

Сверхразрешение при восстановлении профиля диэлектрической проницаемости оптического волновода по дальнему полю излучения моды

Л.И. Сотская, А.Б. Сотский

Институт прикладной оптики Национальной Академии наук Беларуси
212793, Могилев, Б-Бирули, 11
Факс: +375-222-264649; E-mail: ipo@physics.belpak.mogilev.by.

Восстановление функций профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y)$ неоднородных оптических волноводов является одной из основных задач интегральной оптики. Среди известных методов восстановления $\varepsilon(x, y)$ наиболее универсальны методы, основанные на измерении пространственного распределения интенсивности излучения основной волноводной моды из торца волновода [1]. В них осуществляется восстановление поперечной компоненты электрического поля моды $\psi(x, y)$, подстановка которого в волновое уравнение дает прямую расчетную формулу для $\varepsilon(x, y)$ [2]. Наиболее простой способ получения $\psi(x, y)$ в случае волноводов, имеющих в сечении две ортогональные оси симметрии, мог бы состоять в измерении углового распределения интенсивности излучения моды в дальней зоне с последующим расчетом $\psi(x, y)$ путем фурье-преобразования корня квадратного из интенсивности. Однако при таком подходе возникает ограничение, вызванное конечностью спектра пространственных частот дальнего поля. В работах [3,4] оно привело к ложным колебаниям функций $\varepsilon(x, y)$, исключаящим их однозначное восстановление. Преодоление данного ограничения предполагает аналитическое продолжение фурье-образа поля моды $\hat{\psi}(k_x, k_y)$ из экспериментального диапазона $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \leq a < k_a$ (k_a — волновое число среды) на полную плоскость пространственных частот. Нахождение такого продолжения известно еще как решение проблемы сверхразрешения [5].

В настоящей работе представлен алгоритм аналитического продолжения $\hat{\psi}(k_x, k_y)$, применимый для восстановления распределений $\varepsilon(x, y)$ оптических волокон и волноводов канального типа. Предлагаемый алгоритм представляет собой обобщение результатов работы [6], посвященной исследованию планарных волноводов.

Пусть мода оптического волновода, поляризованная вдоль оси Ox , набегаает на торец волновода, расположенный в плоскости $z = 0$ и излучается в полупространство $z > 0$, занятое однородной средой с волновым числом k_a (рис.1). Используя одноволновое приближение [3] в интеграле Зоммерфельда [7], получаем для радиальной составляющей вектора Пойнтинга дальнего поля:

$$S_R(k, \varphi) = 0.5(k_0 Z_0)^{-1} R^{-2} (k_a^2 - k_y^2) |\hat{\psi}(k, \varphi)|^2, \quad (1)$$

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \psi(x, y) \exp(i k_x x + i k_y y), \quad (2)$$

где $k_0 = 2\pi\lambda_0^{-1}$ — волновое число вакуума, Z_0 — волновое сопротивление вакуума, $k_x = k \cos \varphi$, $k_y = k \sin \varphi$, $k = k_a \sin \theta$, и фигурируют сферические координаты точки наблюдения R, θ, φ (рис.1). В контексте выражений (1) и (2) серьезным препятствием на

пути восстановления поля моды $\varphi(x, y)$ произвольного волновода по измеряемому распределению $S_R(k, \psi)$ является комплексность функции $\hat{\psi}(k, \varphi)$, т.е. известная фазовая проблема. Однако при наличии в сечении волновода упомянутых элементов симметрии функция $\hat{\psi}(k, \varphi)$ может быть выбрана вещественной. При фиксированном R она равна

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = C \kappa(k, \varphi) \sqrt{S_R(k, \varphi)(k_a^2 - k_y^2)^{-1}}, \quad (3)$$

где C — постоянная, а $\kappa(k, \varphi)$ принимает значения ± 1 , изменяя свой знак в точках нулевых минимумов функции $S_R(k, \varphi)$. В результате $\psi(x, y)$ допускает расчет посредством применения фурье-преобразования в выражению (2).

С целью восстановления профиля диэлектрической проницаемости волновода воспользуемся скалярным приближением [3], согласно которому $\psi(x, y)$ является собственной функцией задачи

$$\nabla_x^2 \psi + \nabla_y^2 \psi + k_0^2 [\Delta \varepsilon(x, y) - b] \psi = 0, \quad \lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} \psi = 0, \quad (4)$$

где $b = k_0^{-2} \beta^2 - \varepsilon_s$, β — постоянная распространения моды, ε_s — диэлектрическая проницаемость окружающей волновод среды. В (4) использовано представление $\varepsilon(x, y) = \Delta \varepsilon(x, y) + \varepsilon_s$. Здесь функция $\Delta \varepsilon(x, y) \rightarrow 0$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, причем для существующих технологий получения волноводов она, как правило, допускает оценку

$$|\Delta \varepsilon(x, y)| \leq q \exp(-pr^2), \quad (5)$$

где q и p — положительные константы. В согласии с (2), (4),

$$\Delta \varepsilon(x, y) = b + k_0^{-2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dk k^3 \hat{\psi}(k, \varphi) e \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dk k \hat{\psi}(k, \varphi) e \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $e = \exp[-ikr \cos(\varphi' - \varphi)]$ и использованы полярные координаты: $x = r \cos \varphi'$, $y = r \sin \varphi'$. Но как следует из (3), функция $\hat{\psi}(k, \varphi)$ может быть измерена только в диапазоне $k \leq a$. В такой ситуации можно попытаться заменить бесконечные пределы интегрирования в (6) на a . Однако эта замена приводит к упомянутым ложным колебаниям. Исключение указанной трудности предполагает аналитическое продолжение функции $\hat{\psi}(k, \varphi)$ при фиксированном φ за пределы диапазона $[0, a]$.

Для обоснования возможности такого продолжения представим уравнение (4) с учетом (2) в виде

$$\Phi(k) = \hat{\psi}(k, \varphi)(k^2 + k_0^2 b) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dx dy \Delta \varepsilon(x, y) \psi(x, y) \exp(i\mathbf{k}_x x + i\mathbf{k}_y y). \quad (7)$$

В согласии с (5), интеграл в правой части (7) сходится равномерно, определяя таким образом целую функцию $\Phi(k)$ при любом φ . Отсюда следует, что $\hat{\psi}(k, \varphi)$ является аналитической функцией комплексной переменной k в полосе $|\operatorname{Im} k| < k_0 \sqrt{b}$ и в силу своей единственности допускает аналитическое продолжение с отрезка вещественной оси $[0, a]$ на всю указанную полосу. Однако практическое осуществление такого продолжения составляет некорректную задачу, которая разрешима только при ограничении класса искомых функций [5].

С целью конкретизации вида функций $\hat{\psi}(k, \varphi)$ применим к (7) неравенство Гельдера. Учитывая (5) и квадратичную интегрируемость функции $\psi(x, y)$, находим:

$$|\Phi(k)| \leq q! \exp[|k|^2 (4p)^{-1}].$$

где $q! > 0$ — постоянная. Таким образом, $\Phi(k)$ является целой функцией конечного типа и представима в виде равномерно сходящегося бесконечного произведения, содержащего нули $\Phi(k)$, равные a_i ($i = 1, 2, \dots$) [8]. Учитывая наличие плоскостей симметрии в сечении волновода, из (2), (4), (7) нетрудно заключить, что нулями $\Phi(k)$ наряду с a_i являются также $-a_i$, a_i^* и $-a_i^*$, где звездочка означает комплексное сопряжение. Это обстоятельство, а также редукция упомянутого произведения в случае четной функции $\psi(x, y)$ ($\psi(x, y) = \psi(-x, y) = \psi(x, -y)$) приводят к представлению

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = (k^2 + k_0^2 b)^{-1} \exp(-\alpha(\varphi)k^2) \sum_{i=1}^n C_i(\varphi) k^{2(i-1)}, \quad (8)$$

где $\alpha(\varphi) > 0$, $C_i(\varphi)$ — вещественные функции φ , n — порядок редукции.

Выражение (8) относится к волноводам, окруженным однородной средой, т.е. к волноводам типа оптических волокон. Исследование же волноводов канального типа, внедренных в приповерхностную область диэлектриков, предполагает их искусственную симметризацию за счет использования зеркальной поверхности, приводимой в контакт с поверхностью волновода (рис.1) [4,6]. В этом случае $\psi(x, y) = \psi(-x, y)$, $\psi(x, y) = -\psi(x, -y)$, и аналогом (8) является

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = (k^2 + k_0^2 b)^{-1} \exp[-\alpha(\varphi)k^2] \sum_{i=1}^n C_i(\varphi) k^{2i-1}. \quad (9)$$

Для определения фигурирующих в (8), (9) величин b , $\alpha(\varphi)$, $C_i(\varphi)$ по распределению $\hat{\psi}(k, \varphi)$ вида (3) эффективен метод наименьших квадратов, детали которого описаны в [6]. После нахождения названных величин выражения (8), (9) дают искомое аналитическое продолжение функции $\hat{\psi}(k, \varphi)$, погрешность которого при отсутствии измерительного шума равномерно снижается с ростом порядка редукции n . Эта зависимость продемонстрирована ниже. Вместе с тем при наличии шума возникает проблема выбора оптимального n в (8), (9). Ее решение, основанное на теории проверки статистических гипотез, аналогично представленному в [6]. Таким образом, выполнив построение функций (8), (9) по предложенному алгоритму при значениях $\varphi = j \Delta \varphi$, где $j = 1, 2, \dots, m$, $\Delta \varphi = \pi(2m)^{-1}$ и затем численно рассчитав интегралы в (6), мы придем к однозначному восстановлению искомой функции $\Delta \varepsilon(x, y)$.

Эффективность изложенного подхода проверена на тестовых примерах восстановления профилей диэлектрической проницаемости одномодовых оптических волокон и канальных волноводов. В них использованы точные функции $S_R(k, \varphi)$, полученные путем численного решения интегрального уравнения, эквивалентного задаче (4) [9]. Типичные результаты восстановления представлены на рис.2. Они относятся к одномодовому (при $\lambda_0 = 0.6328 \text{ мкм}$) диффузионному канальному волноводу, описываемому моделью

$$\Delta \varepsilon(x, y) = 0.0125 \exp[-(yw^{-1})^2] [\operatorname{erf}(xw^{-1} + 0.5F) - \operatorname{erf}(xw^{-1} - 0.5F)],$$

и получены при $w = 2.23 \text{ мкм}$, $F = 2$ и $\theta_{\max} = 0.2$ (последнее значение соответствует диапазону изменения отношения $S_R(k, \varphi) [S_R(k, \varphi)]_{\max}^{-1} \sim 30 \text{ дБ}$). Согласно рис.2, предложенный алгоритм аналитического продолжения $\hat{\psi}(k, \varphi)$ позволяет восстановить функцию $\Delta \varepsilon(x, y)$ с субволновым разрешением уже при выборе порядка редукции $n \geq 3$.

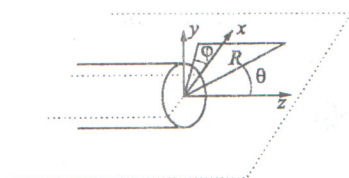


Рис.1.

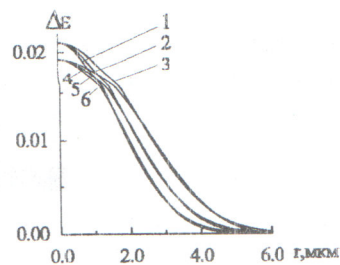


Рис.2.

Рис. 1. Исследуемая структура. Пунктир — вспомогательная зеркальная поверхность в случае канального волновода, расположенного в области $y > 0$. Рис.2. Восстановление профиля $\Delta\epsilon(x, y)$ диффузионного канального волновода. Зависимости 1, 4 соответствуют $\varphi = 0.5\pi$; 2, 5 — $\varphi = 0.25\pi$; 3, 6 — $\varphi = 0$. Кривые 4-6 получены при $n = 1, 2$. Кривые 1-3 — точные функции и результаты восстановления, относящиеся к $n \geq 3$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Abstract. The algorithm of analytical continuation of Fourier transform of an optical waveguide mode field is proposed. The algorithm is shown permits to reconstruct the permittivity profiles of optical fibers and channel waveguides from the mode far field pattern with subwavelength resolution.

Литература

- [1] S.Hosain, et al, Fiber and Integr. Opt., vol. 14 (1995), 89–107.
- [2] L.McCaughan, E.E.Bergman, J. Lightwave Technol., vol.1 (1983) 241-244.
- [3] W.Freude, A.J.Sharma, Lightwave Technol., vol.3 (1985), 628–634.
- [4] А.Б.Сотский, А.В.Хомченко, Л.И.Сотская, Радиотехника и электроника, том. 39, (1994) 1591–1604.
- [5] Г.П. Болтс, *Обратные задачи в оптике*, Москва, Машиностроение (1984).
- [6] А.Б.Сотский, Л.И.Сотская, *Оптика и спектроскопия* (в печати).
- [7] А.Зоммерфельд, *Оптика*, Москва, И.Л. (1953).
- [8] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Москва, Наука (1973).
- [9] A.B.Sotsky, L.I.Sotskaya, Opt. and Quant. Electron., vol.31 (1999), 733–749.