МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» очной формы обучения

Могилев 2024

УДК 530.19
ББК 22.311
Т45

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «25» сентября 2024 г., протокол № 2

Составитель канд. техн. наук, доц. Н. В. Герасименко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

Методические рекомендации предназначены для самостоятельной подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Теория физических полей». Содержат краткие теоретические сведения по основным уравнениям, описывающим физические поля, примеры их решения и типовые задачи.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать 05.11.2024. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,13. Тираж 36 экз. Заказ № 838.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Освоение ряда специальных дисциплин основано на особенностях взаимодействия физических полей с веществом. Курс «Теория физических полей» предполагает заложить базовые знания студентам в области принципов и методов анализа физических полей, основанных на имеющихся достижениях акустики, радиационной физики, оптики, теплофизики, электроники, радиофизики, а также привить понимание основных явлений в этих областях науки.

Полученные в процессе изучения теории физических полей навыки позволяют анализировать физические поля различной физической природы с применением существующих теоретических методов; проводить анализ основных параметров полей экспериментальными методами, а также получить представление о физических основах приборов и методов контроля технологических процессов и окружающей среды.

1 Практическое занятие № 1. Элементы векторного анализа

Цель занятия: изучить основные операции над векторами и векторными функциями.

1.1 Краткие теоретические сведения

Как известно, физические величины бывают *скалярными* (температура, потенциал, электрическое сопротивление и др.) и *векторными* (напряженность электрического и магнитного полей, сила, плотность электрического тока, ускорение и др). Для характеристики скалярной величины достаточно знать число – ее значение, для характеристики векторной величины, помимо ее значения (модуля вектора) должно быть определено направление в пространстве.

Рассмотрим вещественное трехмерное пространство, в котором определена операция скалярного произведения векторов. Такое пространство называют евклидовым. Зададим в этом пространстве правый ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Как известно, совокупность базиса и точки называется *системой координат*. Мы будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат. Если задан базис (система координат), всякий вектор $\vec{a}$ можно записать в компонентах:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – *компоненты* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Модуль (длина) вектора определяется через его компоненты как $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Положение точки в пространстве, где задана декартова система координат, определяется *радиус-вектором* (как правило, обозначается $\vec{r}$), т. е. вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с заданной точкой. Радиус-вектор определяется через компоненты как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{z}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ называют число

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В физике и теории поля наряду со скалярным используется *векторное произведение* векторов. Результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{z}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ является вектор, который определяется следующим образом:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha.$$

Отметим, что векторное произведение *антикоммутативно*, т. е. при перестановке двух сомножителей знак результата меняется на противоположный,

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right].$$

Компонентами вектора могут быть не только числа, но и функции, например, из кинематики известно, что положение материальной точки, движущейся в пространстве, задается *переменным* радиус-вектором

$$\vec{r}(t) = f_x(t)\vec{i} + f_y(t)\vec{j} + f_z(t)\vec{k},$$

где $f_x(t), f_y(t), f_z(t)$ – скалярные функции времени.

Если известен радиус-вектор $\vec{r}(t)$, описывающий положение материальной точки в пространстве, то скорость материальной точки $\vec{\upsilon}(t)$ и ее ускорение $\vec{a}(t)$ определяются как первая и вторая производные по времени от радиус-вектора.

Действительно,

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df_x}{dt}\vec{i} + \frac{df_y}{dt}\vec{j} + \frac{df_z}{dt}\vec{k};$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 f_x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2 f_y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2 f_z}{dt^2}\vec{k}.$$

Рассмотрим скалярную функцию, зависящую от пространственных переменных $F(x, y, z)$. По аналогии с производной функции одной переменной вводится понятие *градиента* скалярной функции нескольких переменных:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

Как можно видеть, градиент – это вектор, компоненты которого являются частными производными скалярной функции $F(x, y, z)$ по соответствующим переменным. Градиент указывает направление наискорейшего возрастания скалярной функции.

Отдельно выделяют векторный дифференциальный *оператор* (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Результат скалярного произведения оператора Гамильтона с такой векторной функцией называют *дивергенцией*:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Дивергенция порождает скаляр, характеризующий поток вектора через малую окрестность некоторой точки.

Результат векторного произведения оператора Гамильтона и векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$ называют *ротором*:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор порождает вектор, характеризующий вращательную составляющую $\vec{F}$ в окрестности некоторой точки.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1

Доказать, что векторы, имеющие начало в точке $A(-1,1)$ и концы в точках $B(1,2)$, $C(0,-1)$ соответственно, ортогональны.

Решение

Скалярное произведение двух ортогональных векторов равно нулю. Действительно, $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi/2 = 0$. Запишем компоненты этих векторов в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-(-1))\vec{i} + (2-1)\vec{j} = 2\vec{i} + 1\vec{j};$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-(-1))\vec{i} + (-1-1)\vec{j} = 1\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Запишем скалярное произведение через компоненты

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0.$$

Скалярное произведение равно нулю, следовательно, векторы ортогональны.

Пример 2

Найти величину равнодействующей $\vec{F}$ двух сил, а также ее направляющие косинусы, если модули сил равны $F_1 = 5$ и $F_2 = 7$, а угол между ними равен $\alpha = \pi/3$.

Решение

Выберем систему координат таким образом, чтобы один из векторов совпадал с осью абсцисс, тогда равнодействующую можно вычислить как сумму проекций:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 7\left(\cos\frac{\pi}{3}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{j}\right) = \frac{17}{2}\vec{i} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\vec{j}.$$

Модуль этого вектора равен

$$F = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{109} \approx 10{,}44.$$

Направляющими косинусами называют косинусы углов, которые вектор (в нашем случае вектор $\vec{F}$) образует с положительными полуосями координат. Очевидно, что

$$\cos\beta = \frac{F_x}{F} = \frac{17}{2 \cdot 10{,}44} \approx 0{,}81;$$

$$\cos\gamma = \frac{F_y}{F} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 10{,}44} \approx 0{,}58.$$

Пример 3

Найти градиент функции $\varphi(x, y, z) = x^y - z^2$ в точке с координатами $\{x = 2{,}7; y = 2; z = 2\}$.

Решение

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{yx^y}{x}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2z.$$

Подставляя координаты требуемой точки, получаем

$$\nabla(2{,}7{,}2{,}2) = \frac{2{,}7^2 \cdot 2}{2{,}7}\vec{i} + 2{,}7\ln 2{,}7\vec{j} - 4\vec{k} = 5{,}2\vec{i} + 7{,}2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

1.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Даны координаты точек $A(3,-2,3)$ и $B(-1,0,2)$. Запишите вектор $\overrightarrow{AB}$ в компонентах (в декартовой системе координат) и найдите его модуль.

2 Найдите направляющие косинусы $\overrightarrow{AB}$, если $A(2,3,4)$; $B(2,5,2)$.

3 Найдите равнодействующую сил и ее модуль, если $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{F}_2 = -1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{F}_3 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

4 Вычислите градиент поля $f(x, y, z) = 4xy^2 + z^2$.

5 Вычислите дивергенцию поля $\vec{h} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$.

6 Вычислите ротор поля $\vec{h} = yx\vec{i} + zx\vec{j} + zy\vec{k}$.

2 Практическое занятие № 2. Свойства потенциальных полей

Цель занятия: освоить методику исследования потенциальных полей расчета потенциалов.

2.1 Краткие теоретические сведения

Пусть φ – скалярное, а $\vec{V}$ – векторное поле. Рассмотрим следующие произведения:

$$[\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla, \nabla]\varphi = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0.$$

$$\left(\nabla, [\nabla, \vec{V}]\right) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{V}) = 0.$$

Эти выражения имеют два важных следствия.

Следствие 1. Если ротор векторного поля $\vec{V}$ равен нулю: $\mathrm{rot}\vec{V} = 0$, то такое поле является градиентом некоторого скалярного поля $\vec{V} = \nabla\varphi$.

В физике такие поля принято называть *потенциальными*, а соответствующее скалярное поле φ – *потенциалом*. Примером может служить электростатическое поле.

Следствие 2. Если дивергенция векторного поля $\vec{V}$ равна нулю: $\mathrm{div}\vec{V} = 0$, то оно является ротором другого векторного поля $\vec{V} = \mathrm{rot}\vec{A}$.

Поле $\vec{A}$ называют *векторным потенциалом*. Примером такого поля является магнитное поле в области пространства, где присутствует электрический ток.

Нас будут интересовать потенциальные поля. Потенциальные поля (которые также называют консервативными) играют существенную роль в физике. Поле сил является потенциальным, если работа при перемещении в этом поле зависит лишь от начальной и конечной точек пути и не зависит от траектории. Другим эквивалентным определением потенциальности является требование равенства работы нулю при перемещении по любому замкнутому контуру. Силы, образующие такое поле, называются консервативными (потенциальными).

Перейдем к примеру решения типовой задачи, в котором продемонстрируем методику получения потенциальной функции.

2.2 Пример решения задач

Проверить, является ли векторное поле, заданное функцией ниже, потенциальным.

$$\vec{H} = \left(4xy^2 + z^2\right)\vec{i} + 4x^2 y\vec{j} + \left(2xz - \sin z\right)\vec{k}\ .$$

Если данное поле потенциально, определить потенциал $\varphi(x, y, z)$.

Решение

Поле является потенциальным, если $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$. Вычислим ротор заданного векторного поля:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_x\vec{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(2xz - \sin z) - \frac{\partial}{\partial z}(4x^2 y) = 0;\\
\mathrm{rot}_y\vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(4xy^2 + z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2xz - \sin z) = 2z - 2z = 0;\\
\mathrm{rot}_z\vec{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(4xy^2 + z^2) = 8xy - 8xy = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку все компоненты ротора равны нулю, поле является потенциальным. Найдем потенциальную функцию.

Пусть $\varphi(x, y, z)$ – искомая потенциальная функция. Тогда $\vec{H} = \nabla\varphi$. Очевидно, что функция $\varphi(x, y, z)$ в таком случае может быть определена с точностью до произвольной константы.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4xy^2 + z^2.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = 4y^2\int x dx + z^2\int dx = 2y^2 x^2 + z^2 x + f(y, z),$$

где $f(y, z)$ – некоторая, пока неизвестная функция, зависящая от переменных y и z.

Вычислим частную производную от полученного выражения по y:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4yx^2 + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

С другой стороны это есть y-компонента векторного поля, которая нам известна из условия задачи, поэтому

$$4yx^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 y.$$

Откуда следует, что $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, а это означает, что неизвестная функция $f(y,z)$ не зависит от переменной y и мы можем обновить наше искомое решение следующим образом:

$$\varphi = 2y^2x^2 + z^2x + f(z).$$

Теперь вычислим частную производную от полученного выражения по переменной z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2zx + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Подставляем известные данные и получаем

$$2zx + \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz - \sin z .$$

Следовательно,

$$f(z) = -\int \sin z dz = \cos z + C,$$

где C – произвольная константа.

Искомый потенциал

$$\varphi(x,y,z) = 2y^2x^2 + z^2x + \cos z + C .$$

2.2 Задачи для самостоятельного решения

1 Проверить, является ли векторное поле, заданное функцией ниже, потенциальным. Если данное поле потенциально, определить потенциальную функцию $\varphi(x,y,z)$.

$$\vec{H} = \left(2xy - ze^{xz} - 25\sin x\right)\vec{i} + x^2\vec{j} - xe^{xz}\vec{k} .$$

2 Проверить, является ли векторное поле, заданное функцией ниже, потенциальным. Если данное поле потенциально, определить потенциальную функцию $\varphi(x,y,z)$.

$$\vec{H} = \left(-2xyz + \frac{1}{x^2+1}\right)\vec{i} - x^2z\vec{j} + \left(-x^2y + 3z^2\right)\vec{k} .$$

3 Практическое занятие № 3. Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

Цель занятия: освоить методику решения простейших задач на уравнение Лапласа в прямоугольных координатах.

3.1 Краткие теоретические сведения

На этом занятии будут рассматриваться задачи на расчет плоских стационарных полей в прямоугольной декартовой системе координат. Уравнение Лапласа в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (1)$$

Физические поля, как правило, рассматриваются в какой-либо области пространства, на границах которой заданы условия их поведения. Например, при расчете стационарных температурных полей необходимо знать температуру или тепловой поток на границах области. В связи с этим уравнение дополняется *граничными условиями*, позволяющими выделить из общего решения уравнения функцию, описывающую поведение полей в конкретном случае.

В качестве области будем рассматривать прямоугольник со сторонами a,b, на левой и правой границах которого задано распределение физической величины. На двух других границах значение данной физической величины равно нулю (однородные граничные условия). Этим условиям соответствует следующий набор граничных условий:

$$u(0,y)=f(y);$$

$$u(a,y)=g(y);$$

$$u(x,0)=u(x,b)=0.$$

3.2 Пример решения задачи

Метод решения, который будет представлен ниже получил название «Метод разделения переменных» (или «Метод Фурье»). Он заключается в следующем.

Пусть решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x,y)=X(x)Y(y),$$

где каждая функция $X(x)$ и $Y(y)$ зависит только от одной пространственной переменной.

Подставляя это решение в уравнение (1), получим

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda, \qquad (2)$$

где λ – произвольная комплексная константа.

Нетрудно показать, что $\lambda < 0$, в противном случае мы не сможем использовать граничные условия (проверьте самостоятельно). Константа появляется здесь, поскольку в уравнении с разделенными переменными (2) правая часть вместе с производной второго порядка зависит только от y, а левая часть – только от x, при этом обе части равны, что возможно лишь в случае, когда обе части равны некоторой константе, которую мы и обозначили λ.

Рассмотрим сначала часть, зависящую от y, поскольку для нее имеем однородные граничные условия:

$$Y'' = -\lambda Y.$$

Это ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Из курса математики известно, что решение такого уравнения имеет вид

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\,y + B\sin\sqrt{\lambda}\,y,$$

где A, B – произвольные константы. Используем здесь однородные граничные условия:

$$Y(0) = A\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0 + B\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0 \Rightarrow A = 0.$$

$$Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\cdot b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{b}.$$

Примечание – Можно, конечно, взять $B = 0$, граничному условию при этом мы тоже удовлетворяем, однако получаем в итоге тривиальное решение всей задачи – $u(x, y) \equiv 0$.

Следовательно,

$$Y_n(y) = B_n \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right).$$

Функции $Y_n(y)$ называют *собственными*. Отметим, что их бесконечное множество.

Рассмотрим теперь уравнение на $X(x)$:

$$X'' = \frac{\pi^2 n^2}{b^2} X.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{\pi n x}{b}} + D_n e^{-\frac{\pi n x}{b}}.$$

Поскольку изначальное решение имело вид $u(x,y) = X(x)Y(y)$, запишем с учетом линейности уравнения (1) следующую сумму:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \mathrm{e}^{\frac{\pi n x}{b}} + D_n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n x}{b}}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),$$

где C_n, D_n – также неизвестные константы. Найдем их, применяя граничные условия:

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n + D_n)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) = f(y).$$

Чтобы найти коэффициенты $C_n + D_n$, разложим функцию $f(y)$ в ряд Фурье на интервале $[0,b]$:

$$C_n + D_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy. \qquad (3)$$

Аналогично поступим и во втором случае:

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \mathrm{e}^{\frac{\pi n a}{b}} + D_n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n a}{b}}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) = g(y),$$

откуда следует

$$C_n \mathrm{e}^{\frac{\pi n a}{b}} + D_n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n a}{b}} = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy. \qquad (4)$$

Разумеется, чтобы этот процесс завершился успешно, функции $f(y), g(y)$ не могут быть произвольными, как минимум, они должны удовлетворять условиям теоремы Дирихле.

Когда разложения получены, найти C_n, D_n нетрудно путем решения системы алгебраических уравнений (3) и (4).

3.3 Задание для самостоятельной работы

Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике: $u(0,y) = 0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0;\; u(x,0) = 0;\quad u(x,b) = \sin\left(\frac{5\pi x}{2a}\right).$

4 Практическое занятие № 4. Уравнение Лапласа в полярных и цилиндрических координатах

4.1 Краткие теоретические сведения

Часто области пространства, в которых исследуется то или иное физическое поле, имеют форму круга (диска), кольца или цилиндра. В этих случаях удобно перейти к полярной и цилиндрической системам координат соответственно.

Уравнение Лапласа в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

В цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Напомним, что r – радиус, а φ – полярный угол. Полярные координаты связаны с декартовыми соотношениями $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$.

4.2 Пример решения задачи

Решить краевую задачу внутри круга с условием на границе $u(R,\varphi)=f(\varphi)$.

Решение

Будем искать решение методом разделения переменных в виде

$$u(R,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi).$$

Подстановка в исходное уравнение приводит к следующей цепочке равенств:

$$-\frac{r^2\left(R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)\right)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda.$$

Как и в случае с прямоугольной системой координат, важен выбор знака константы λ. Будем пока считать, что $\lambda<0$ (проверьте самостоятельно, что невозможно выполнить условие периодичности по φ, если $\lambda>0$).

Решение уравнения $\dfrac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda$ имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Поскольку функция $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π-периодической, $\lambda = n^2$, где $n = 1,2,3...$, тогда

$$\Phi_n(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Теперь рассмотрим уравнение на функцию $R(r)$, которое имеет вид

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение (при фиксированном значении n) второго порядка также известно как уравнение Эйлера. Будем искать его решение в виде функции $R(r) = r^m$, где m – произвольное комплексное число. Подстановка в уравнение выше дает следующее:

$$m(m-1)r^m + mr^m - n^2 r^m = r^m(m^2 - n^2) = 0.$$

Очевидно, что $r^m \neq 0$, следовательно, $m = \pm n$. Это означает, что фундаментальная система решений состоит из комбинации функций

$$R_n(r) = Cr^n + Dr^{-n},$$

где C, D – произвольные константы.

В таком виде решение нам не подходит, поскольку рассматривается задача *внутри круга*, т. е. $0 < r \leq R$, а наличие множителя r^{-n} приведет к неограниченному росту значения функции при $r \to 0$, что лишено физического смысла. Чтобы устранить эту особенность, положим $D = 0$. В результате получаем следующее общее решение:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\cdot r^n.$$

Константы A_0, A_n, B_n, как и прежде, можно найти при помощи разложения граничной функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье. Приведем соответствующие формулы:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt.$$

4.3 Задание для самостоятельной работы

Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге $0 < r \le R_0$, $0 \le \varphi, 2\pi$ с граничным условием

$$u(R_0, \varphi) = 2\sin^2\varphi + 4\cos^3\varphi.$$

5 Практическое занятие № 5. Уравнение Пуассона

Цель занятия: освоить методику получения частного и общего решений уравнения Пуассона в полярных координатах с различными граничными условиями.

5.1 Краткие теоретические сведения

Уравнение Пуассона – *неоднородное* дифференциальное уравнение в частных производных, в отличие от уравнения Лапласа оно описывает различные физические поля (например, электростатическое, температурное, поле давлений и др.) при наличии в исследуемой области пространства *источников* этих полей. Например, если в некоторой области пространства исследуется потенциал u электростатического поля и в этой области присутствуют заряды, плотность которых описывается функцией f, то уравнение Пуассона имеет вид

$$\Delta u = f.$$

Вид Δ зависит от выбора системы координат. Мы рассматриваем, как и прежде, прямоугольную декартову и полярную системы координат.

Поскольку уравнение Пуассона неоднородное, его решение строится иначе (в сравнении с уравнением Лапласа). Сначала следует найти *частное* решение уравнения w, после чего сделать *сдвиг* $v = u - w$, что позволит свести задачу к уравнению Лапласа на функцию v. Техника решения уравнения Лапласа изложена в предыдущих практических занятиях. Чтобы записать окончательный ответ, следует выполнить обратный сдвиг решения. *Обратите внимание*, что в результате сдвига меняются и граничные условия!

Главный вопрос настоящего практического занятия – *как искать частные решения*? К сожалению, «рецепта», позволяющего алгоритмизировать решение произвольной задачи, нет (во всяком случае в классическом представлении). Однако довольно часто правая часть (функция f) в уравнении Пуассона имеет *специальный вид*. Рассмотрим несколько случаев в полярных координатах (чаще всего задачи на уравнения Пуассона даны именно в полярной системе).

1 $f(r,\varphi) = ar^n \cos m\varphi$ или $f(r,\varphi) = ar^n \sin m\varphi$, причем $(n+2)^2 \ne m^2$. В этом случае частное решение можно искать в виде такой же функции, повысив степень r на 2, т. е.

$$w(r,\varphi) = Ar^{n+2}\cos m\varphi; \quad w(r,\varphi) = Ar^{n+2}\sin m\varphi.$$

2 Если функции справа такие же, как в случае 1, при этом $(n+2)^2 = m^2$, то частное решение следует искать в виде

$$w(r,\varphi) = \mu(r)\cos m\varphi; \quad w(r,\varphi) = \mu(r)\sin m\varphi,$$

где $\mu(r)$ – неизвестная функция, вид которой будет понятен после подстановки частного решения в исходное уравнение.

5.2 Пример решения задачи

Решить уравнение Пуассона $\Delta u = y^2$ в круге радиусом $R = 2$ с граничным условием $u(2,\varphi) = \sin\varphi + \frac{4}{3}\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos 2\varphi$.

Решение

Запишем уравнение в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2 \sin^2\varphi.$$

Преобразуем выражение в правой части:

$$r^2\sin^2\varphi = r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right).$$

Теперь очевидно, что $n = 2$, $m = 2$, следовательно, условие необходимое выполнено и частное решение можно искать в виде

$$w(r,\varphi) = Ar^4 + br^4\cos 2\varphi.$$

Подставляя это решение в исходное уравнение, получаем

$$12Ar^2 + 12r^2\cos 2\varphi + 4Ar^2 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi.$$

Группируя слагаемые, содержащие r^2 и $r^2\cos 2\varphi$, вычисляем значения констант A, B в частном решении:

$$16A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{32}; \quad 12B = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{24}.$$

Следовательно,

$$w(r,\varphi)=\frac{r^4}{32}-\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi.$$

Делаем сдвиг искомой функции:

$$v(r,\varphi)=u(r,\varphi)-w(r,\varphi)=u(r,\varphi)-\frac{r^4}{32}+\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi.$$

В результате этого получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$$

с граничным условием

$$v(2,\varphi)=u(2,\varphi)-w(2,\varphi)=\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos 2\varphi-\frac{2^4}{32}+\frac{2^4}{24}\cos 2\varphi=$$

$$=\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos 2\varphi=-\frac{1}{2}+\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi.$$

Из практического занятия № 4 нам известно общее решение этой задачи:

$$u(r,\varphi)=\frac{C_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\cos m\varphi+D_n\sin m\varphi\right)\cdot r^m.$$

Остается лишь найти константы C_0, C_m, D_m. Проделаем эти вычисления (заметим, что все слагаемые, кроме $m=1$, равны нулю, что предлагается проверить обучающемуся).

$$u(2,\varphi)=\frac{C_0}{2}+C_1\cdot 2\cos\varphi+D_1\cdot 2\sin\varphi=-\frac{1}{2}+\sin\varphi+\frac{4}{3}\cos\varphi.$$

Сравнивая правую и левую части, нетрудно определить, что

$$C_0=-1;\quad C_1=\frac{2}{3};\quad D_1=\frac{1}{2}.$$

Окончательное решение задачи имеет вид

$$u(r,\varphi)=v(r,\varphi)+w(r,\varphi)=\frac{r^4}{32}-\frac{r^4}{24}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}+\frac{r}{2}\sin\varphi+\frac{2r}{3}\cos\varphi.$$

5.3 Задание для самостоятельной работы

Решить следующую краевую задачу для уравнения Пуассона в круге $0 < r \le 1$:

$$\Delta u = 24x.$$

С граничным условием смешанного типа

$$\left. 2u + \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 20\sin^3 \varphi.$$

6 Практическое занятие № 6. Волновое уравнение с одной пространственной координатой. Формула Даламбера

Цель занятия: получить представление о классическом методе решения одномерного волнового уравнения путем сведения к интегрированию вдоль характеристик.

6.1 Краткие теоретические сведения

Волновое уравнение является одним из основных уравнений математической физики и встречается практически во всех прикладных задачах, связанных с распространением колебаний. В рамках этого практического занятия будет рассматриваться одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ – искомая функция, описывающая возмущение (отклонение от положения равновесия) некоторой физической величины. Это может быть малое локальное изменение давления, концентрации, напряженности поля и т. д.;

t – время;

x – пространственная координата;

a – вещественная константа, зависящая от среды, в которой исследуется физический процесс и играющая роль скорости распространения возмущения.

Введем новые переменные, связанные со старыми функциональными соотношениями

$$\xi(x,t) = x + at; \quad \eta(x,t) = x - at.$$

Вычисляя вторые производные, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Подстановка этих выражений в исходное уравнение приводит к тому, что уравнение теперь содержит только одну смешанную производную:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Уравнение в таком виде нетрудно проинтегрировать напрямую. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow u(\xi,\eta) = \int f(\eta)d\eta = F(\eta) + G(\xi).$$

Вернемся к старым переменным:

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

Полученное решение представляет собой суперпозицию *падающей* $f(x-at)$ и *обратной* $g(x+at)$ волн. Пусть в начальный момент времени $t=0$ распределение физической величины в рассматриваемой области описывается функцией $\varphi(x)$, а первая производная – $\psi(x)$. Определим вид функций f и g:

$$\begin{cases} -f(x) + g(x) = \varphi(x) = u(x,0); \\ f'(x)\cdot(-a) + g'(x)\cdot a = \psi(x). \end{cases}$$

Второе уравнение в полученной системе проинтегрируем по x, в результате получим

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)ds - \frac{C}{2a};$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)ds + \frac{C}{2a}.$$

Откуда и следует *формула Даламбера*:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

Волновое уравнение может быть и неоднородным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $f(x,t)$ – некоторая функция (источник). Как и в случае с уравнением Пуассона, в такой ситуации рационально сначала найти какое-либо частное решение уравнения, а затем выполнить сдвиг переменной. Это позволит свести задачу к однородному волновому уравнению, для которого справедлива формула Даламбера.

6.2 Пример решения задачи

Решить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение

Применяя формулу Даламбера, получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-(x-at)^2} + \mathrm{e}^{-(x+at)^2}\right).$$

6.3 Задачи для самостоятельного решения

1 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad u(x,0) = 0; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad u(x,0) = \sin x; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x + 5x.$$

7 Практическое занятие № 7. Волновое уравнение с несколькими пространственными координатами

Цель занятия: изучить метод разделения переменных в применении к волновому уравнению с двумя или более пространственными координатами.

7.1 Краткие теоретические сведения

В физике и ее приложениях часто встречаются задачи, связанные с исследованием колебаний и волн, распространяющихся в пластинах (например, колебания пьезомембраны преобразователя, предназначенного для излучения ультразвука), в ограниченных объемах (колебания жидкости в сосуде, распространение волн в гидроакустических задачах, колебания воздуха в сосудах и др). В ряде линейных случаев такие задачи сводятся к решению волнового уравнения с двумя или тремя пространственными координатами. В общем виде уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0.$$

Отметим, что в уравнение входит оператор Лапласа. Как нам уже известно, оператор имеет различный вид в различных системах координат. Выбор той или иной системы координат зависит от геометрии исследуемой задачи.

Одним из эффективных методов решения волнового уравнения является уже известный из данного курса метод разделения переменных.

7.2 Пример решения задачи

Найти функцию, описывающую колебания прямоугольной пластины размерами $a \times b$, со следующими начально-краевыми условиями:

$$u(x, y, 0) = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = xy(a - x)(b - y);$$

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0; \quad u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0.$$

Решение

Для решения задачи будем использовать метод разделения перменных:

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t).$$

Подставляя эту комбинацию в исходное уравнение, получаем

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Сначала найдем собственные функции по переменной x, для этого запишем уравнение следующим образом:

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow X'' + \lambda X = 0,$$

где λ – произвольное комплексное число.

Решением этого уравнения с учетом однородных граничных условий по x является функция (см. практическое занятие № 3)

$$X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2.$$

Теперь предстоит найти собственные функции по y, для этого запишем уравнение следующим образом:

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = \frac{Y''}{Y} = -\mu \Rightarrow Y'' + \mu Y = 0,$$

где μ – также произвольное комплексное число.

Имеем также однородные граничные условия по y, поэтому решением будет функция

$$Y_m(y) = B_m \sin\frac{\pi m y}{b}, \quad \mu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2.$$

Теперь определим, какой вид имеет часть функции, выражающая зависимость от времени. Для этого необходимо решить уравнение

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$T_{nm}(t) = C_{nm} \cos\left(\alpha\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\, t\right) + D_{nm} \sin\left(\alpha\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\, t\right).$$

Запишем общий вид полученного решения:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_{nm} \cos\left(\alpha\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\, t\right) + D_{nm} \sin\left(\alpha\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\, t\right)\right] \times$$

$$\times \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi m y}{b}.$$

Теперь нужно использовать заданные начальные условия, чтобы найти константы C_{nm} и D_{nm}:

$$u(x,t,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi m y}{b} = 0.$$

Из первого начального условия следует, что $C_{nm} = 0$ для любых значений индексов n, m.

Для производной по t имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha D_{nm} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)} \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi m y}{b} = xy(a-x)(b-y).$$

Умножим правую и левую части на $\sin(\pi\hat{n}x/a)\cdot\sin(\pi\hat{m}y/b)$ и проинтегрируем на отрезках от 0 до a и до b соответственно.

В силу ортогональности тригонометрической системы функций, слева для всех значений $\hat{n} \neq n$ и $\hat{m} \neq m$ получим ноль, а при $\hat{n} = n$ и $\hat{m} = m$:

$$\left.\int_0^a \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi \hat{n} x}{a}\right|_{n=\hat{n}} = \frac{a}{2}; \quad \left.\int_0^a \sin\frac{\pi m y}{b} \sin\frac{\pi \hat{n} y}{b}\right|_{m=\hat{m}} = \frac{b}{2}.$$

Вычислим интегралы в правой части:

$$\int_0^a x(a-x)\sin\frac{\pi\hat{n}x}{a}dx = -2\left(\frac{a}{\pi\hat{n}}\right)^3\left((-1)^{\hat{n}} - 1\right);$$

$$\int_0^a y(b-y)\sin\frac{\pi\hat{m}y}{b}dy = -2\left(\frac{b}{\pi\hat{m}}\right)^3\left((-1)^{\hat{m}} - 1\right).$$

Откуда находим

$$D_{nm} = \frac{16}{\alpha\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)}} \frac{a^2 b^2}{\pi^3 n^3 m^3}(1-(-1)^n)(1-(-1)^m).$$

8 Практическое занятие № 8. Теплопроводность стенок различной конфигурации

Цель занятия: изучить основные методы расчета распределения температурных полей в стенках различной конфигурации.

8.1 Краткие теоретические сведения

Теплопроводность – способ передачи теплоты за счет взаимодействия микрочастиц тела (атомов, молекул, ионов) в поле температур. Распределение температуры в некоторой области пространства с заданными условиями на границах этой области описывается *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T,$$

где D – вещественная константа, называемся коэффициентом температуропроводности.

В *станционарном* режиме температурное поле стенки не изменяется во времени, при этом $\partial T / \partial t = 0$.

В плоских стенках при постоянном коэффициенте температуропроводности распределение температуры происходит по линейному закону:

$$T(x) = T_1 \frac{T_1 - T_2}{h} \cdot x,$$

где x – расстояние от левой границы стенки до точки, в которой определяется температура;

h – толщина стенки;

T_1, T_2 – температуры на левой и правой границах стенки соответственно.

Эту формулу можно использовать как для однослойной, так и для многослойной стенок. Тепловой поток через такую стенку можно вычислить по формуле

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\Lambda} = \frac{U_t}{\Lambda},$$

где Λ – термическое сопротивление стенки, $\Lambda = h / S\lambda$ (λ – коэффициент теплопроводности материала стенки, справочная величина, S – площадь поверхности стенки);

U_t – термическое напряжение, разность температур.

Эта формула напоминает «закон Ома» для электрических цепей постоянного тока. Таким образом, плоская стенка, состоящая из n слоев, представима в виде абстрактной термической цепи с последовательным соединением n «резисторов», а общий тепловой поток через такую стенку можно рассчитать по формуле

$$Q = \frac{U_t}{\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для стенки цилиндрического типа. Такие задачи встречаются, например, при расчете тепловых потерь трубопроводов тепловых сетей. Распределение температуры в цилиндрической стенке определяется формулой

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{r}{R_1},$$

где r – расстояние от внутреннего цилиндра до точки, в которой рассчитывается температура;

R_1, R_2 – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Термическое сопротивление цилиндрической стенки рассчитывается по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi\lambda l} \cdot \ln\frac{D_2}{D_1},$$

где l – длина цилиндра;

D_1, D_2 – внутренний и внешний диаметры соответственно.

8.2 Пример решения задачи

Плоская стенка изготовлена из материала с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0{,}25$ Вт/(м·К). Толщина стенки $h = 50$ мм. Определить плотность теплового потока через стенку, если на ее поверхностях поддерживаются температуры $T_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$ и $T_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$.

Решение

Используя формулы для плоской стенки, находим

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\Lambda} = \frac{50 - 20}{\dfrac{0{,}05}{0{,}25}} S = 150S,$$

откуда

$$q = \frac{Q}{S} = 150 \text{ Вт/м}^2.$$

8.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Температура в плоской стенке изменяется по линейному закону $T(x) = 150 - 100x$, где x – координата, измеряемая в метрах. Толщина стенки $h = 1$ м. Найти плотность теплового потока через стенку.

2 Лед на реке толщиной $h_1 = 220$ мм покрыт слоем снега толщиной $h_2 = 100$ мм. Температура наружной поверхности снега $T_1 = -10\ ^\circ\mathrm{C}$, а на поверхности льда, обращенной к воде, $T_2 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$. Рассчитать плотность теплового потока.

3 Зимой температура на наружной поверхности стены здания $T_2 = -10\ ^\circ\mathrm{C}$, а температура на внутренней поверхности стены $T_1 = 15\ ^\circ\mathrm{C}$. Рассчитать

необходимую мощность отопительной системы здания, если наружная стена (без учета окон) выполнена из красного кирпича ($\lambda = 0{,}81$ Вт/м·К). Найти глубину промерзания стены.

4 Трубопровод с наружным диаметром $D_2 = 100$ мм и длиной $l = 30$ м покрыт слоем стекловаты толщиной $h_2 = 50$ мм. Температура на поверхности трубы $T_1 = 160\ ^\circ\mathrm{C}$, а температура на поверхности изоляции $T_2 = 38\ ^\circ\mathrm{C}$. Найти суточную потерю энергии в трубопроводе.

9 Практическое занятие № 9. Уравнение теплопроводности с одной пространственной координатой

Цель занятия: изучить методы решения задач на выравнивание температуры.

9.1 Краткие теоретические сведения

Задачи, требующие исследования процессов выравнивания температуры (нагрева или остывания) в некоторой области пространства, сводятся к уравнению теплопроводности, которое в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D^2 \Delta T - f(x, y, z, t) = 0,$$

где $T(x, y, z, t)$ – температура в точке пространства в фиксированный момент времени;

D – коэффициент температуропроводности, зависящий от свойств среды;

$f(x, y, z, t)$ – функция, описывающая распределение источников теплоты. Если $f = 0$, уравнение теплопроводности называется *однородным*.

В рамках этого занятия ограничимся рассмотрением одномерного уравнения теплопроводности. С помощью такого уравнения описывают процесс распределения тепла в стержнях и других протяженных объектах с пренебрежимо малым сечением. Если источники теплоты отсутствуют (однородный случай), уравнение принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) распределение температуры описывается функцией $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Применим метод разделения переменных и выполним поиск решения данного уравнения в виде

$$T(x, t) = X(x)\tau(t) \neq 0.$$

Подставляя решение в исходное уравнение и разделяя переменные, получим уже знакомую задачу:

$$\frac{X''}{X} = \frac{\tau'}{D^2\tau} = \lambda.$$

Решение для пространственной переменной дает

$$X(x) = A\mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}x} + B\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x}.$$

Для временной –

$$\tau(t) = C\mathrm{e}^{-D^2\lambda t}.$$

Пусть собственные числа λ пробегают полный спектр, т. е. $\lambda = s^2$, $s \in \mathbb{R}$, тогда ограниченные решения пространственной части задачи можно записать как

$$X(x) = A\mathrm{e}^{isx}.$$

Произведение полученных решений дает

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(s)\mathrm{e}^{-D^2s^2t+isx}\,ds.$$

При $t = 0$ имеем

$$T(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(s)\mathrm{e}^{isx}\,ds = \varphi(x),$$

следовательно, определить коэффициенты $C(s)$ можно при помощи обратного преобразования Фурье:

$$C(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-is\xi}\,d\xi.$$

Подставим это разложение в исходное решение и поменяем порядок интегрирования. В результате получим выражение, котрое принято называть *интегралом Пуассона*:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D^2s^2t+is(x-\xi)}\,ds.$$

Функцию $G(x,\xi,t)$ называют *функцией Грина* точечного источника теплоты или же *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*. С помощью дифференцирования по параметру можно вычислить этот интеграл. В результате получим окончательный вид функции Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2D\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D^2 t}}.$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть точечный источник теплоты, находящийся в точке $x=\xi$ в момент времени $t=0$, выделяет некоторое количество теплоты Q (температура в точке в этот момент времени бесконечно велика). При $t>0$ изначательное распределение теплоты выравнивается вдоль прямой. При этом количество теплоты, т. е. площадь, ограниченная кривой, остается постоянным. Это выражает закон сохранения энергии. Отметим также, что при $t>0$ температура в сколь угодно удаленной от источника теплоты $x=\xi$ точки ненулевая, что противоречит конечной скорости распространения тепла. Это явление называется парадоксом бесконечной теплопроводности, который в действительности связан с тем, что математическая модель, основанная на уравнении теплопроводности, не учитывает структуру вещества, в котором распространяется теплота. Заметим, что вид $G(x,\xi,t)$ практически полностью совпадает с формулой плотности нормального распределения. Это совпадение неслучайно, и позволяет связать механизм распространения теплоты в веществе с броуновским движением частиц в среде.

9.2 Пример решения задачи

Найти распределение температуры в бесконечном стержне с коэффициентом температуропроводности $D=\sqrt{13}$, если в начальный момент времени $t=0$ температура распределена как

$$T(x,0) = \mathrm{e}^{-3x^2+2x}.$$

Решение

Применяя интеграл Пуассона, получим:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{13\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-3x^2+2x} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D^2 t}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{156\xi^2 t - 104\xi t + x^2 - 2x\xi + \xi^2}{52t}} d\xi =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{52t}\left(x - \frac{(52t+2x)^2}{156t+1}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{156t+1}{52t}\left(\xi - \frac{52t+x}{156t+1}\right)^2} d\xi = \frac{\mathrm{e}^{\frac{-3x^2+52t+2x}{156t+1}}}{\sqrt{156t+1}}.$$

Для вычисления этого интеграла использован известный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

9.3 Задание для самостоятельного решения

1 При помощи какого-либо программного пакета постройте графики решения, полученного в примере выше, в различные моменты времени.

2 Решите задачу из примера при $T(x,0) = 5e^{-5x^2}$ и $D = 2$.

10 Практическое занятие № 10. Введение в метод конечных разностей

Цель занятия: получить базовые навыки составления конечно-разностной схемы для дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в задачах математического описания физических полей.

10.1 Краткие теоретические сведения

Анализируя задачи, возникающие в ходе изучения курса теории физических полей, становится ясно, что всякая задача приводит к дифференциальному уравнению в частных производных с некоторыми начальными и (или) граничными условиями, опредеделенными физическими условиями, в которых исследуется поле. Задачи, имеющие классические решения, образуют весьма скромный класс. Введение обобщенных функций позволяет расширить возможности математического аппарата, однако аналитическое решение удается получить далеко не всегда. Прикладные задачи теории физических полей чаще всего ставятся в нестандартных областях пространства с нетривиальными граничными и начальными условиями. По этой причине широкое распространение получили численные методы решения задач математической физики. Наиболее распространенными являются метод конечных разностей и метод конечных элементов. Эти методы довольно универсальны, а их алгоритмы хорошо отработаны, что позволяет (особенно в случае метода конечных элементов) построить готовые прикладные пакеты программного обеспечения для моделирования физических полей различной природы. Примерами такого программного обеспечения могут служить Ansys Maxwell, Infolytica MagNet, TermNet, ElecNet, Comsol и др.

В рамках этого занятия рассмотрим процесс построения конечно-разностной схемы для простейшего случая – одномерного уравнения теплопроводности.

Пусть имеется задача

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

$0 \le t \le t_{\max}$, $0 \le x \le l$. Начальные и граничные условия имеют вид:

$$T(x,0) = \psi(x);$$

$$T(0,t) = f(t);$$

$$T(l,t) = g(t).$$

Для удобства мы временно положим коэффициент D равным 1. Наиболее простым и универсальным является построение конечно-разностной аппроксимации путем замены частных производных разностными отношениями.

Зададим в исследуемой области равномерную сетку с шагом Δx по пространству и Δt по времени. Пусть индекс $n = 1,2,\ldots$ отвечает за шаг по пространственным узлам сетки, а индекс $m = 1,2,\ldots$ за временные слои. Тогда производные, входящие в уравнение теплопроводности, можно заменить следующими приближенными выражениями:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x_{n+1},t_m) - 2T(x_n,t_m) + T(x_{n-1},t_m)}{\Delta x^2}.$$

Как правило, вместо дискретных аргументов используют верхние и нижние индексы:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{n+1}^m - 2T_n^m + T_{n-1}^m}{\Delta x^2}.$$

Аналогично приблизим производную по времени

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t}.$$

В результате уравнение вместе с граничными и начальными условиями принимает вид

$$\frac{T_n^{m+1} - T_n^m}{\Delta t} = \frac{T_{n+1}^m - 2T_n^m + T_{n-1}^m}{\Delta x^2}.$$

$$T_n^0 = \psi_n;$$

$$T_0^m = f^m;$$

$$T_l^m = g^m.$$

Выполняя несложные преобразования, можно получить рекуррентную формулу для вычисления сеточного решения T_n^m на каждом последующем временном слое по известным значениям предыдущего. Такая разностная схема называется явной:

$$T_n^{m+1} = T_n^m + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{n+1}^m - 2T_n^m + T_{n-1}^m).$$

Важным понятием при построении численных решений является понятие *устойчивости разностной схемы*. При практической реализации разностной схемы на компьютере возникают проблемы, связанные с точностью представления чисел. В результате решается не исходная, а, как говорят, возмущенная, разностная задача. Накопление ошибки в процесса итераций может привести к тому, что полученное решение не будет соответствовать действительности.

Устойчивой называется разностная схема, для которой существуют такие числа $c > 0$, $h > 0$, $\delta > 0$, что для любого разбиения сетки $\Delta < h$ и для любых возмущений $|\delta f| < \delta$ решение разностной задачи существует и единственно. При этом выполняется условие $|\delta T| \leq c|\delta f|$.

10.2 Задание для самостоятельной работы

Реализовать явную разностную схему для уравнения теплопроводности на компьютере. Начальные и граничные условия для задачи получить у преподавателя. Сравнить полученный результат с точным аналитическим решением.

Список литературы

1 **Свешников, А. Г.** Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – 354 с.

2 **Гершанок, В. А.** Теория поля: учебник для бакалавров / В. А. Гершанок. – М.: Юрайт, 2022. – 278 с.

3 **Михайлова, Т. В.** Некоторые методы решения типовых задач по курсу математической физики: учеб. пособие / Т. В. Михайлова, А. А. Хасанов. – М.: МФТИ, 2020. – 184 с.

4 **Васильев, А. Н.** Классическая электродинамика. Краткий курс лекций: учеб. пособие. – 2-е изд. стер. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 288 с.