

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальностей
7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»
и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью»
очной и заочной форм обучения*

Часть 2

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ



Могилев 2024

УДК 539.3/6
ББК 305.1212
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «30» августа 2024 г.,
протокол № 1

Составитель канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук М. Н. Миронова

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной и заочной форм обучения. Содержат материал для выполнения расчетно-проектировочных заданий в 4 семестре.

Учебное издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 66 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2024

Содержание

Введение.....	4
1 Общие требования к выполнению и оформлению заданий.....	5
2 Расчетно-проектировочное задание № 4. Определение геометрических характеристик поперечного сечения бетонной колонны....	7
3 Расчетно-проектировочное задание № 5. Расчет колонны на внецентренное сжатие	11
4 Расчетно-проектировочное задание № 6. Расчет продольно сжатого стержня на устойчивость	18
Список литературы	28
Приложение А.....	29
Приложение Б.....	31
Приложение В. Сокращенный сортамент прокатной стали.....	32

Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Соппротивление материалов» в объеме четвертого семестра для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной и заочной форм обучения.

Студенты выполняют три расчетно-проектировочных задания (РПЗ), целью которых является закрепление теоретических знаний и приобретение практических навыков в выполнении инженерных расчетов элементов конструкций.

При выполнении РПЗ № 4 «Определение геометрические характеристик поперечного сечения бетонной колонны» студенты закрепляют навыки по определению положения центра тяжести сложного по форме сечения, квадратов радиусов инерции относительно главных центральных осей.

При выполнении РПЗ № 5 «Расчет колонны на внецентренное сжатие» студенты научатся выполнять проверочный расчет и определение допустимой нагрузки в колонне, выполненной из хрупкого материала.

При выполнении РПЗ № 6 «Расчет продольно сжатого стержня на устойчивость» студенты освоят метод последовательных приближений при проектировании составного поперечного сечения, выполненного из сортамента прокатной стали, научатся определять значение критической силы.

В каждом задании приводится описание исходных данных и порядка проведения требуемых расчетов. Для систематизации самостоятельной работы указывается перечень контрольных вопросов, на которые следует обратить внимание при изучении теоретического материала. К каждому заданию дается пример для иллюстрации числового решения и графического оформления работы. Приводится список рекомендуемой литературы и в приложениях – справочный материал.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

Для специальности 7-07-0732-01: БПК-9. Применять методы расчета прочностных и деформативных характеристик строительных материалов, деталей, изделий и конструкций для решения инженерно-строительных задач.

Для специальности 6-05-0732-02: СК-2. Применять законы кинематики и динамики для выполнения инженерных расчетов; СК-4. Применять методы расчета прочности и деформативных характеристик строительных материалов, деталей, изделий и конструкций для решения инженерно-строительных задач.

1 Общие требования к выполнению и оформлению заданий

Расчетно-проектировочные задания оформляются пояснительной запиской на листах писчей бумаги форматом А4. Листы используются с одной стороны, имеют рамку, ограничивающую поля для текстовой части записки: слева 20 мм, с трех других сторон 5 мм. Расчетные схемы и эпюры выполняются карандашом или в компьютерном исполнении.

В комплект пояснительной записки входят:

- титульный лист (рисунок 1.1);
- лист исходных данных. Содержит полные исходные данные и конечные цели задания. Оформляется по принятой форме и подписывается преподавателем;
- расчетно-текстовая часть. Должна содержать необходимые, технически грамотные пояснения к используемым формулам и выполненным расчетам. При определении искомых величин необходимо записать формулы в общем виде (в символах), подставить числовые значения всех входящих величин, записать результат и указать его единицу измерения. Решение выполняется с требуемой точностью, в зависимости от поставленной задачи. Расчеты ведутся в СИ. Расчетно-текстовую часть пояснительной записки можно выполнять ручкой, карандашом или в компьютерном исполнении.

Порядок выполнения заданий:

- получить у преподавателя исходные данные к выполнению индивидуального задания;
- изучить теоретические положения рассматриваемой темы и ознакомиться с решением типовых задач;
- произвести расчет в соответствии с исходными данными и оформить задание;
- сдать задание на проверку преподавателю, при необходимости выполнить исправления по замечаниям, указанным преподавателем;
- защитить задание. Для защиты задания студенту необходимо ответить на теоретические и практические вопросы или решить задачу по теме индивидуального задания.

БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Технологии металлов»

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЕ ЗАДАНИЕ № ____

ТЕМА: _____

Выполнил(а) студент(ка)

Группа _____

Проверил преподаватель

Могилев 20 ____ г.

Рисунок 1.1 – Пример оформления титульного листа

2 Расчетно-проектировочное задание № 4. Определение геометрических характеристик поперечного сечения бетонной колонны

Для заданного поперечного сечения колонны определить положение главных центральных осей инерции и величину квадратов радиусов инерции.

Поперечное сечение колонны выбирается по варианту (рисунок А.1). Преподавателем задаются размеры колонны a и b .

Контрольные вопросы

1 Перечислите основные геометрические характеристики поперечных сечений.

2 Укажите интегральные зависимости для определения геометрических характеристик.

3 Укажите арифметические формулы для определения геометрических характеристик простых фигур (прямоугольника, треугольника, круга).

4 Назовите свойство, которое проявляют осевые моменты инерции сечения при повороте осей.

5 Какие геометрические характеристики всегда положительны?

6 Чему равен центробежный момент инерции сечения относительно осей симметрии?

7 Как определяются моменты инерции сечения при параллельном переносе осей?

8 Какие оси называются главными центральными осями инерции сечения?

9 Как определить положение главных центральных осей инерции симметричного сечения?

10 Укажите формулы для определения величины квадратов радиусов инерции.

2.1 План выполнения задания

1 Вычертить поперечное сечение колонны *в масштабе* в соответствии с исходными данными. Размеры на чертеже указываются в миллиметрах, тогда единицы измерения ставить не надо.

2 Разбить заданное поперечное сечение на простые геометрические фигуры, пронумеровать их и указать на каждой положение центра тяжести и центральные оси x_i и y_i .

3 Определить площадь всего поперечного сечения A и отдельных ее частей.

4 Определить положение центра тяжести всего поперечного сечения (координаты x_c , y_c) относительно произвольно выбранных осей отсчета x_H , y_H (начальных осей) по формулам:

$$x_C = \frac{S_{y_H}}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_i A_i}{A_1 + A_2 + \dots + A_i},$$

$$y_C = \frac{S_{x_H}}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_i A_i}{A_1 + A_2 + \dots + A_i}, \quad (2.1)$$

где A_1, A_2, A_i – площади простых фигур;

S_{x_H}, S_{y_H} – статические моменты всего сечения относительно начальных осей;

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_i, y_i$ – координаты центра тяжести отдельных простых фигур относительно начальных осей (знаки координат учитываются).

5 Указать на чертеже найденный центр тяжести и провести центральные оси всего сечения x_u , относительно которых будет вестись дальнейший расчет.

6 Определить и указать на чертеже расстояния от осей x_u до центральных осей каждой фигуры x_i, y_i (межосевые расстояния).

7 Определить главные центральные моменты инерции всего сечения по формулам:

$$I_x = \sum (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i);$$

$$I_y = \sum (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i), \quad (2.2)$$

где I_{x_i}, I_{y_i} – осевые моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей (таблица Б.1);

c_i, d_i – межосевые расстояния.

8 Определить квадраты радиусов инерции поперечного сечения колонны по формулам:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}. \quad (2.3)$$

2.2 Пример выполнения задания

Исходные данные: схема поперечного сечения колонны (рисунок 2.1). Размеры указаны в миллиметрах.

Требуется: определить положение главных центральных осей инерции и величину квадратов радиусов инерции.

Решение

Заданное поперечное сечение разбиваем на прямоугольники 1, 2 и равнобедренный треугольник 3 (рисунок 2.2).

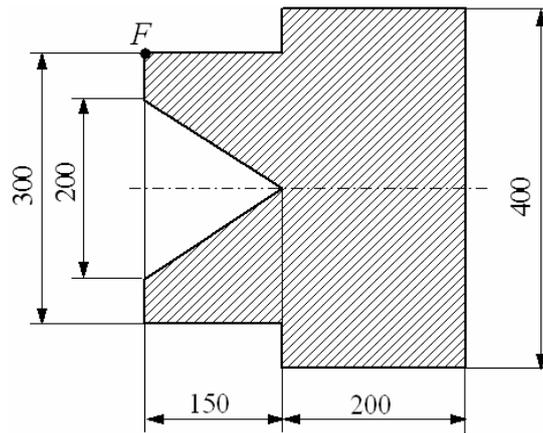


Рисунок 2.1 – Схема поперечного сечения колонны

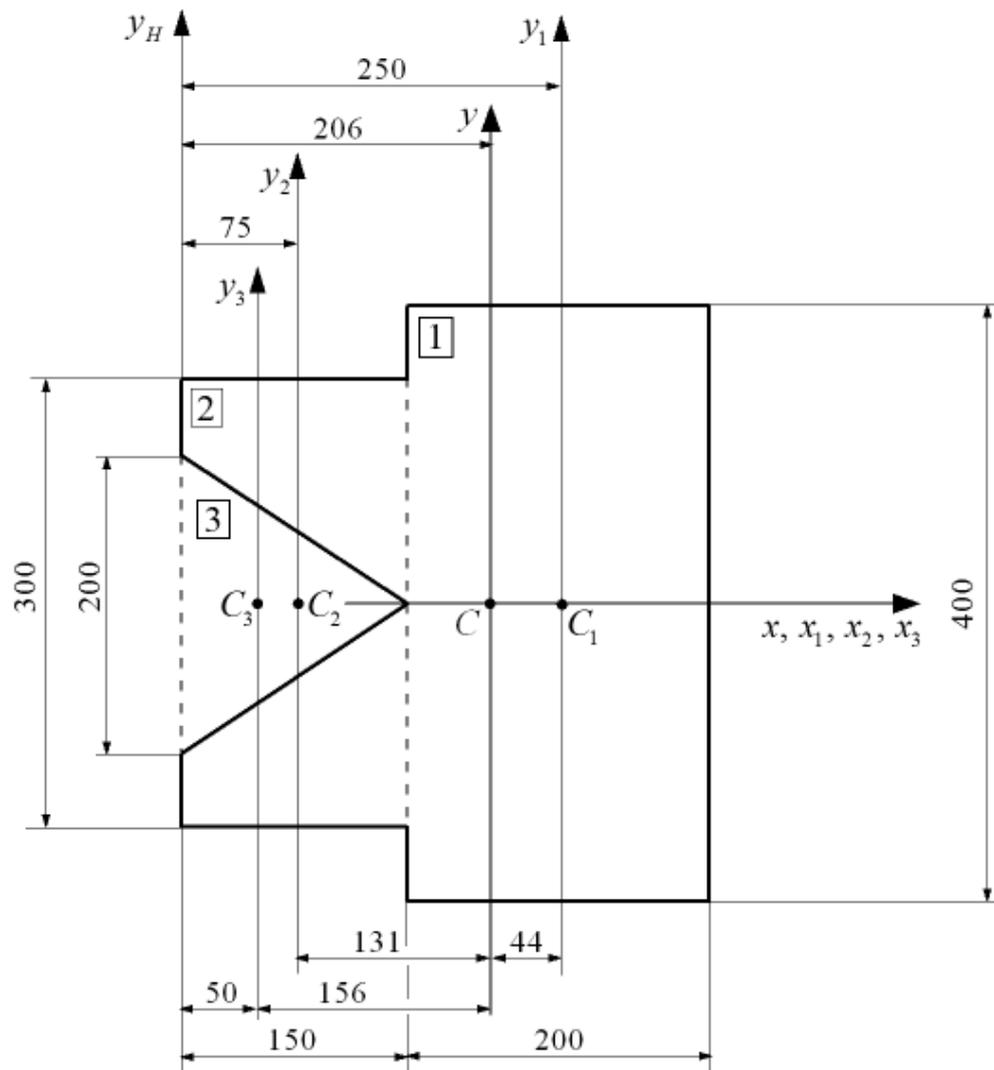


Рисунок 2.2 – Разбиение поперечного сечения колонны на отдельные фигуры

Расчеты геометрических характеристик удобнее вести в сантиметрах.
Площадь поперечного сечения равна:

$$A_1 = 20 \cdot 40 = 800 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 15 \cdot 30 = 450 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 0,5 \cdot 20 \cdot 15 = 150 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = 800 + 450 - 150 = 1100 \text{ см}^2.$$

Определим положение центра тяжести поперечного сечения относительно начальных осей x_H . В данном сечении ось x является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому координата центра тяжести этого сечения $y_C = 0$.

$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A} = \frac{25 \cdot 800 + 7,5 \cdot 450 - 5 \cdot 150}{1100} = 20,6 \text{ см},$$

где x_1, x_2, x_3 – координаты центров тяжести прямоугольников 1, 2 и треугольника 3 относительно начальной оси y_H .

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения – y .

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей $xу$ по формулам:

$$I_x = (I_{x_1} + c_1^2 A_1) + (I_{x_2} + c_2^2 A_2) - (I_{x_3} + c_3^2 A_3);$$

$$I_y = (I_{y_1} + d_1^2 A_1) + (I_{y_2} + d_2^2 A_2) - (I_{y_3} + d_3^2 A_3),$$

где $I_{x_1}, I_{x_2}, I_{x_3}, I_{y_1}, I_{y_2}, I_{y_3}$ – моменты инерции простых фигур относительно собственных главных центральных осей (см. таблицу Б.1);

c_i, d_i – межосевые расстояния.

Расстояния между главной центральной осью x и осями x_1, x_2, x_3 в нашем примере отсутствуют, следовательно, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

$$I_x = \frac{20 \cdot 40^3}{12} + \frac{15 \cdot 30^3}{12} - \frac{15 \cdot 20^3}{48} = 137917 \text{ см}^4.$$

Расстояния от главной центральной оси инерции y до осей y_1, y_2, y_3 соответственно равны (см. рисунок 2.2):

$$d_1 = y_1 - y_C = 25 - 20,6 = 4,4 \text{ см};$$

$$d_2 = y_C - y_2 = 20,6 - 7,5 = 13,1 \text{ см};$$

$$d_3 = y_C - y_3 = 20,6 - 5 = 15,6 \text{ см}.$$

$$I_y = \left(\frac{40 \cdot 20^3}{12} + 4,4^2 \cdot 800 \right) + \left(\frac{30 \cdot 15^3}{12} + 13,1^2 \cdot 450 \right) - \left(\frac{20 \cdot 15^3}{36} + 15,6^2 \cdot 150 \right) = 89438 \text{ см}^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции поперечного сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{137917}{1100} = 125,4 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{89438}{1100} = 81,3 \text{ см}^2.$$

3 Расчетно-проектировочное задание № 5. Расчет колонны на внецентренное сжатие

Исходные данные: поперечное сечение колонны, находящейся под действием внецентренно приложенной сжимающей силы, соответствует варианту РПЗ № 4.

Преподавателем задаются: величина сжимающей силы F и точка ее приложения; расчетное сопротивление материала на растяжение R_p ; расчетное сопротивление на сжатие $R_{сж}$, коэффициент условий работы γ_c .

Требуется:

- проверить прочность колонны;
- определить допустимую сжимающую силу;
- построить ядро сечения.

Контрольные вопросы

1 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?

2 Какие напряжения возникают в сечении при внецентренном растяжении (сжатии)?

3 По какой формуле рассчитываются напряжения при внецентренном растяжении (сжатии)?

4 Какие геометрические характеристики необходимо определить для расчета?

5 Сформулируйте условия прочности при внецентренном растяжении (сжатии).

6 Для каких точек делается расчет на прочность?

7 Что такое нейтральная ось сечения?

8 Как определить положение нейтральной оси при внецентренном растя-

жении (сжатии) и зачем?

9 В каких случаях при сжимающей нагрузке часть колонны будет растягиваться?

10 Что такое ядро сечения?

11 Как определяют координаты точек ядра сечения?

12 Для каких материалов желательно прикладывать сжимающую силу в ядре сечения? Почему?

3.1 План выполнения задания

1 Определить положение нейтральной (нулевой) оси, рассчитав величины отрезков, отсекаемых нейтральной осью на главных центральных осях инерции сечения, по формулам:

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}, \quad (3.1)$$

где x_F, y_F – координаты точки приложения силы в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения.

Отложить на рисунке с поперечным сечением отрезки X_0 и Y_0 в масштабе. Через найденные две точки пересечения провести нейтральную линию.

2 Показать опасные точки на рисунке с указанием их координат (x и y) относительно главных центральных осей инерции сечения. Учитывая, что закон распределения напряжений в поперечном сечении – линейный, опасными точками будут такие, которые располагаются дальше всего от нейтральной оси.

3 Определить значения наибольших сжимающих и растягивающих напряжений в опасных точках сечения колонны по формуле

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right). \quad (3.2)$$

4 По полученным значениям напряжений построить эпюру нормальных напряжений.

5 Произвести проверку прочности материала в опасных точках по условиям прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{сж}^{\max} &\leq R_{сж} \gamma_c; \\ \sigma_p^{\max} &\leq R_p \gamma_c. \end{aligned} \quad (3.3)$$

6 Дать заключение о прочности колонны.

7 Из условий прочности на растяжение и сжатие (3.3) определить величину допустимой силы $[F]$. Из двух полученных значений требуется выбрать такую силу в качестве окончательного ответа, при которой будут выполняться оба условия прочности: на растяжение и сжатие.

8 Построить ядро сечения. Для этого необходимо рассмотреть все возможные положения касательных линий к контуру сечения. Определить отрезки, отсекаемые касательными на главных центральных осях: X_0 , Y_0 . Расчет координат угловых точек ядра сечения производится по формулам:

$$x_{я} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{я} = -\frac{i_x^2}{Y_0}. \quad (3.4)$$

9 Выполнить чертеж поперечного сечения в масштабе, на котором показать касательные к его контуру и отрезки X_0 , Y_0 в миллиметрах. Оформить ядро сечения, для чего соединить все рассчитанные точки прямыми линиями, заштриховать полученную фигуру. На этом же рисунке указать положение нейтральной оси.

3.2 Пример выполнения задания

Исходные данные: бетонная колонна заданного поперечного сечения (РПЗ № 4) находится под действием сжимающей силы $F = 90$ кН (рисунок 3.1). Площадь поперечного сечения колонны $A = 1100$ см²; квадраты радиусов инерции $i_x^2 = 125,4$ см², $i_y^2 = 81,3$ см².

Расчетное сопротивление материала на растяжение $R_p = 4$ МПа; расчетное сопротивление на сжатие $R_{сж} = 20$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$.

Требуется:

- проверить прочность колонны;
- определить допустимую силу $[F]$;
- построить ядро сечения.

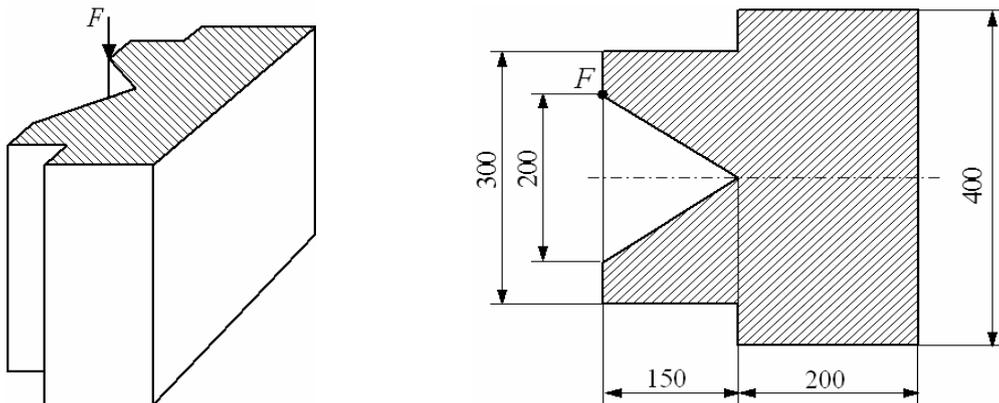


Рисунок 3.1 – Схема нагружения и размеры поперечного сечения колонны

Решение

1 *Определение положения нейтральной оси.*

Координаты точки приложения силы относительно главных центральных осей инерции сечения x_u (рисунок 3.2, точка F) равны:

$$x_F = -20,6 \text{ см}; \quad y_F = 10 \text{ см.}$$

Определим величину отрезков, отсекаемых нейтральной осью на главных центральных осях инерции, по формулам:

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{81,3}{-20,6} = 3,95 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{125,4}{10} = -12,54 \text{ см.}$$

Через точки пересечения проводим нейтральную ось (см. рисунок 3.2).

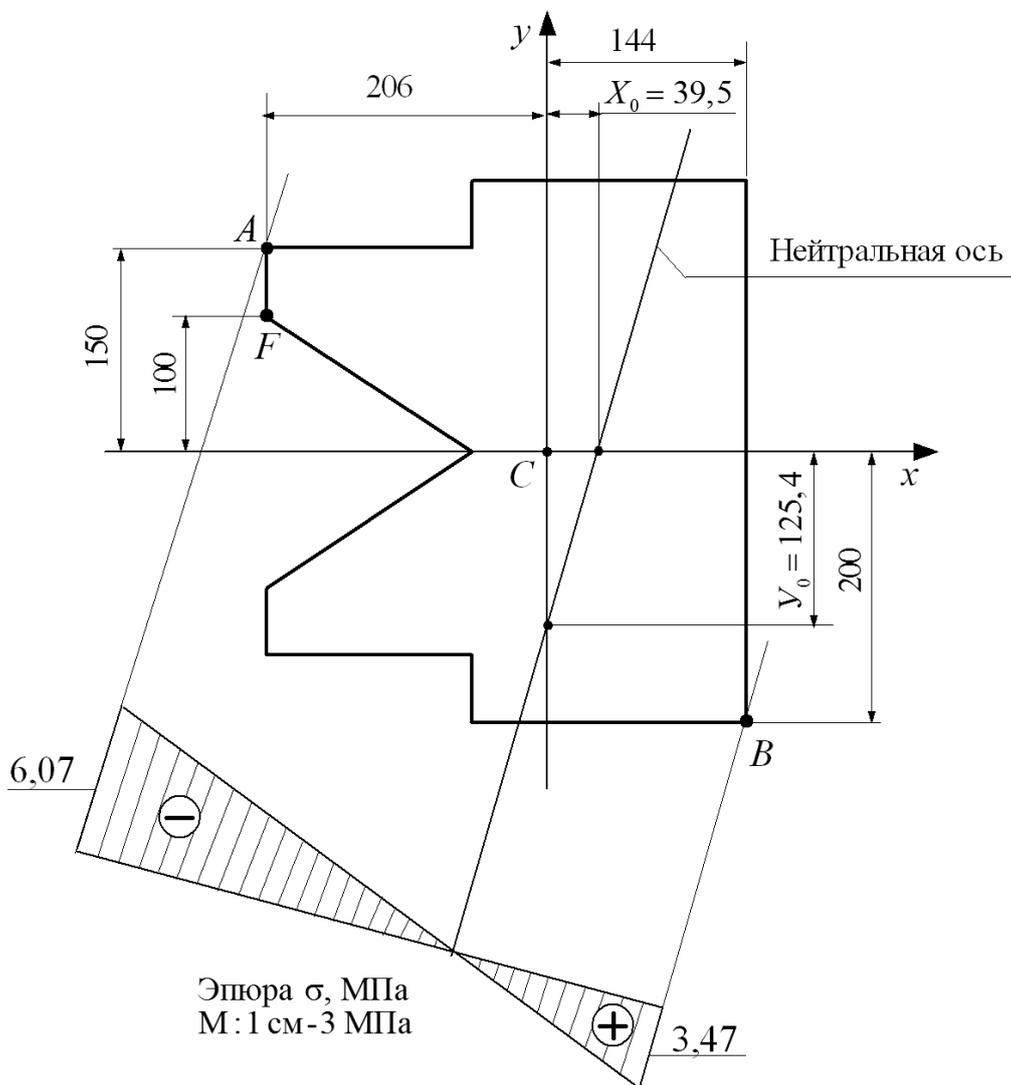


Рисунок 3.2 – Нейтральная ось и эпюра нормальных напряжений для опасных точек сечения

2 Проверка прочности колонны при заданной нагрузке.

Опасными точками являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области точка A , в растянутой области точка B . Их координаты:

$$x_A = -20,6 \text{ см}; \quad y_A = 15 \text{ см};$$

$$x_B = 14,4 \text{ см}; \quad y_B = -20 \text{ см}.$$

Вычислим величину нормальных напряжений в опасных точках с координатами x и y по формуле

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right).$$

Величина максимальных напряжений в сжатой области

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{сж} = \sigma_A &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{(-20,6) \cdot (-20,6)}{81,3} + \frac{10 \cdot 15}{125,4} \right) = \\ &= -\frac{90 \cdot 10^3}{1100 \cdot 10^{-4}} \cdot 7,42 = -6,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -6,07 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Величина максимальных напряжений в растянутой области

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{раст} = \sigma_B &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{(-20,6) \cdot 14,4}{81,3} + \frac{10 \cdot (-20)}{125,4} \right) = \\ &= -\frac{90 \cdot 10^3}{1100 \cdot 10^{-4}} \cdot (-4,24) = 3,47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,47 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (см. рисунок 3.2).

Производим проверку прочности по условию $\sigma_{\max} \leq R\gamma_c$.

В сжатой области

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_A = 6,07 \text{ МПа} < R_{сж}\gamma_c = 20 \cdot 1 = 20 \text{ МПа}.$$

В растянутой области

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_B = 3,47 \text{ МПа} < R_{раст}\gamma_c = 4 \cdot 1 = 4 \text{ МПа}.$$

Так как условия прочности выполняются, то прочность колонны обеспечена.

3 Определение допустимой сжимающей силы.

Расчет производим из условий прочности для сжатой и растянутой областей по отдельности, т. к. проверка прочности не выявила, какая из точек (A или B) более опасная.

Условие прочности для сжатой области (точка A)

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_A = -\frac{[F]_{сж}}{A} \cdot 7,42 = R_{сж}\gamma_c.$$

$$[F]_{сж} = \frac{AR_{сж}\gamma_c}{7,42} = \frac{1100 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 1}{7,42} = 296,5 \cdot 10^3 \text{ Н} = 296,5 \text{ кН} .$$

Условие прочности для растянутой области (точка B)

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_B = - \frac{[F]_{раст}}{A} \cdot 4,24 = R_{раст}\gamma_c .$$

$$[F]_{раст} = \frac{AR_{раст}\gamma_c}{4,24} = \frac{1100 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1}{4,24} = 103,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 103,8 \text{ кН} .$$

Допустимой сжимающей силой, приложенной в указанной точке (F), будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 103,8 \text{ кН}$.

4 Построение ядра поперечного сечения колонны.

Строим ядро сечения колонны, определяя координаты его угловых точек по формулам:

$$x_{я} = - \frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{я} = - \frac{i_x^2}{Y_0},$$

где X_0, Y_0 – отрезки, отсекаемые на главных центральных осях инерции касательными к контуру поперечного сечения колонны (рисунок 3.3).

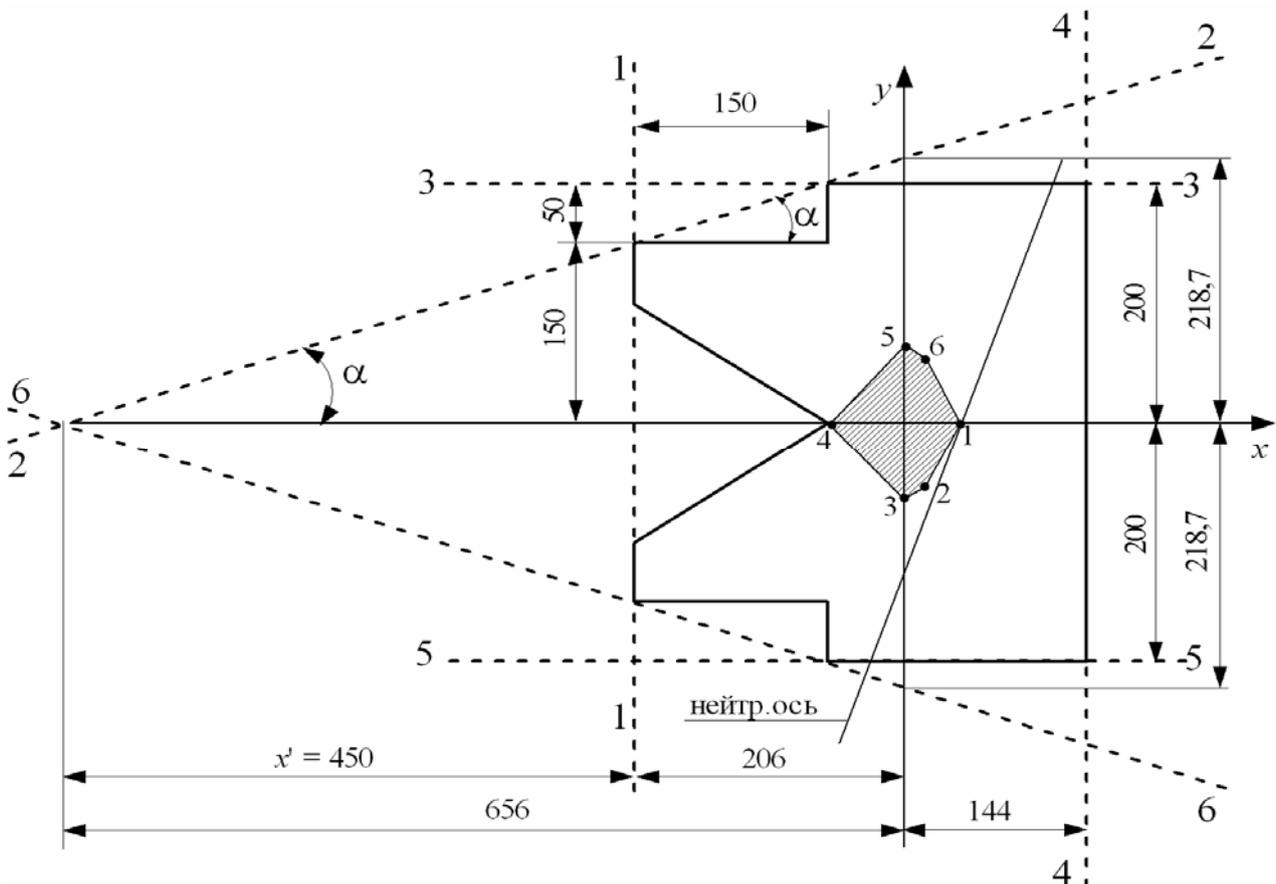


Рисунок 3.3 – Ядро поперечного сечения колонны

Точка 1 (касательная 1–1)

$$X_0 = -20,6 \text{ см}; Y_0 = \infty;$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{-20,6} = 3,9 \text{ см}; y_{я} = -\frac{125,4}{\infty} = 0.$$

Точка 2 (касательная 2–2)

Производим расчет отрезков X_0, Y_0 (см. рисунок 3.3):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{15} = \frac{15}{x'}; \quad x' = \frac{15 \cdot 15}{5} = 45 \text{ см};$$

$$X_0 = -(45 + 20,6) = -65,6 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{15} = \frac{Y_0}{X_0}; \quad Y_0 = \frac{5X_0}{15} = \frac{65,6}{3} = 21,87 \text{ см};$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{-65,6} = 1,24 \text{ см}; \quad y_{я} = -\frac{125,4}{21,87} = -5,73 \text{ см}.$$

Точка 3 (касательная 3–3)

$$X_0 = \infty; Y_0 = 20 \text{ см};$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{\infty} = 0; \quad y_{я} = -\frac{125,4}{20} = -6,27 \text{ см}.$$

Точка 4 (касательная 4–4)

$$X_0 = 14,4 \text{ см}; Y_0 = \infty;$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{14,4} = -5,65 \text{ см}; \quad y_{я} = -\frac{125,4}{\infty} = 0.$$

Точка 5 (касательная 5–5)

$$X_0 = \infty; Y_0 = -20 \text{ см};$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{\infty} = 0; \quad y_{я} = -\frac{125,4}{-20} = 6,27 \text{ см}.$$

Точка 6 (касательная 6–6 – симметрично касательной 2–2)

$$X_0 = -65,6 \text{ см}; Y_0 = -21,87 \text{ см};$$

$$x_{я} = -\frac{81,3}{-65,6} = 1,24 \text{ см}; \quad y_{я} = -\frac{125,4}{-21,87} = 5,73 \text{ см}.$$

Оформим ядро сечения, соединив все угловые точки прямыми линиями. В результате получаем область вокруг центра тяжести поперечного сечения

(заштрихованная площадь на рисунке 3.3). На этом же рисунке укажем положение нейтральной оси для действующей силы.

Заключение

1 При заданной сжимающей силе в 90 кН прочность колонны обеспечена, есть возможность повысить нагрузку до 103,8 кН.

2 В колонне заданного поперечного сечения будут возникать напряжения только одного знака, если продольная сила будет прикладываться в найденном ядре сечения.

4 Расчетно-проектировочное задание № 6. Расчет продольно сжатого стержня на устойчивость

Для продольно сжатого стержня, состоящего из стальных прокатных профилей, *требуется*:

- используя метод последовательных приближений, подобрать размеры поперечного сечения;
- проверить устойчивость стержня;
- определить величину критической силы $F_{кр}$;
- определить коэффициент запаса устойчивости n_y .

Преподавателем задаются: схема закрепления стержня, тип и расположение прокатных профилей, величина сжимающей силы F ; длина стержня ℓ ; ширина зазора a ; расчетное сопротивление материала на сжатие R , коэффициент условий работы γ_c .

Контрольные вопросы

- 1 Что понимают под устойчивостью деформируемых систем?
- 2 Назовите формы равновесия системы.
- 3 Какую силу называют критической?
- 4 Как определяют коэффициент запаса устойчивости?
- 5 Запишите формулу Эйлера для расчета критической силы.
- 6 В каких случаях применяется формула Эйлера для расчета критической силы?
- 7 Что такое коэффициент приведения длины?
- 8 От каких факторов зависит величина коэффициента приведения длины?
- 9 Запишите формулу Ясинского для расчета критической силы.
- 10 В каких случаях применяется формула Ясинского для расчета критической силы?
- 11 Какие геометрические характеристики используют в расчете на устойчивость?

4.1 План выполнения задания

1 Вычертить схему закрепления стержня и вид поперечного сечения в соответствии с заданием.

2 Написать условие устойчивости, по которому будет производиться методом последовательного приближения подбор поперечного сечения.

3 В первом приближении принять произвольную величину коэффициента продольного изгиба в пределах $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$.

4 Из условия устойчивости определить расчетную площадь поперечного сечения всего стержня и одного прокатного профиля.

5 Подобрать номер прокатного профиля по таблицам сортамента (таблицы В.1–В.4, рисунки В.1–В.4).

6 Рассчитать необходимые геометрические характеристики поперечного сечения стержня: площадь, осевые моменты и радиусы инерции относительно главных центральных осей инерции.

7 Определить максимальную гибкость λ_{\max} стержня.

При расчете гибкости следует учесть тот факт, что существуют материальные и свободные оси сечения. Материальная ось непосредственно пересекает элементы сечения, и расчет гибкости относительно этой оси производят по формуле

$$\lambda_m = \frac{\mu \cdot \ell}{i_m}, \quad (4.1)$$

где i_m – радиус инерции относительно материальной оси.

Свободная ось проходит через зазор между элементами поперечного сечения, и гибкость относительно этой оси определяется по формуле

$$\lambda_{св} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_{св}} \right)^2}, \quad (4.2)$$

где μ – коэффициент приведения длины (рисунок 4.1);

ℓ – длина стержня;

$i_{св}$ – радиус инерции относительно свободной оси.

8 Для найденного значения максимальной гибкости по таблице 4.1 методом линейной интерполяции определить коэффициент продольного изгиба φ'_1 и сравнить его с φ_1 . Если значения коэффициентов не равны, то выполнить следующее приближение.

9 Во втором и последующих приближениях начальное значение коэффициента продольного изгиба определить по формуле

$$\varphi_{i+1} = \frac{\varphi_i + \varphi'_i}{2}. \quad (4.3)$$

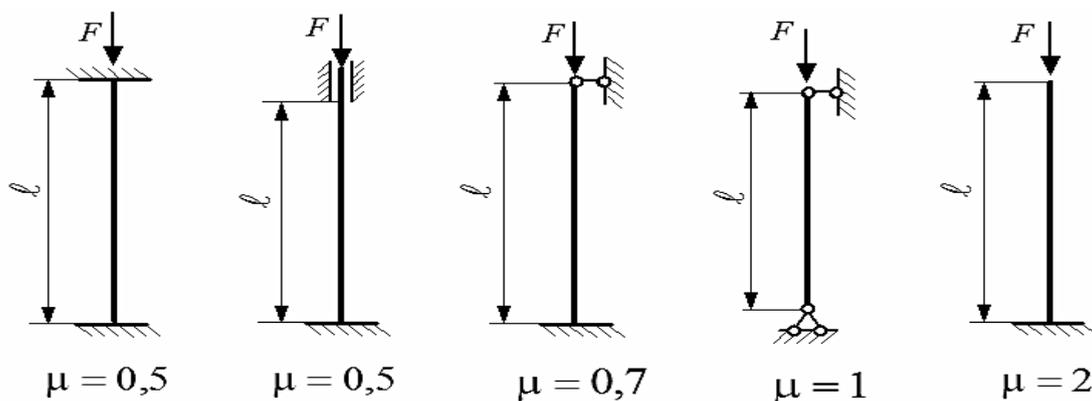


Рисунок 4.1 – Значение коэффициента приведения длины в зависимости от условий закрепления стержня

Таблица 4.1 – Значение коэффициента продольного изгиба φ

Гибкость λ	Сталь с расчётным сопротивлением R , МПа								
	200	240	280	320	360	400	440	480	520
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,980	0,979
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,943	0,941
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,895	0,891
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,839	0,832
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,775	0,764
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,672	0,650
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,568	0,542
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,471	0,442
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	0,189	0,175
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	0,164	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	0,145	0,134
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	0,129	0,120
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	0,115	0,107
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	0,104	0,097
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	0,094	0,088
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	0,086	0,080
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	0,079	0,074
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	0,073	0,068

10 Повторить расчет с 4-го по 8-й пункты плана.

Приближения выполняются до тех пор, пока коэффициенты φ_i и φ'_i будут мало отличаться друг от друга (менее чем на 5 %) или номер прокатного профиля не начнет повторяться в последующих приближениях.

11 Проверить устойчивость стержня из выбранных прокатных профилей по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c. \quad (4.4)$$

Допускается превышение напряжений в пределах 5 %.

12 Определить величину критической силы. Выбор формулы для расчета $F_{кр}$ зависит от величины максимальной гибкости стержня из выбранных прокатных профилей.

Если $\lambda_{\max} \geq \lambda_{пред} = 100$, то расчет ведется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(\lambda_{\max})^2} \cdot A, \quad (4.5)$$

где E – модуль продольной упругости стали, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа .

Если $40 \leq \lambda_{\max} \leq 100$, то расчет ведется по формуле Ясинского:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda_{\max}) \cdot A, \quad (4.6)$$

где a, b – коэффициенты, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

13 Определить коэффициент запаса устойчивости по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F}. \quad (4.7)$$

14 Дать заключение о выборе поперечного сечения стержня.

4.2 Пример выполнения задания

Исходные данные: схема закрепления и поперечное сечение стержня (рисунки 4.2); $F = 500$ кН; $\ell = 4,8$ м; $a = 100$ мм; $R = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,8$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

- используя метод последовательных приближений, подобрать размеры поперечного сечения;
- проверить устойчивость стержня;
- определить величину критической силы $F_{кр}$;
- определить коэффициент запаса устойчивости n_y .

Решение

1 Проектировочный расчет.

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательного приближения из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c,$$

где φ – коэффициент продольного изгиба.

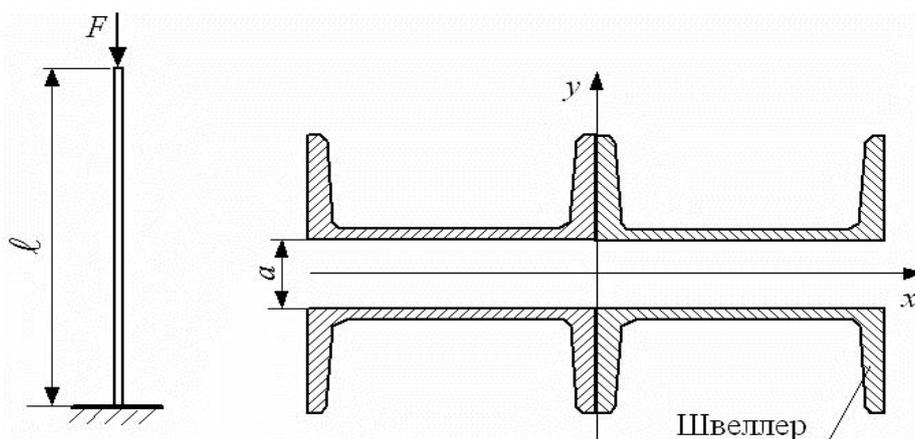


Рисунок 4.2 – Схема закрепления и вид поперечного сечения стержня

1 Первое приближение.

Пусть $\varphi_1 = 0,5$, тогда расчетная площадь поперечного сечения колонны

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2.$$

Расчетная площадь одного швеллера

$$A_1^{шв} = \frac{62,5}{4} = 15,625 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8240–97 (см. таблицу В.4) выбираем швеллер № 14У с геометрическими характеристиками:

$$A = 15,6 \text{ см}^2, I_{x_1} = 45,4 \text{ см}^4, I_{y_1} = 491 \text{ см}^4, h = 14 \text{ см}, z_0 = 1,67 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции xu (рисунок 4.3).

Площадь поперечного сечения колонны

$$A = 4 \cdot A^{шв} = 4 \cdot 15,6 = 62,4 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_x = 4 \cdot (I_{x_1} + c^2 \cdot A^{шв});$$

$$I_y = 4 \cdot (I_{y_1} + d^2 \cdot A^{шв}),$$

где c, d – межосевые расстояния (см. рисунок 4.3), $c = z_0 + \frac{a}{2}$; $d = \frac{h}{2}$.

$$I_x = 4 \cdot (45,4 + (1,67 + 5)^2 \cdot 15,6) = 2957,7 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 4 \cdot \left(491 + \left(\frac{14}{2} \right)^2 \cdot 15,6 \right) = 5021,6 \text{ см}^4.$$

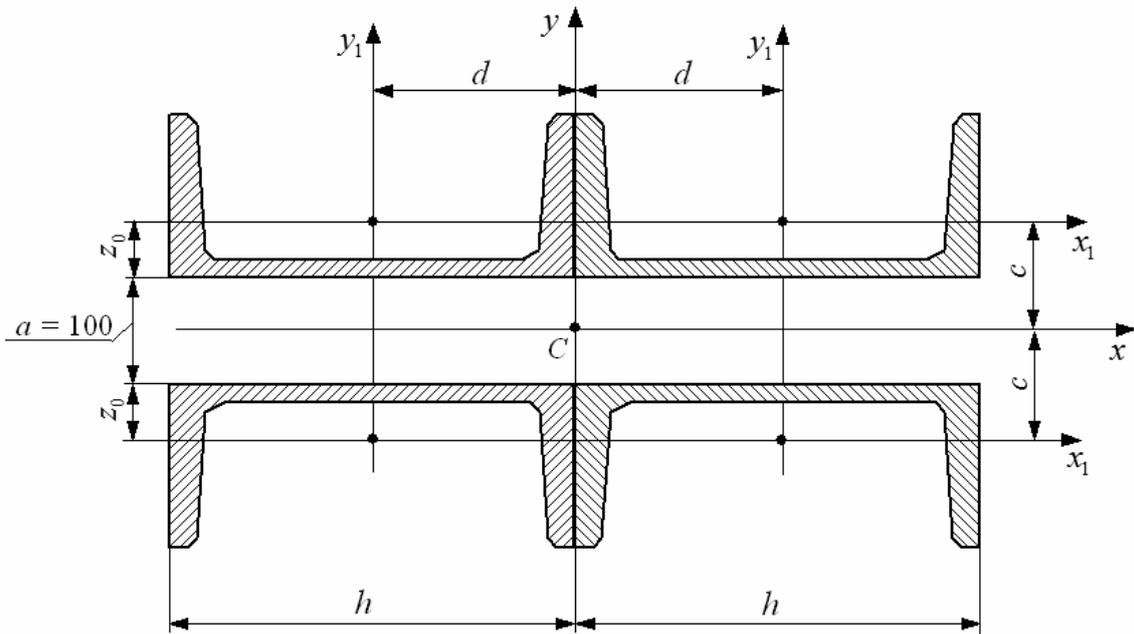


Рисунок 4.3 – Поперечное сечение колонны

Главные центральные радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2957,7}{62,4}} = 6,885 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5021,6}{62,4}} = 8,97 \text{ см}.$$

Гибкость стержня относительно свободной оси x

$$\lambda_x = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_x} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{2 \cdot 480}{6,885} \right)^2} = 145,1,$$

где μ – коэффициент приведения длины (см. рисунок 4.1), $\mu = 2$;
 ℓ – длина колонны, $\ell = 480$ см.

Гибкость стержня относительно материальной оси y

$$\lambda_y = \frac{\mu \cdot \ell}{i_y} = \frac{2 \cdot 480}{8,97} = 107.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости $\lambda_{\max} = 145,1$.

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ , используя данные таблицы 4.1:

– при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,376$;

– при $\lambda = 150$ $\varphi = 0,328$.

Линейно интерполируем

$$\varphi'_1 = 0,376 - \frac{0,376 - 0,328}{150 - 140} \cdot (145,1 - 140) = 0,35.$$

Так как $\varphi_1 \neq \varphi'_1$, делаем следующее приближение.

2 Второе приближение.

Начальное значение коэффициента продольного изгиба

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,35}{2} = 0,425.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

Расчетная площадь поперечного сечения колонны

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,425 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8} = 73,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 73,5 \text{ см}^2.$$

Расчетная площадь одного швеллера

$$A_2^{шв} = \frac{73,5}{4} = 18,4 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8240–97 выбираем швеллер № 16У с геометрическими характеристиками:

$$A = 18,1 \text{ см}^2, I_{x_1} = 63,3 \text{ см}^4, I_{y_1} = 747 \text{ см}^4, h = 16 \text{ см}, z_0 = 1,8 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции xu (см. рисунок 4.3).

Площадь поперечного сечения

$$A = 4 \cdot A^{шв} = 4 \cdot 18,1 = 72,4 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_x = 4 \cdot (63,3 + (1,8 + 5)^2 \cdot 18,1) = 3601 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 4 \cdot (747 + \left(\frac{16}{2}\right)^2 \cdot 18,1) = 7621,6 \text{ см}^4.$$

Главные центральные радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{3601}{72,4}} = 7,05 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{7621,6}{72,4}} = 10,26 \text{ см.}$$

Гибкость стержня относительно свободной оси x

$$\lambda_x = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_x}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{2 \cdot 480}{7,05}\right)^2} = 141,9.$$

Гибкость стержня относительно материальной оси y

$$\lambda_y = \frac{\mu \cdot \ell}{i_y} = \frac{2 \cdot 480}{10,26} = 93,57.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости $\lambda_{\max} = 141,9$.

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ , используя данные таблицы 4.1:

– при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,376$;

– при $\lambda = 150$ $\varphi = 0,328$.

Линейно интерполируем

$$\varphi_2' = 0,376 - \frac{0,376 - 0,328}{150 - 140} \cdot (141,9 - 140) = 0,367.$$

Так как $\varphi_2 \neq \varphi_2'$, делаем следующее приближение.

3 Третье приближение.

Начальное значение коэффициента продольного изгиба

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,425 + 0,367}{2} = 0,4.$$

Расчетная площадь поперечного сечения колонны

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,4 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8} = 78,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 78,1 \text{ см}^2.$$

Расчетная площадь одного швеллера

$$A_3^{шв} = \frac{78,1}{4} = 19,53 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8240–97 выбираем швеллер № 16аУ с геометрическими характеристиками:

$$A = 19,5 \text{ см}^2, I_{x_1} = 78,8 \text{ см}^4, I_{y_1} = 823 \text{ см}^4, h = 16 \text{ см}, z_0 = 2 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции xu (см. рисунок 4.3).

Площадь поперечного сечения

$$A = 4 \cdot A^{usb} = 4 \cdot 19,5 = 78 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_x = 4 \cdot (78,8 + (2 + 5)^2 \cdot 19,5) = 4137,2 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 4 \cdot \left(823 + \left(\frac{16}{2} \right)^2 \cdot 19,5 \right) = 8284 \text{ см}^4.$$

Главные центральные радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{4137,2}{78}} = 7,28 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{8284}{78}} = 10,3 \text{ см}.$$

Гибкость стержня относительно свободной оси x

$$\lambda_x = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_x} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{2 \cdot 480}{7,28} \right)^2} = 137,8.$$

Гибкость стержня относительно материальной оси y

$$\lambda_y = \frac{\mu \cdot \ell}{i_y} = \frac{2 \cdot 480}{10,3} = 93,2.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости $\lambda_{\max} = 137,8$.

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ , используя данные таблицы 4.1:

– при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,425$;

– при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,376$.

Линейно интерполируем

$$\varphi_3' = 0,425 - \frac{0,425 - 0,376}{140 - 130} \cdot (137,8 - 130) = 0,387.$$

Так как $\varphi_3 \neq \varphi_3'$, делаем следующее приближение.

4 Четвертое приближение.

Начальное значение коэффициента продольного изгиба

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \frac{0,4 + 0,387}{2} = 0,3935.$$

Расчетная площадь поперечного сечения колонны

$$A_4 = \frac{F}{\varphi_4 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,3935 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8} = 79,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 79,4 \text{ см}^2.$$

Расчетная площадь одного швеллера

$$A_4^{шв} = \frac{79,4}{4} = 19,85 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8240–97 выбираем швеллер № 16аУ. Для этого случая были рассчитаны показатели в третьем приближении

$$A = 78 \text{ см}^2; \quad \lambda_{\max} = 137,8; \quad \varphi = 0,387.$$

Так как выбор номера швеллера стал повторяться, то остановимся на этом сечении и проверим его устойчивость.

2 Проверочный расчет.

Проверим устойчивость колонны, состоящую из четырех швеллеров № 16аУ, по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c.$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{78 \cdot 10^{-4}} = 64 \cdot 10^6 \text{ Па} = 64 \text{ МПа};$$

$$\varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 0,387 \cdot 200 \cdot 0,8 = 61,92 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 64 \text{ МПа} > \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 61,92 \text{ МПа}.$$

Процент превышения допустимых напряжений

$$\delta = \frac{64 - 61,92}{61,92} \cdot 100 \% = 3,36 \% < 5 \%.$$

Вывод. Так как перегрузка колонны выбранного поперечного сечения не превышает 5 %, то ее устойчивость обеспечена.

3 Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Критическую силу определим по формуле Эйлера, т. к. значение максимальной гибкости для выбранного сечения превышает предельную гибкость стали:

$$\lambda_{\max} = 137,8 > \lambda_{\text{пред}} = 100;$$

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(\lambda_{\max})^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{137,8^2} \cdot 78 \cdot 10^{-4} = 810 \cdot 10^3 \text{ Н} = 810 \text{ кН},$$

где E – модуль продольной упругости стали, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{810}{500} = 1,62.$$

Вывод. Для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из четырех швеллеров № 16аУ. Устойчивость колонны при действующей сжимающей силе в 500 кН обеспечена с коэффициентом запаса $n_y = 1,62$.

Список литературы

- 1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.
- 2 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Альянс, 2018. – 624 с.
- 3 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2000. – 560 с.
- 4 **Копнов, В. А.** Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ: учебное пособие / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. – Москва : Высшая школа, 2003. – 351 с.
- 5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.
- 6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
- 7 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва : МГИУ, 2007. – 240 с.
- 8 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 9 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций: учебник для вузов / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – Москва: Юрайт, 2022. – 530 с.
- 10 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 11 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 12 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений : учебное пособие / А. Г. Схиртладзе [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.

Приложение А (справочное)

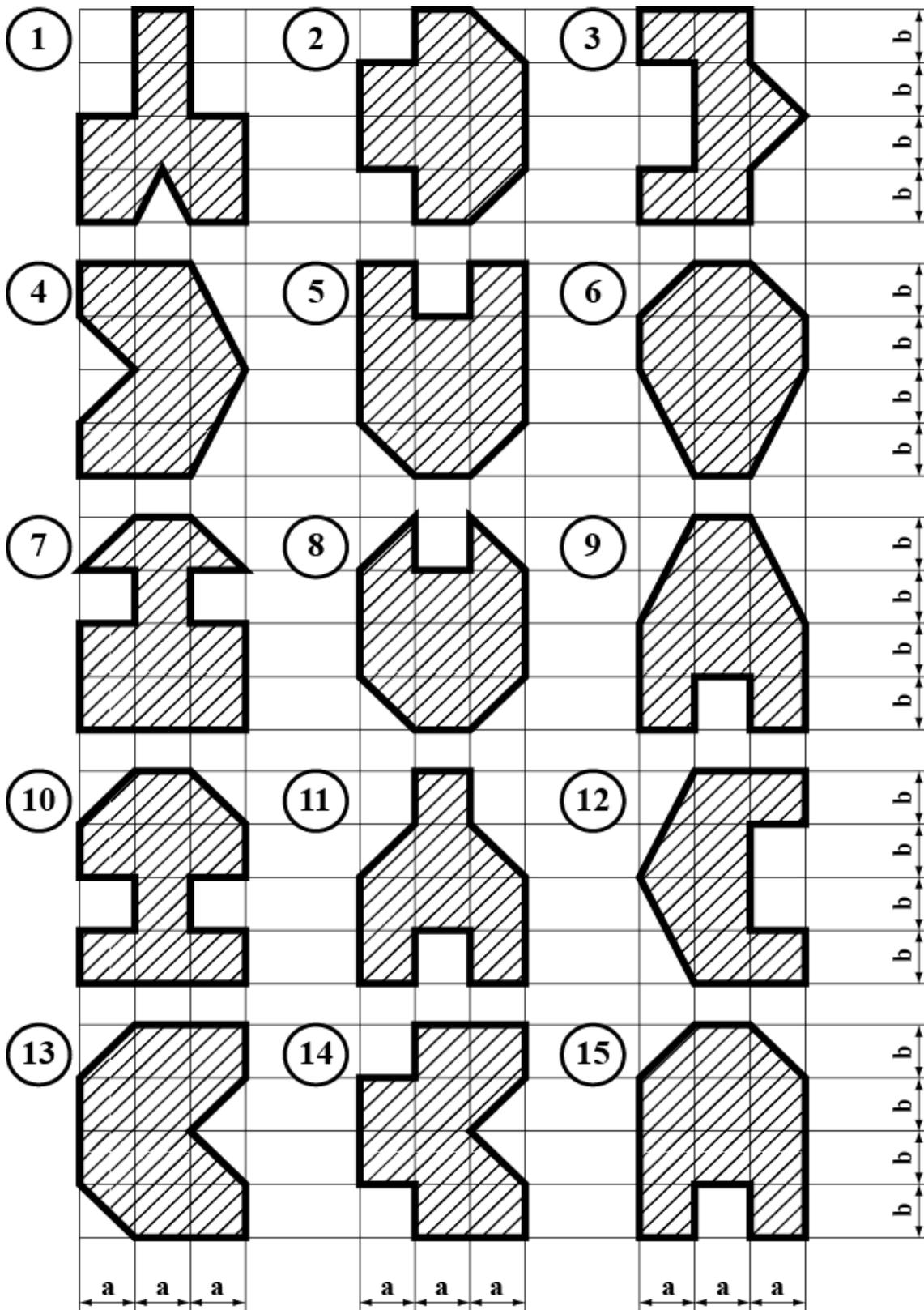
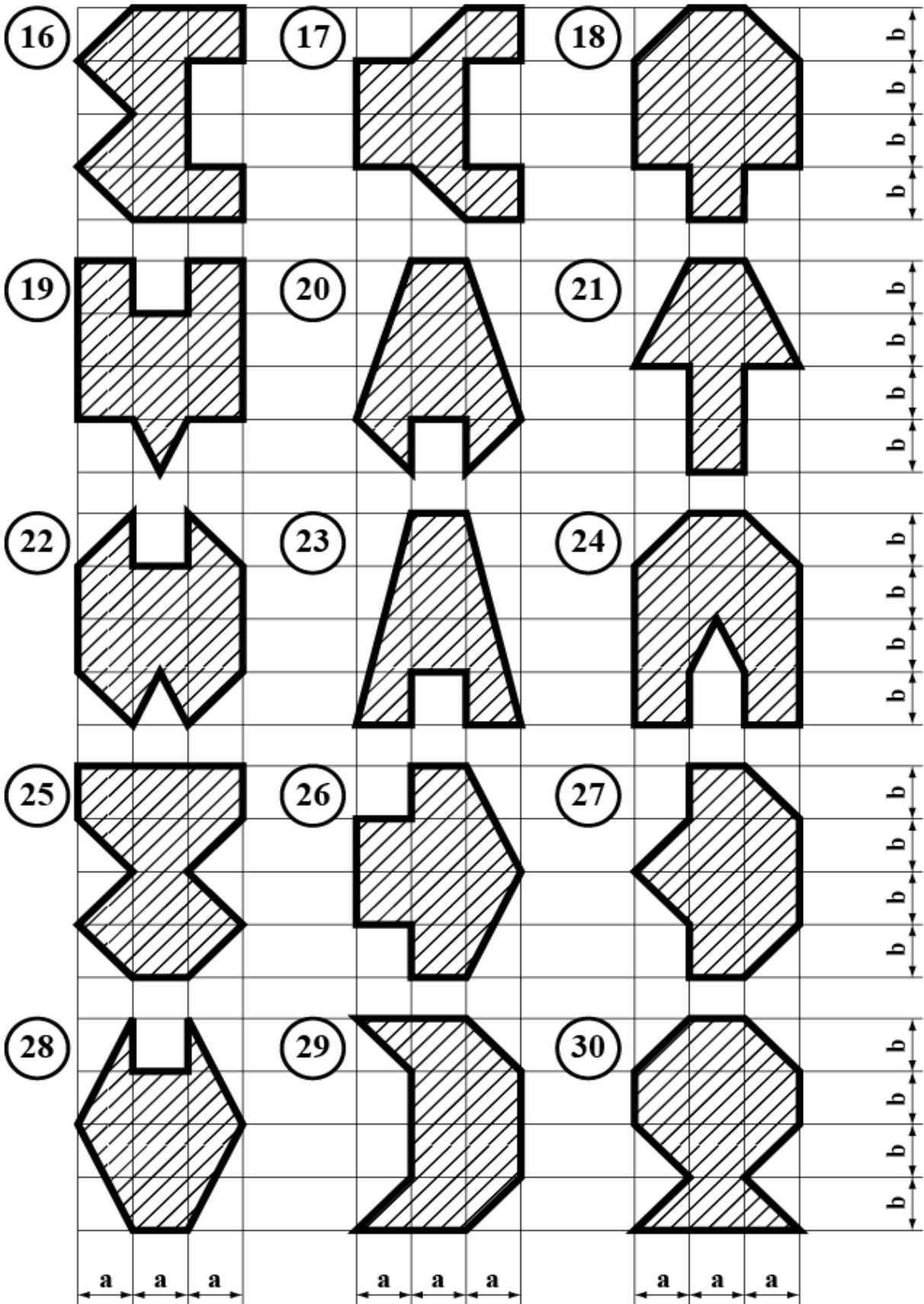


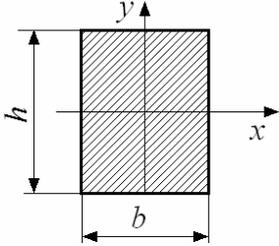
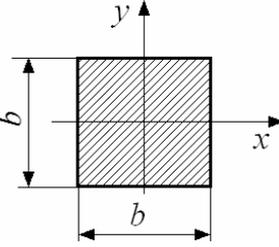
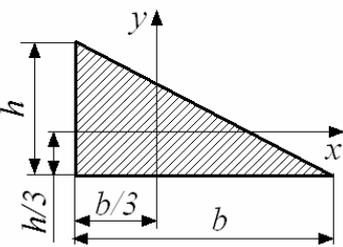
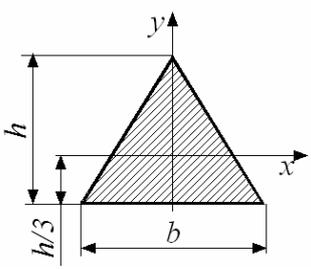
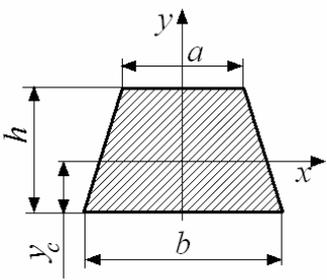
Рисунок А.1 – Исходные данные для РПЗ № 4



Окончание рисунка А.1

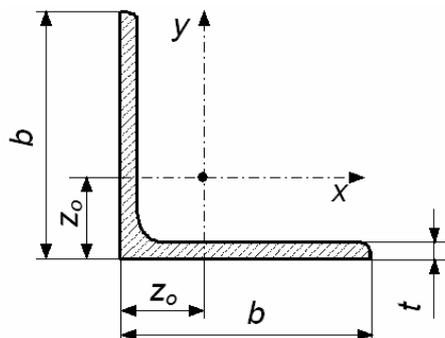
Приложение Б (справочное)

Таблица Б.1 – Геометрические характеристики простых сечений

Сечение	Площадь сечения A , м ²	Осевые моменты инерции I_x, I_y , м ⁴
	bh	$I_x = \frac{bh^3}{12};$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{36}$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{48} = I_{сумм}$
 $y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	$\frac{(a+b)h}{2}$	$I_x = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)h^3}{36(a+b)};$ $I_y = \frac{h(b^4 - a^4)}{48(b-a)} = I_{сумм}$

Приложение В (справочное)

Сокращенный сортament прокатной стали



b – ширина полки;
 t – толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 I_x – осевой момент инерции ($I_x = I_y$);
 W_x – осевой момент сопротивления ($W_x = W_y$);
 i_x – радиус инерции ($i_x = i_y$);
 I_{xy} – центробежный момент инерции;
 z_o – расстояния от центра тяжести до наружной грани полки

Рисунок В.1 – Уголки стальные горячекатаные равнополочные

Таблица В.1 – Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–93)

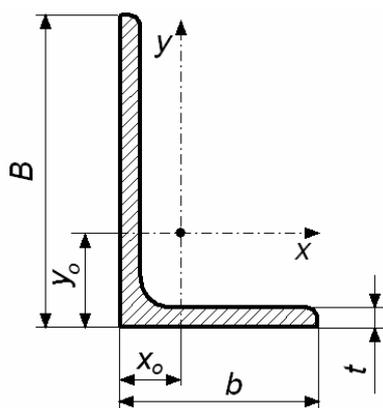
Обозначение уголка $b \times b \times t$, мм	A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_{xy} , см ⁴	z_o , см
20 × 20 × 3	1,13	0,40	0,28	0,59	0,23	0,60
20 × 20 × 4	1,46	0,50	0,37	0,58	0,28	0,64
25 × 25 × 3	1,43	0,81	0,46	0,75	0,47	0,73
25 × 25 × 4	1,86	1,03	0,59	0,74	0,59	0,76
28 × 28 × 3	1,62	1,16	0,58	0,85	0,68	0,80
30 × 30 × 3	1,74	1,45	0,67	0,91	0,85	0,85
30 × 30 × 4	2,27	1,84	0,87	0,90	1,08	0,89
32 × 32 × 3	1,86	1,77	0,77	0,97	1,03	0,89
32 × 32 × 4	2,43	2,26	1,00	0,96	1,32	0,94
35 × 35 × 3	2,04	2,35	0,93	1,07	1,37	0,97
35 × 35 × 4	2,67	3,01	1,21	1,06	1,75	1,01
35 × 35 × 5	3,28	3,61	1,47	1,05	2,10	1,05
40 × 40 × 3	2,35	3,55	1,22	1,23	2,08	1,09
40 × 40 × 4	3,08	4,58	1,60	1,22	2,68	1,13
40 × 40 × 5	3,79	5,53	1,95	1,21	3,22	1,17
45 × 45 × 3	2,65	5,13	1,56	1,39	3,00	1,21
45 × 45 × 4	3,48	6,63	2,04	1,38	3,89	1,26
45 × 45 × 5	4,29	8,03	2,51	1,37	4,71	1,30
50 × 50 × 3	2,96	7,11	1,94	1,55	4,16	1,33
50 × 50 × 4	3,89	9,21	2,54	1,54	5,42	1,38
50 × 50 × 5	4,80	11,20	3,13	1,53	6,57	1,42
50 × 50 × 6	5,69	13,07	3,69	1,52	7,65	1,46

Продолжение таблицы В.1

Обозначение уголка $b \times b \times t$, мм	A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_{xy} , см ⁴	z_o , см
56 × 56 × 4	4,38	13,10	3,21	1,73	7,69	1,52
56 × 56 × 5	5,41	15,97	3,96	1,72	9,41	1,57
63 × 63 × 4	4,96	18,86	4,09	1,95	11,00	1,69
63 × 63 × 5	6,13	23,10	5,05	1,94	13,70	1,74
63 × 63 × 6	7,28	27,06	5,98	1,93	15,90	1,78
70 × 70 × 4,5	6,20	29,04	5,67	2,16	17,00	1,88
70 × 70 × 5	6,86	31,94	6,27	2,16	18,70	1,90
70 × 70 × 6	8,15	37,58	7,43	2,15	22,10	1,94
70 × 70 × 7	9,42	42,98	8,57	2,14	25,20	1,99
70 × 70 × 8	10,67	48,16	9,68	2,12	28,20	2,02
75 × 75 × 5	7,39	39,53	7,21	2,31	23,10	2,02
75 × 75 × 6	8,78	46,57	8,57	2,30	27,30	2,06
75 × 75 × 7	10,15	53,34	9,89	2,29	31,20	2,10
75 × 75 × 8	11,50	59,84	11,18	2,28	35,00	2,15
75 × 75 × 9	12,83	66,10	12,43	2,27	38,60	2,18
80 × 80 × 5,5	8,63	52,68	9,03	2,47	30,90	2,17
80 × 80 × 6	9,38	56,97	9,80	2,47	33,40	2,19
80 × 80 × 7	10,85	65,31	11,32	2,45	38,30	2,23
80 × 80 × 8	12,30	73,36	12,80	2,44	43,00	2,27
90 × 90 × 6	10,61	82,10	12,49	2,78	48,10	2,43
90 × 90 × 7	12,28	94,30	14,45	2,77	55,40	2,47
90 × 90 × 8	13,93	106,11	16,36	2,76	62,30	2,51
90 × 90 × 9	15,60	118,00	18,29	2,75	68,00	2,55
100 × 100 × 6,5	12,82	122,10	16,69	3,09	71,40	2,68
100 × 100 × 7	13,75	130,59	17,90	3,08	76,40	2,71
100 × 100 × 8	15,60	147,19	20,30	3,07	86,30	2,75
100 × 100 × 10	19,24	178,95	24,97	3,05	110,00	2,83
100 × 100 × 12	22,80	208,90	29,47	3,03	122,00	2,91
100 × 100 × 14	26,28	237,15	33,83	3,00	138,00	2,99
100 × 100 × 16	29,68	263,82	38,04	2,98	152,00	3,06
110 × 110 × 7	15,15	175,61	21,83	3,40	106,00	2,96
110 × 110 × 8	17,20	198,17	24,77	3,39	116,00	3,00

Окончание таблицы В.1

Обозначение уголка $b \times b \times t$, мм	A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_{xy} , см ⁴	z_0 , см
125 × 125 × 8	19,69	294,36	32,20	3,87	172,00	3,36
125 × 125 × 9	22,00	327,48	36,00	3,86	192,00	3,40
125 × 125 × 10	24,33	359,82	39,74	3,85	211,00	3,45
125 × 125 × 12	28,89	422,23	47,06	3,82	248,00	3,53
125 × 125 × 14	33,37	481,76	54,17	3,80	282,00	3,61
125 × 125 × 16	37,77	538,56	61,09	3,78	315,00	3,68
140 × 140 × 9	24,72	465,72	45,55	4,34	274,00	3,76
140 × 140 × 10	27,33	512,29	50,32	4,33	301,00	3,82
140 × 140 × 12	32,49	602,49	59,66	4,31	354,00	3,90
160 × 160 × 10	31,43	774,24	66,19	4,96	455,00	4,30
160 × 160 × 11	34,42	844,21	72,44	4,95	496,00	4,35
160 × 160 × 12	37,39	912,89	78,62	4,94	537,00	4,39
160 × 160 × 14	43,57	1046,47	90,77	4,92	615,00	4,47
160 × 160 × 16	49,07	1175,19	102,64	4,89	690,00	4,55
160 × 160 × 18	54,79	1290,24	114,24	4,87	771,00	4,63
160 × 160 × 20	60,40	1418,85	125,60	4,85	830,00	4,70
180 × 180 × 11	38,80	1216,44	92,47	5,60	716,00	4,85
180 × 180 × 12	42,19	1316,62	100,41	5,59	776,00	4,89
200 × 200 × 12	47,10	1822,78	124,61	6,22	1073,00	5,37
200 × 200 × 13	50,85	1960,77	134,44	6,21	1156,00	5,42
200 × 200 × 14	54,60	2097,00	144,17	6,20	1236,00	5,46
200 × 200 × 16	61,98	2362,57	163,37	6,17	1393,00	5,54
200 × 200 × 20	76,54	2871,47	200,37	6,12	1689,00	5,70
200 × 200 × 25	94,29	3466,21	245,59	6,06	2028,00	5,89
200 × 200 × 30	111,54	4019,60	288,57	6,00	2332,00	6,07
220 × 220 × 14	60,38	2814,36	175,18	6,83	1655,00	5,91
220 × 220 × 16	68,58	3175,44	198,71	6,80	1869,00	6,02
250 × 250 × 16	78,40	4717,10	258,43	7,76	2775,00	6,75
250 × 250 × 18	87,72	5247,24	288,82	7,73	3089,00	6,83
250 × 250 × 20	96,96	5764,87	318,76	7,71	3395,00	6,91
250 × 250 × 22	106,12	6270,32	348,26	7,69	3691,00	7,00
250 × 250 × 25	119,71	7006,39	391,72	7,65	4119,00	7,11
250 × 250 × 28	133,12	7716,86	434,25	7,61	4527,00	7,23
250 × 250 × 30	141,96	8176,82	462,11	7,59	4788,00	7,31
250 × 250 × 35	163,71	9281,05	530,11	7,53	5401,68	7,53



B – ширина большей полки;
 b – ширина меньшей полки;
 t – толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 I_x, I_y – осевые моменты инерции;
 W_x, W_y – осевые моменты сопротивления;
 i_x, i_y – радиусы инерции;
 I_{xy} – центробежный момент инерции;
 x_o, y_o – расстояния от центра тяжести до наружной грани полки

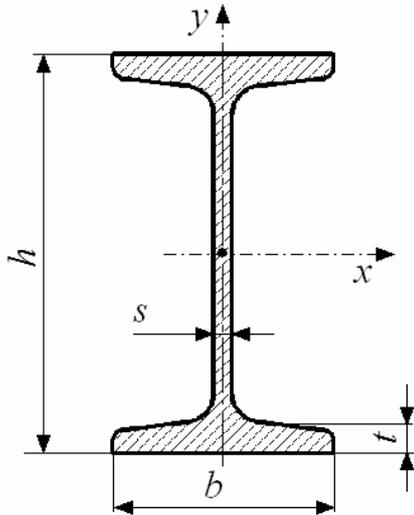
Рисунок В.2 – Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

Таблица В.2 – Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510–86)

Обозначение уголка $B \times b \times t$, мм	A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	I_{xy} , см ⁴	x_o , см	y_o , см
25 × 16 × 3	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,22	0,42	0,86
30 × 20 × 3	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,43	0,51	1,00
30 × 20 × 4	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,54	0,54	1,04
32 × 20 × 3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,47	0,49	1,08
32 × 20 × 4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,59	0,53	1,12
40 × 25 × 3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,96	0,59	1,32
40 × 25 × 4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	1,22	0,63	1,37
40 × 25 × 5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	1,44	0,66	1,41
40 × 30 × 4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,68	0,78	1,28
40 × 30 × 5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	2,00	0,82	1,32
45 × 28 × 3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	1,38	0,64	1,47
45 × 28 × 4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,77	0,68	1,51
50 × 32 × 3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	2,01	0,72	1,60
50 × 32 × 4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	2,59	0,76	1,65
56 × 36 × 4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	3,74	0,84	1,82
56 × 36 × 5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	4,50	0,88	1,87
63 × 40 × 4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	5,25	0,91	2,03
63 × 40 × 5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	6,41	0,95	2,08
63 × 40 × 6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	7,44	0,99	2,12
63 × 40 × 8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	9,27	1,07	2,20
65 × 50 × 5	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	9,77	1,26	2,00
65 × 50 × 6	6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	11,46	1,30	2,04
65 × 50 × 7	7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	12,94	1,34	2,08
65 × 50 × 8	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	13,61	1,37	2,12

Окончание таблицы В.2

Обозначение уголка $B \times b \times t$, мм	A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	I_{xy} , см ⁴	x_o , см	y_o , см
70 × 45 × 5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	9,12	1,05	2,28
75 × 50 × 5	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	12,00	1,17	2,39
75 × 50 × 6	7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	14,10	1,21	2,44
75 × 50 × 7	8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	16,18	1,25	2,48
75 × 50 × 8	9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	17,80	1,29	2,52
80 × 50 × 5	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	13,20	1,13	2,60
80 × 50 × 6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	15,50	1,17	2,65
80 × 60 × 6	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	20,98	1,49	2,47
80 × 60 × 7	9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	24,01	1,53	2,52
80 × 60 × 8	10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	26,83	1,57	2,56
90 × 56 × 5,5	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	20,54	1,26	2,92
90 × 56 × 6	8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	22,23	1,28	2,95
90 × 56 × 8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	28,33	1,36	3,04
100 × 63 × 6	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	31,50	1,42	3,23
100 × 63 × 7	11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	36,10	1,46	3,28
100 × 63 × 8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	40,50	1,50	3,32
100 × 63 × 10	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	48,60	1,58	3,40
100 × 65 × 7	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	38,00	1,52	3,24
100 × 65 × 8	12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	42,64	1,56	3,28
100 × 65 × 10	15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	51,18	1,64	3,37
110 × 70 × 6,5	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	46,80	1,58	3,55
110 × 70 × 8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	55,90	1,64	3,61
125 × 80 × 7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	74,70	1,80	4,01
125 × 80 × 8	15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	84,10	1,84	4,05
125 × 80 × 10	19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	102,00	1,92	4,14
125 × 80 × 12	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	118,00	2,00	4,22
140 × 90 × 8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	121,00	2,03	4,49
140 × 90 × 10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	147,00	2,12	4,58
160 × 100 × 9	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	194,00	2,24	5,19
160 × 100 × 10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	213,00	2,28	5,23
160 × 100 × 12	30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	249,00	2,36	5,32
160 × 100 × 14	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	282,00	2,43	5,40
180 × 110 × 10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	295,00	2,44	5,88
180 × 110 × 12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	348,00	2,52	5,97
200 × 125 × 11	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	465,00	2,79	6,50
200 × 125 × 12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	503,00	2,83	6,54
200 × 125 × 14	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	575,00	2,91	6,62
200 × 125 × 16	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	643,00	2,99	6,71

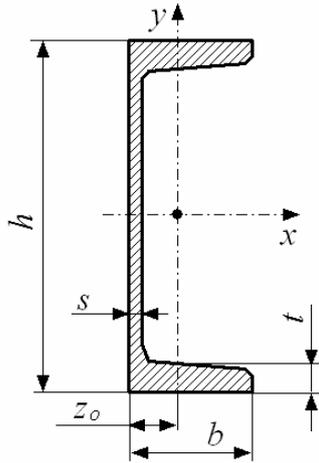


h – высота двутавра;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 I_x, I_y – осевые моменты инерции;
 W_x, W_y – осевые моменты сопротивления;
 i_x, i_y – радиусы инерции;
 S_x^* – статический момент полусечения

Рисунок В.3 – Двутавры стальные горячекатаные

Таблица В.3 – Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)

Номер двутавра	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
	h	b	s	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54



h – высота швеллера;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 I_x, I_y – осевые моменты инерции;
 W_x, W_y – осевые моменты сопротивления;
 i_x, i_y – радиусы инерции;
 S_x^* – статический момент полусечения;
 z_o – расстояния от центра тяжести до наружной грани стенки

Рисунок В.4 – Швеллеры стальные горячекатаные серии У (с уклоном внутренних граней полок)

Таблица В.4 – Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–97)

Но- мер- швел- лера	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_o , см
	h	b	s	t									
5У	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	10,9	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12У	120	52	4,8	7,8	13,3	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14У	140	58	4,9	8,1	15,6	491,0	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	18,1	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	19,5	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	20,7	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	22,2	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,0	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	23,4	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,5	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	26,7	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	30,6	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	35,2	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	40,5	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	46,5	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	53,4	10820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	61,5	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75