.

5 **Астровский, А. И.** Высшая математика: учебник: в 2 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2022. – Ч. 1. – 415 с.