

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ФИЗИКА

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов всех специальностей и направлений подготовки
заочной формы обучения*

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК.
МАГНЕТИЗМ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**



Могилев 2024

УДК 535
ББК 22.33
Ф55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «3» сентября 2024 г.,
протокол № 1

Составители: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Хомченко;
канд. физ.-мат. наук, доц. О. Е. Коваленко;
канд. физ.-мат. наук С. О. Парашков;
ст. преподаватель Е. В. Пивоварова

Рецензент канд. техн. наук Н. В. Герасименко

Методические рекомендации содержат требования к выполнению контрольной работы, основные понятия и формулы по разделам «Электростатика», «Постоянный ток», «Магнетизм» и «Колебания и волны», примеры решения задач, а также таблицы физических постоянных. Учебный материал, приведенный в указаниях, может быть полезен при самостоятельной подготовке студентов к различным испытаниям.

Учебное издание

ФИЗИКА

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изделий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2024

Содержание

1 Программа курса физики.....	4
2 Методические указания к решению задач контрольных работ.....	5
3 Учебные материалы по разделам курса физики	6
3.1 Электростатика	6
3.2 Постоянный электрический ток.....	19
3.3 Электромагнетизм	26
3.4 Колебания и волны.....	35
Список литературы	43
Приложение А. Значения некоторых физических величин и постоянных	44

1 Программа курса физики

Электростатика. Закон сохранения электрического заряда. Основные характеристики электростатического поля – напряженность и потенциал. Напряженность как градиент потенциала. Расчет электростатических полей методом суперпозиции. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Остроградского – Гаусса к расчету поля. Электрическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Типы диэлектриков. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость вещества. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость среды. Сегнетоэлектрики.

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение зарядов в проводнике. Емкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы. Энергия заряженных проводника, конденсатора и системы проводников. Энергия электростатического поля.

Постоянный электрический ток. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Классическая электронная теория электропроводности металлов и ее опытные обоснования. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений. Закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение. Затруднения классической теории электропроводности металлов. Границы применимости закона Ома. Работа выхода электронов из металла. Термоэлектронная эмиссия. Ток в газах. Несамостоятельный и самостоятельный разряды. Понятие о плазме.

Электромагнетизм. Магнитное поле. Магнитная индукция. Закон Ампера. Магнитное поле тока. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент витка с током. Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока (циркуляция вектора магнитной индукции) для магнитного поля в вакууме и его применение к расчету магнитного поля тороида и длинного соленоида. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц. Контур с током в магнитном поле. Магнитный поток. Теорема Остроградского – Гаусса. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Индуктивность. Токи при замыкании и размыкании цепи. Энергия системы проводников с током. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Магнитное поле в веществе. Микро- и макротоки. Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Намагниченность. Магнитная восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Ферромагнетики. Опыт Столетова. Кривая намагничивания. Магнит-

ный гистерезис. Точка Кюри. Домены. Спиновая природа ферромагнетизма. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Ток смещения. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

Колебания и волны. Гармонические колебания (механические и электромагнитные) и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Пружинный, математический, физический маятники. Электрический колебательный контур. Энергия гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Аперидический процесс. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Амплитуда смещения и фаза вынужденных колебаний. Понятие о резонансе. Волновые процессы. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Синусоидальные (гармонические) волны. Уравнение бегущей волны. Длина волны и волновое число. Волновое уравнение. Фазовая скорость и дисперсия волн. Энергия волны. Принцип суперпозиции волн и границы его применимости. Когерентность. Интерференция волн. Уравнение стоячей волны и его анализ. Электромагнитные волны. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитных волн. Монохроматическая волна. Энергия электромагнитных волн. Поток энергии. Вектор Умова – Пойтинга.

2 Методические указания к решению задач контрольных работ

1 За время изучения курса общей физики студент заочного отделения должен выполнить три контрольные работы.

2 Условия задач, которые необходимо проработать при предварительной подготовке к контрольной работе, студент может взять на кафедре «Физика» или на сайте университета.

3 Решения задач следует начинать с краткой записи условия с приведением его к СИ, а далее сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж.

4 Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи.

5 После получения расчетной формулы для проверки ее правильности нужно подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

6 Значения некоторых физических величин и постоянных, которые не приведены в условии задачи, можно найти в таблицах А.1–А.7. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинако-

вых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

7 При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин нужно записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой и соответствующей степени десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 – $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

8 Вычисления по расчетной формуле следует проводить с соблюдением правил приближенных вычислений [5]. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Задачи сгруппированы по темам. В начале каждой темы приведены типовые задачи. Для решения таких задач достаточно использовать известные формулы, которые даны в теоретическом разделе.

Более сложные задачи можно решить, используя рассмотренные в методических рекомендациях и в литературе примеры решений.

3 Учебные материалы по разделам курса физики

3.1 Электростатика

Электрическое поле – это силовое поле, которое возникает вокруг любого заряженного тела и проявляется в действии на другие заряженные тела. В электростатике заряженная материальная точка называется *точечным зарядом*.

Закон Кулона определяет силу взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов. Значение силы Кулона определяется формулой

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2},$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 ;

r – расстояние между зарядами;

ε – диэлектрическая проницаемость среды;

ε_0 – электрическая постоянная.

Если диэлектрическая проницаемость среды ε не указана, то она принимается равной единице.

Сила Кулона является *центральной силой* и соответствует притяжению ($F < 0$), если заряды разноименны, и отталкиванию ($F > 0$), если заряды одноименны.

Электрическое поле характеризуется напряженностью и потенциалом.

Формулы напряженности E и потенциала φ электрического поля.

В общем случае напряженность E и потенциал φ электрического поля определяются следующими формулами:

$$\vec{E} = \vec{F} / q; \quad \varphi = \Pi / q,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд q , который находится в электрическом поле;

Π – потенциальная энергия положительного заряда q , который находится в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

Сила F , действующая на заряд и потенциальная энергия Π заряда в некоторой точке поля, в которой напряженность и потенциал равны E и ϕ соответственно, рассчитывают по формулам:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}; \quad \Pi = q \cdot \phi.$$

Напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемые точечным зарядом, вычисляют по формулам:

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2}; \quad \phi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

Принцип суперпозиции электрических полей.

Напряженность и потенциал поля, создаваемые в некоторой точке пространства *системой точечных зарядов*, определяются *принципом суперпозиции* электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i; \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i,$$

где $\vec{E}_i$, ϕ_i – напряженность и потенциал, создаваемые i -м зарядом в данной точке поля.

Следует учитывать, что линии напряженности поля положительного заряда исходят от него. Линии же напряженности поля отрицательного заряда сходятся на нем (рисунок 1).

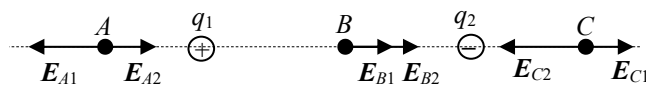


Рисунок 1 – Пояснение принципа суперпозиции напряженностей E

Поэтому в одних случаях (точка B) напряженности полей отдельных зарядов суммируют, а в других случаях (точки A и C) вычитают.

Потенциалы полей складываются с учетом их знаков, как это показано на рисунке 2.

При решении задач сначала по формулам вычисляются значения напряженностей (или потенциалов), создаваемых в заданной точке (A , B или C) каждым из зарядов (q_1 и q_2). Например, для точки A это будут E_{A1} и E_{A2} (или ϕ_{A1} и ϕ_{A2}). Затем полученные значения соответствующих величин складываются с учетом их знаков.

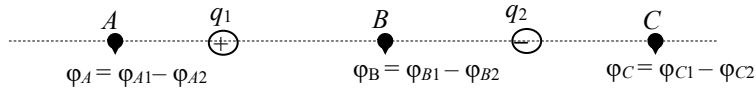


Рисунок 2 – Пояснение принципа суперпозиции потенциалов φ

Напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами.

Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью τ , то на линии выделяется малый участок длиной dl с зарядом $dq = \tau \cdot dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный и применить следующие формулы:

$$d\vec{E} = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность.

Используя принцип суперпозиции электрических полей, интегрированием находят *напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ поля, создаваемого распределенным зарядом:*

$$\vec{E} = \frac{\tau}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon} \int_L \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon} \int_L \frac{dl}{r}.$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины L заряженной линии.

Интегрирование приводит к следующей формуле для **напряженности поля, создаваемого прямой бесконечной равномерно заряженной линией или бесконечно длинным цилиндром:**

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot r},$$

где r – расстояние от нити или оси цилиндра до точки, в которой определяется напряженность поля;

τ – линейная плотность заряда, $\tau = q / l$.

При расчетах электростатического поля системы зарядов используется **теорема Остроградского – Гаусса.**

Определение теоремы Остроградского – Гаусса для поля в вакууме: *поток $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$ вектора напряженности E электростатического поля через*

любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов $\sum_{i=1}^N q_i$, которые охватываются этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную.

Математическая формула теоремы имеет следующий вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N q_i,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу поверхности dS .

Если поверхность не охватывает заряд, то поток через такую поверхность равен нулю.

Значение потока вектора E через замкнутую поверхность не зависит ни от размеров, ни от формы поверхности. Поэтому при расчетах следует выбирать поверхность такой формы, которая позволяет наиболее просто вычислить поток.

Применение теоремы Остроградского – Гаусса к расчету поля приводит к следующим формулам для напряженностей и потенциалов.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей **заряженной сферой** радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

– при $r < R$

$$E = 0; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot R};$$

– при $r = R$

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot R^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot R};$$

– при $r > R$

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot r},$$

где q – заряд сферы.

Напряженность поля, создаваемого **бесконечной равномерно заряженной плоскостью**, определяется как

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon}.$$

Связь потенциала с напряженностью:

– в общем случае $\vec{E} = -grad \varphi$ или $\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right);$

– если поле однородное, то $E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d};$

– если поле обладает центральной или осевой симметрией, то $E = -\frac{d\varphi}{dr}.$

Работа по перемещению заряда q в электростатическом поле.

При заданной напряженности поля E работа по перемещению электрического заряда q определяется следующей формулой:

$$A = q \cdot \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

где E – напряженность поля;

dl – элемент траектории L .

Работа по перемещению тела с зарядом q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 вычисляется по формуле

$$A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Эта работа идет на изменение кинетической энергии тела $\Delta W_k = A$. Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$\Delta W_k = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \text{ или } \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где m – масса тела;

v_1, v_2 – начальная и конечная скорости тела.

Емкость – это физическая величина, численно равная заряду q , который необходимо сообщить проводнику (системе проводников), чтобы увеличить потенциал φ на 1 В.

Формулы емкостей:

– уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi};$$

– двух проводников

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{q}{U},$$

где U – разность потенциалов проводников.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot S}{d},$$

где S – площадь одной пластины (обкладки) конденсатора;

d – расстояние между пластинами.

Емкость батареи конденсаторов:

– при последовательном соединении $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$;

– при параллельном соединении $C = \sum_{i=1}^N C_i$,

где N – число конденсаторов в батарее.

При зарядке проводника (системы проводников) необходимо совершить определенную работу против силы возникающего электрического поля. Совер-

шенная работа превращается в энергию этого поля.

Энергия заряженного конденсатора определяется формулами:

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2}; \quad W = \frac{q^2}{2C}; \quad W = \frac{q \cdot U}{2}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – Три точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

Дано:	Решение
$q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-9}$ Кл	Все три заряда, расположенные в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например q_1 , находился в равновесии.
$a = b = c = r$	
$q_4 = ?$	

Заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил $\vec{F}_4$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ равна нулю (рисунок 3):

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0,$$

где $\vec{F}_4$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ – силы, с которыми на заряд q_1 действуют заряды q_4 , q_2 , q_3 соответственно;

$\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.

Так как силы F и F_4 лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны, то векторное равенство можно заменить скалярным: $F - F_4 = 0$, откуда $F_4 = F$. Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}.$$

Применив закон Кулона и учитывая то, что $q_1 = q_2 = q_3$, найдем силу

$$F_4 = \frac{q_1 \cdot q_4}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \sqrt{2 \cdot (1 + \cos \alpha)},$$

откуда

$$q_4 = \frac{q_1 \cdot r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Так как треугольник равносторонний, то

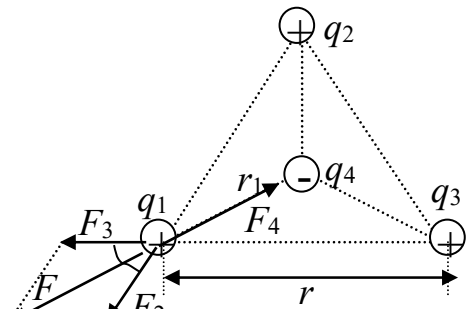


Рисунок 3

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2.$$

С учетом последних соотношений окончательная формула примет следующий вид:

$$q_4 = q_1 / \sqrt{3}.$$

Произведем вычисления:

$$q_4 = 10^{-9} / \sqrt{3} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

Следует отметить, что равновесие системы будет неустойчивым.

Пример 2 – На тонком стержне длиной $l = 20$ см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $q_1 = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность заряда на стержне.

Дано:	Решение
$l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$	Сила взаимодействия F заряженного стержня с зарядом q_1 зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить τ . При вычислении силы F следует иметь в виду, что заряд стержня не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом.
$a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$	
$q_1 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$	
$F = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$	
$\tau - ?$	

Выделим на стержне (рисунок 4) малый участок dr с зарядом $dq = \tau \cdot dr$. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона,

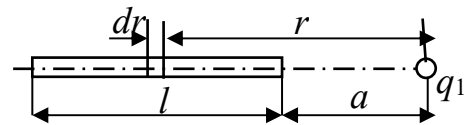


Рисунок 4

$$dF = \frac{q_1 \cdot \tau \cdot dr}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от a до $a + l$

$$F = \frac{q_1 \cdot \tau}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 \cdot \tau}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{q_1 \cdot \tau \cdot l}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot (a+l)}.$$

Тогда для искомой величины получим

$$\tau = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot (a+l) \cdot F}{q_1 \cdot l}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу линейной плотности электрического заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[\varepsilon_0] \cdot [a] \cdot [a+l] \cdot [F]}{[q] \cdot [l]} = \frac{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м}} =$$

$$= \frac{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл}} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ В}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{Кл}}{1 \text{ Н} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Кл/м}.$$

Найденная единица является единицей линейной плотности заряда. Произведем вычисления:

$$\tau = \frac{0,1 \cdot (0,1 + 0,2) \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}.$$

Пример 3 – Электрическое поле создано длинным равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20 \text{ нКл/м}$ цилиндром радиусом $R = 1 \text{ см}$. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0,5 \text{ см}$ и $a_2 = 2 \text{ см}$ от поверхности цилиндра в средней его части.

Дано:

$$R = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\tau = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}$$

$$a_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$a_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = ?$$

Решение

Для определения разности потенциалов воспользуемся формулой, которая связывает напряженность поля с изменением потенциала:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Для поля с осевой симметрией, каким является

поле цилиндра, это соотношение можно записать как

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = -E dr. \quad (1)$$

Интегрируя выражение (1), найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (2)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) для разности потенциалов, получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Произведем вычисления, учитывая то, что величины r_1 и r_2 , входящие в формулу в виде отношения, можно выразить в сантиметрах ($r_1 = R + a_1 = 1,5$ см, $r_2 = R + a_2 = 3$ см).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \cdot \ln(3 / 1,5) = 250 \text{ В.}$$

Пример 4 – На трех концентрических сферах радиусами R , $2R$ и $3R$ распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 , σ_2 и σ_3 . Используя теорему Гаусса, найти зависимость $E(r)$ напряженности электрического поля от расстояния для областей 1, 2, 3 и 4 (принять $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma = 25$ мКл/м², $\sigma_2 = -25$ мКл/м²).

Построить график зависимости $E(r)$.

Дано:	Решение
$R, 2R, 3R$	Теорема Гаусса гласит, что в вакууме поток вектора E через любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, которые охватываются этой поверхностью , деленной на электрическую постоянную ε_0 .
$\sigma_1 = \sigma_3 = 25 \text{ мКл/м}^2$	
$\sigma_2 = -25 \text{ мКл/м}^2$	
$E(r) - ?$	

Математическая запись этой теоремы имеет вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

где $\vec{n}$ – нормаль к элементу поверхности dS ;

q – алгебраическая сумма зарядов.

Если выбранная поверхность не охватывает заряды, то поток вектора E через такую поверхность равен нулю.

По теореме поверхность (**гауссова поверхность**) может иметь любые форму и размер. Поэтому при расчетах стараются выбрать простые поверхности (сферическую, цилиндрическую и т. д.).

Если заряд точечный или сферы концентрические заряженные, то их окружают сферической поверхностью с радиусом r . Тогда интегрирование приводит к следующей формуле для потока:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E \cdot 4\pi \cdot r^2.$$

По теореме этот поток равен заряду q , деленному на ε_0 :

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Из последнего выражения получим формулу для напряженности:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2}. \quad (4)$$

Еще раз уточним, что в формуле (4) величина q – алгебраическая сумма зарядов, которые охватывает проведенная гауссова поверхность, а величина r – радиус этой гауссовой поверхности.

Условию задачи соответствует рисунок 5.

Заряженные сферы показаны сплошными, а гауссовы поверхности в областях 1, 2, 3, 4 – пунктирными линиями.

Используя формулу (4), получим зависимости напряженности поля от расстояния в каждой из областей.

Область 1.

Из рисунка видно, что в области 1 поверхность радиуса $r_1 < R$ не охватывает заряды. По теореме Гаусса поток вектора E через эту поверхность равен нулю и напряженность поля в области 1 равна нулю ($E(r_1) = 0$).

Область 2.

Значение радиуса гауссовой поверхности, проведенной в области 2, лежит в пределах

$$R \leq r_2 \leq 2R,$$

поэтому эта поверхность охватывает только заряд первой сферы. По формуле (4) для напряженности в области 2 получим следующую зависимость:

$$E(r_2) = \frac{q_1}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_2^2}, \quad (5)$$

где q_1 – заряд первой сферы радиуса R .

В условии задачи дана поверхностная плотность заряда σ_1 , которая связана с зарядом формулой

$$q_1 = \sigma_1 \cdot 4\pi \cdot R^2. \quad (6)$$

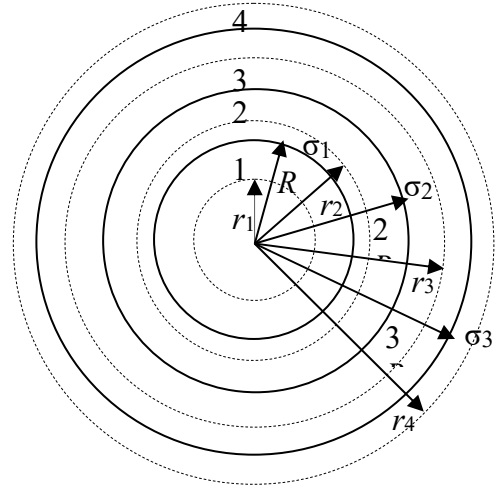


Рисунок 5

Подставив (6) в (5), получим расчетную формулу для области 1:

$$E(r_2) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r_2} \right)^2.$$

Подставив численные значения величин, получим, что в этой области напряженность поля изменяется от $E(R) = 2,82 \cdot 10^9$ В/м при $r_1 = R$ до $E(2R) = 0,73 \cdot 10^9$ В/м при $r_1 = 2R$.

Область 3.

В области 3 радиус гауссовой поверхности лежит в пределах $2R \leq r_3 \leq 3R$. Следовательно, эта поверхность охватывает заряды двух первых заряженных сфер.

По теореме Гаусса в правую часть формулы (4) следует подставить алгебраическую сумму (с учетом знаков) зарядов первой и второй сфер. Поэтому формула (4) запишется в следующем виде:

$$E(r_3) = \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_3^2}. \quad (7)$$

С помощью (6) выразив заряды сфер q_1 и q_2 через поверхностные плотности σ_1 и σ_2 и радиусы сфер R и $2R$ и подставив в (7), получим зависимость напряженности от расстояния в области 3:

$$E(r_3) = -\frac{3 \cdot \sigma}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r_3} \right)^2. \quad (8)$$

Подставив в (8) значения, получим, что в этой области напряженность поля изменяется от $E(2R) = -2,22 \cdot 10^9$ В/м при $r_3 = 2R$ до $E(3R) = -0,94 \cdot 10^9$ В/м при $r_3 = 3R$.

Область 4.

Гауссова поверхность, проведенная в области 4, охватывает заряды всех трех сфер ($r_4 \geq 3R$). Поэтому формула (4) запишется в следующем виде:

$$E(r_4) = \frac{q_1 - q_2 + q_4}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_4^2}. \quad (9)$$

Применив формулу (6), приведем выражение (9) к виду

$$E(r_4) = \frac{6 \cdot \sigma}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r_4} \right)^2.$$

Подставляя численные значения величин, получим значения напряженности на различных расстояниях от сферы 3. В частности, вблизи этой сферы ($r_4 = 3R$) напряженность $E(3R)$ равна $1,88 \cdot 10^9$ В/м.

При известных зависимостях $E(r)$ построение графиков не представляет сложности.

Пример 5 – Определить ускоряющую разность потенциалов U , которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n = 2$ раза.

Дано:	Решение
$v_1 = 10^6$ м/с $n = 2$ $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг $U = ?$	Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу A сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда e на разность потенциалов U: $A = e \cdot U. \quad (10)$

Работа сил электрического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{m_e \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_e \cdot v_1^2}{2}, \quad (11)$$

где T_1 , T_2 – кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля;

m_e – масса электрона;

v_1 , v_2 – начальная и конечная скорости электрона.

Приравняв правые части равенств (10) и (11), получим

$$e \cdot U = \frac{m_e \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_e \cdot v_1^2}{2} = \frac{m_e \cdot n^2 \cdot v_1^2}{2} - \frac{m_e \cdot v_1^2}{2},$$

где $n = v_2 / v_1$.

Отсюда искомая разность потенциалов

$$U = \frac{m_e \cdot v_1^2 \cdot (n^2 - 1)}{2e}.$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) = 8,53 \text{ В}.$$

Пример 6 – Определить, как распределится напряжение 120 В между тремя последовательно соединенными конденсаторами, имеющими емкости 0,3; 0,2 и 0,12 мкФ.

Дано:	Решение
$U = 120 \text{ В}$ $C_1 = 0,3 \text{ мкФ}$ $C_2 = 0,2 \text{ мкФ}$ $C_3 = 0,12 \text{ мкФ}$ $U_1, U_2, U_3 - ?$	Для решения задачи используем общую формулу для емкости конденсатора $C = \frac{q}{U} \quad (12)$

и формулу емкости батареи последовательно включенных конденсаторов

$$\frac{1}{C_{\text{бат}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (13)$$

Также учтем, что при последовательном соединении заряд каждого из конденсаторов равен заряду батареи $q_{\text{бат}} = q_i$.

Согласно (12), напряжения на батарее

$$U_{\text{бат}} = \frac{q_{\text{бат}}}{C_{\text{бат}}}, \quad (14)$$

на отдельных конденсаторах

$$U_i = \frac{q_i}{C_i}. \quad (15)$$

Из формулы (14) для заряда батареи получим

$$q_{\text{бат}} = C_{\text{бат}} \cdot U_{\text{бат}}. \quad (16)$$

Формула (16) является основной и поэтому ее размерность можно не проверять.

Вычислив по формуле (13) емкость батареи ($C_{\text{бат}} = 0,06 \text{ мкФ}$) и подставив это значение в (16), определим заряд батареи $q_{\text{бат}} = 7,2 \text{ мкКл}$. Таким же будет заряд каждого конденсатора: $q_1 = q_2 = q_3 = 7,2 \text{ мкКл}$.

Затем, подставляя известные значения емкостей конденсаторов в (15), вычислим искомые напряжения:

$$U_1 = 7,2 / 0,3 = 24 \text{ В}; \quad U_2 = 7,2 / 0,2 = 36 \text{ В};$$

$$U_3 = 7,2 / 0,12 = 60 \text{ В}.$$

Пример 7 – Конденсатор емкостью $C_1 = 3 \text{ мкФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40 \text{ В}$. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5 \text{ мкФ}$. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

<i>Дано:</i>	<i>Решение</i>
$C_1 = 3 \text{ мкФ} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$	Энергия, израсходованная на образование искры,
$U_1 = 40 \text{ В}$	$W' = W_1 - W_2,$
$C_2 = 5 \text{ мкФ} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$	где W_1 – энергия, которой обладал первый конденса-
$W' = ?$	тор до присоединения к нему второго конденсатора;
	W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.
	Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = C \cdot U^2 / 2,$$

где C – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив энергии W_1 и W_2 через емкости и приняв во внимание то, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = C_1 \cdot U_1^2 / 2 - (C_1 + C_2) \cdot U_2^2 / 2, \quad (17)$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что исходный заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot U_1}{C_1 + C_2}. \quad (18)$$

Подставив выражение (18) в формулу (17) для W' , найдем

$$W' = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_1^2 \cdot U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_1^2.$$

Произведем вычисления:

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 = 1,5 \text{ мДж}.$$

3.2 Постоянный электрический ток

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Характеристиками тока являются сила I и плотность j . Ток с неизменными силой и направлением называется постоянным.

Сила постоянного тока определяется следующим выражением:

$$I = \frac{q}{t},$$

где q – заряд, который прошел через поперечное сечение проводника за время t .

Плотность постоянного тока вычисляется по формуле

$$j = \frac{I}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Связь плотности тока со средней скоростью $\bar{v}$ направленного движения заряженных частиц:

$$j = q \cdot n \cdot \bar{v},$$

где n – концентрация заряженных частиц;

q – заряд частицы.

Если электрические цепи неразветвленные, то задачи решаются с помощью законов Ома.

Закон Ома в дифференциальной форме позволяет определить плотность тока в любой точке, где известна напряженность поля.

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E},$$

где $\vec{j}$ – плотность тока;

γ – удельная проводимость;

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Связь удельной проводимости γ с подвижностью b заряженных частиц (ионов):

$$\gamma = q \cdot n \cdot (b_+ + b_-),$$

где q – заряд иона;

n – концентрация ионов;

b_+ и b_- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Законы Ома в интегральной форме определяют силу тока в цепи:

– **участок цепи, не содержащий ЭДС** (однородный участок) (рисунок 6),

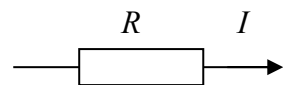


Рисунок 6

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи,
 $\varphi_1 - \varphi_2 = U$;

R – электрическое сопротивление участка;

– **участок цепи, содержащий ЭДС** (неоднородный участок),

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R},$$

где ε – ЭДС источника тока; знак «+» выбирается, если ЭДС совпадает с

направлением тока, «—» — если не совпадает.

R — полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

— **замкнутая (полная) цепь** (рисунок 7)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

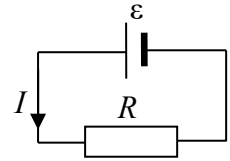


Рисунок 7

где R — сопротивление нагрузки (потребителя);

r — внутреннее сопротивление (источника тока).

Если цепи разветвленные, то их условно разбивают на узлы и контуры, и расчеты проводят с помощью правил Кирхгофа.

Правила Кирхгофа для электрических цепей:

— правило для узла — $\sum I_i = 0$;

— правило для контура — $\sum I_i \cdot R_i = \sum \varepsilon_i$,

где $\sum I_i$ — алгебраическая сумма сил токов в узле;

$\sum I_i \cdot R_i$ — алгебраическая сумма произведений сил токов на отдельных участках контура и сопротивлений этих участков;

$\sum \varepsilon_i$ — алгебраическая сумма ЭДС в контуре.

Сопротивление R и проводимость G проводника определяются следующими формулами:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}; \quad G = \frac{\gamma \cdot S}{l},$$

где ρ — удельное сопротивление;

γ — удельная проводимость;

l — длина проводника;

S — площадь поперечного сечения проводника.

Зависимость сопротивления проводника от температуры

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t),$$

где R_0 — сопротивление проводника при нулевой температуре;

α — температурный коэффициент сопротивления;

t — температура.

Сопротивление системы проводников:

— при последовательном соединении

$$R = \sum R_i;$$

— при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i},$$

где R_i – сопротивление i -го проводника.

При последовательном соединении источников тока в батарею складываются как их ЭДС

$$\varepsilon_{\text{бат}} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i,$$

так и внутренние сопротивления

$$r_{\text{бат}} = \sum_{i=1}^N r_i.$$

Параллельное соединение N источников ЭДС используется, как правило, только для одинаковых источников. В этом случае ЭДС батареи равна ЭДС одного источника ($\varepsilon_{\text{бат}} = \varepsilon_1$), а внутреннее сопротивление батареи $r_{\text{бат}} = r_1 / N$.

Работа электрического тока определяется следующими формулами:

– для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U ,

$$A = I \cdot U \cdot t,$$

– для участка, не содержащего ЭДС,

$$A = I^2 \cdot R \cdot t; \quad A = \frac{U^2}{R} \cdot t,$$

где I – сила тока;

U – напряжение;

t – время протекания тока.

Мощность тока

$$P = I \cdot U; \quad P = I^2 \cdot R; \quad P = U^2 / R.$$

Если по проводнику протекает электрический ток, то проводник будет нагреваться. Количество теплоты Q , которое выделится в проводнике, определяется **законом Джоуля – Ленца**:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t,$$

где I – сила тока в проводнике;

R – электрическое сопротивление проводника;

t – время протекания тока.

Примеры решения задач

Пример 8 – К источнику, имеющему внутреннее сопротивление 2 Ома и ЭДС, равную 12 В, подключены конденсатор емкостью $C = 15$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 22$ Ом, как показано на рисунке 8.

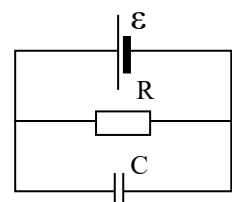


Рисунок 8

Чему равен заряд на конденсаторе?

Дано:	Решение
$r = 2 \text{ Ом}$	Заряд конденсатора определяется по формуле
$\varepsilon = 12 \text{ В}$	
$C = 15 \text{ мкФ}$	
$R = 22 \text{ Ом}$	
$q = ?$	$q = C \cdot U, \quad (19)$ где U – напряжения на обкладках конденсатора. Так как конденсатор подключен параллельно сопротивлению, U равно падению напряжения на сопротивлении R. Это падение напряжения определим с помощью закона Ома для участка цепи:

$$U = I \cdot R, \quad (20)$$

а силу тока I в цепи – законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (21)$$

где ε – ЭДС;

r – внутреннее сопротивление источника тока.

Подставив (21) в (20) и затем в (19), получим формулу для искомой величины:

$$q = \frac{C \cdot \varepsilon \cdot R}{R + r}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[q] = \frac{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ Ом}}{1 \text{ Ом}} = 1 \text{ Кл}.$$

Произведем вычисления:

$$q = \frac{15 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 22}{22 + 2} = 165 \text{ мкКл}.$$

Пример 9 – Батарея аккумуляторов, соединенных последовательно, имеет ЭДС 12 В. Ток в цепи – 4 А, а напряжение на зажимах – 11 В. Определить ток короткого замыкания этой батареи.

Дано:	Решение
$\varepsilon = 12 \text{ В}$	Сила тока в цепи равна силе тока короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ при внешнем сопротивлении, равном 0. Из формулы закона Ома для полной цепи
$U = 11 \text{ В}$	
$I = 4 \text{ А}$	
$I_{\text{кз}} = ?$	

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \quad (22)$$

получим

$$I_{\kappa\lambda} = \frac{\varepsilon}{r}, \quad (23)$$

где ε – ЭДС;

r – внутреннее сопротивление источника;

R – сопротивление нагрузки.

Напряжение на зажимах источника определяется как произведение силы тока и сопротивления нагрузки: $U = I \cdot R$. Для этого напряжения из (22) получим

$$U = I \cdot R = \varepsilon - I \cdot r. \quad (24)$$

Выразив из (24) внутреннее сопротивление и подставив его в (23), получим формулу для искомой величины:

$$I_{\kappa\lambda} = \frac{\varepsilon \cdot I}{\varepsilon - U}.$$

Размерность полученной формулы очевидна.

Подставив в эту формулу значения величин, получим

$$I_{\kappa\lambda} = \frac{12 \cdot 4}{12 - 11} = 48 \text{ A}.$$

Пример 10 – Аккумулятор с ЭДС, равной 12 В, и внутренним сопротивлением 1 Ом заряжается при силе тока 3 А.

Найти напряжение на клеммах аккумулятора.

Дано:	Решение
$\varepsilon = 12 \text{ В}$ $r = 1 \text{ Ом}$ $I = 3 \text{ А}$ $U = ?$	В общем случае сила I зарядного тока определяется обобщенным законом Ома для неоднородного участка цепи: $I = \frac{U - \varepsilon}{r + R},$

где U – напряжение на клеммах аккумулятора;

ε – ЭДС;

r – внутреннее сопротивление аккумулятора;

R – внешнее сопротивление (сопротивление проводов).

Для зарядки аккумуляторов используются провода с малым сопротивлением (толстые провода). Поэтому сила зарядного тока определяется формулой

$$I = \frac{U - \varepsilon}{r}.$$

Откуда

$$U = \varepsilon + I \cdot r.$$

Найдем численной значение искомой величины:

$$U = 12 + 3 \cdot 1 = 15 \text{ В.}$$

Пример 11 – Как изменится температура медного стержня, если по нему в течение 0,5 с будет проходить ток, плотность которого 9 А/мм²?

Дано:	Решение
$t = 0,5 \text{ с}$	Проводник нагревается за счет джоулевой теплоты. Поэтому для решения задачи следует применить закон Джоуля – Ленца $Q = I^2 \cdot R \cdot t.$ Уравнение теплового баланса в этом случае запишется в следующем виде:
$j = 9 \text{ А/мм}^2 = 9 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$	
$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$	
$\rho_{эл} = 17 \cdot 10^{-9} \text{ Ом/м}$	
$c = 390 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$	
$\Delta T - ?$	

$$I^2 \cdot R \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T,$$

где I – сила тока в проводнике;

R – сопротивление проводника;

t – время протекания тока;

c – удельная теплоемкость материала проводника;

m – масса проводника;

ΔT – изменение температуры проводника за время t .

Из формулы теплового баланса выразим искомую величину:

$$\Delta T = \frac{I^2 \cdot R \cdot t}{m \cdot c}. \quad (25)$$

Выразим неизвестные величины через известные:

$$\frac{I^2 \cdot R}{m} = \frac{j^2 \cdot S^2 \cdot \rho_{эл} \cdot \frac{l}{S}}{\rho \cdot l \cdot S} = \frac{j^2 \cdot \rho_{эл}}{\rho}, \quad (26)$$

где j – плотность тока;

S – площадь сечения проводника;

l – длина проводника;

ρ – плотность материала проводника;

$\rho_{эл}$ – удельное сопротивление проводника.

Подставив (26) в (25), получим

$$\Delta T = \frac{j^2 \cdot \rho_{эл} \cdot t}{\rho \cdot c}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[\Delta T] = \frac{\left(1 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}\right)^2 \cdot 1 \text{ Ом} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ с}}{1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}} = \frac{1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с}}{1 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}} = 1 \text{ К}.$$

Найдем численное значение величины:

$$\Delta T = \frac{9^2 \cdot 10^{12} \cdot 17 \cdot 10^{-9} \cdot 0,5}{8,9 \cdot 10^3 \cdot 390} \approx 0,2 \text{ К}.$$

3.3 Электромагнетизм

Магнитное поле – это силовое поле, которое возникает вокруг любого движущегося заряда и проявляется в действии на другие движущиеся заряды. Основной характеристикой магнитного поля является магнитная индукция B . Расчеты магнитной индукции проводят с помощью **закона Био – Савара – Лапласа**.

Закон Био – Савара – Лапласа определяет индукцию $d\vec{B}$ магнитного поля, создаваемую элементом $d\vec{l}$ проводника с током I в некоторой точке A , положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рисунок 9).

Формулы закона в векторной и скалярной

формах:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3}; \quad dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \sin \alpha}{4\pi \cdot r^2} \cdot dl,$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция, которую создает элемент проводника длиной dl с током I в некоторой точке A пространства;

$\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента проводника в точку A , в которой определяется магнитная индукция;

α – угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе проводника;

μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$;

μ – магнитная проницаемость среды, где находится проводник.

Направление вектора магнитной индукции определяется по правилу правого винта.

Магнитная индукция, создаваемая проводниками с различными формой и размером, определяется интегрированием по всей длине проводника. Далее приводятся результаты интегрирования для разных проводников.

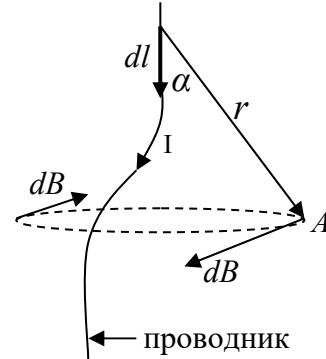


Рисунок 9

Магнитная индукция в центре кругового витка с током

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2R},$$

где R – радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового витка с током

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot I}{(R^2 + a^2)^{3/2}},$$

где a – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника с током (рисунок 10),

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Обозначения представлены на рисунке 10. Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что вектор $\vec{B}$ направлен к нам перпендикулярно плоскости чертежа.

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (см. рисунок 10),

$$-\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha,$$

тогда

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \cdot \cos \alpha.$$

Магнитная индукция поля длинного прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_0},$$

где r_0 – расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Соленоидом называется катушка, намотанная на длинный цилиндрический каркас.

Магнитная индукция поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N}{l} \cdot I,$$

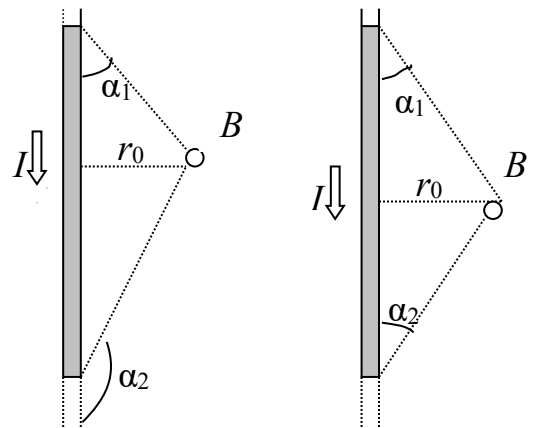


Рисунок 10

где N – число витков;

l – длина соленоида.

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость изотропной среды.

Если к незакрепленному проводнику с током поднести постоянный магнит, то проводник будет смещаться. Сила, которая действует в этом случае на проводник, определяется **законом Ампера**.

Если проводник с током прямолинейный и магнитное поле однородное, то формула закона Ампера имеет следующий вид:

$$\vec{F} = I \cdot [\vec{l} \times \vec{B}] \text{ или } F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha,$$

где l – длина проводника;

α – угол между направлением тока в проводнике и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

Направление силы Ампера определяется правилом левой руки.

Если поле неоднородно и проводник не является прямым, то закон Ампера записывается для элемента $d\vec{l}$ проводника как

$$d\vec{F} = I \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}].$$

Силу, действующую на весь проводник, определяют интегрированием:

$$\vec{F} = \int d\vec{F}.$$

За счет силы Ампера проводник с током занимает определенное положение в магнитном поле.

Механический (вращательный) момент M , действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}] \text{ или } M = p_m B \sin \alpha,$$

где $\vec{p}_m$ – магнитный момент контура с током;

$\vec{B}$ – магнитная индукция поля;

α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура;

I – сила тока, протекающего по контуру;

S – площадь, охватываемая контуром.

Потенциальная энергия (механическая) контура с током в магнитном поле

$$\Pi_{\text{МЭХ}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \text{ или } \Pi_{\text{МЭХ}} = -p_m \cdot B \cdot \cos \alpha.$$

Сила Лоренца – это сила, которая действует на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B .

$$\vec{F} = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] \text{ или } F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

где $\vec{v}$ – скорость заряженной частицы;

α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется правилом левой руки, и эта сила всегда перпендикулярна скорости частицы. Поэтому сила Лоренца является центростремительной и справедливо следующее соотношение:

$$q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

где m – масса частицы;

R – радиус кривизны траектории.

Если частица движется перпендикулярно силовым линиям ($\vec{v} \perp \vec{B}$) однородного магнитного поля ($B = \text{const}$), то траектория представляет собой окружность радиусом R .

Закон полного тока для магнитного поля позволяет определить магнитную индукцию, которая создается системой проводников.

Закон формулируется следующим образом: циркуляция $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру L равна магнитной постоянной μ_0 , умноженной на алгебраическую сумму токов I_i , которые охватываются данным контуром:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n I_i.$$

Например, если контур охватывает три проводника с токами I_1 и I_2 , направленными в одну сторону, и током I_3 , направленным в противоположную сторону, то алгебраическая сумма токов

$$\sum_{i=1}^3 I_i = I_1 + I_2 - I_3.$$

Если выбранный контур не охватывает проводников с током, то циркуляция вектора B по такому контуру равна нулю.

Магнитный поток равен числу линий магнитной индукции, которые пересекают данную поверхность.

Если магнитное поле однородное и поверхность плоская, то магнитный поток

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

где S – площадь контура;

α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции.

В общем случае, если поле неоднородное и форма поверхности произвольная, то поток через нее определяют интегрированием:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу dS поверхности.

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле вычисляется по формуле

$$A = I \cdot \Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ – магнитный поток через поверхность, которую очерчивает проводник при своем движении (число силовых линий, которые пересекает проводник).

Электромагнитная индукция – это явление возникновения ЭДС в контуре при изменении магнитного потока через его поверхность.

ЭДС индукции определяется **законом электромагнитной индукции**

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ или } \varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Если взять производную по времени от магнитного потока, то можно получить формулу для ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\left(\frac{dB}{dt} \cdot S \cdot \cos \alpha + \frac{dS}{dt} \cdot B \cdot \cos \alpha + \frac{d}{dt}(\cos \alpha) \cdot B \cdot S \right).$$

Первое слагаемое полученной формулы определяет ЭДС, которая возникает при изменении индукции магнитного поля, второе слагаемое связано с изменением площади контура, третье слагаемое характеризует ЭДС, возникающую при изменении положения контура.

Частным случаем электромагнитной индукции является возникновение **разности потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле**. Эта разность потенциалов определяется следующей формулой:

$$U = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha,$$

где B – индукция магнитного поля;

l – длина проводника;

v – скорость проводника;

α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Заряд q , протекающий по замкнутому контуру (катушке) при изменении магнитного потока $\Delta\Phi$, пронизывающего этот контур (катушку):

$$q = \Delta\Phi / R \text{ или } q = N \cdot \Delta\Phi / R,$$

где N – число витков катушки;

R – электрическое сопротивление контура (катушки).

Самоиндукция – это частный случай электромагнитной индукции.

Самоиндукция – это явление возникновения ЭДС (индукционного тока) в контуре, по которому течет переменный ток.

В этом случае магнитный поток Φ через контур определяется силой тока I , протекающего по контуру:

$$\Phi = L \cdot I,$$

где L – индуктивность.

Формула для *индуктивности соленоида* имеет вид:

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S,$$

где μ – магнитная проницаемость среды;

μ_0 – магнитная постоянная;

N – число витков на длине l соленоида;

S – площадь витка.

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_c = -L \cdot \frac{dI}{dt}.$$

По правилу Ленца индукционный ток во всех случаях препятствует изменению основного тока. Это приводит к замедлению нарастания силы тока при замыкании и ее убывания при размыкании цепи.

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L :

– при замыкании цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{Rt/L}),$$

где ε – ЭДС источника тока;

t – время, прошедшее с момента замыкания цепи;

– при размыкании цепи

$$I = I_0 \cdot e^{-Rt/L},$$

где I_0 – сила тока в цепи в момент размыкания (при $t = 0$);

t – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

При прохождении электрического тока по проводнику часть энергии источника тока переходит в энергию магнитного поля.

Энергия магнитного поля проводника с током

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему)

$$w = \frac{B \cdot H}{2}; \quad w = \frac{B^2}{2\mu \cdot \mu_0} \quad \text{или} \quad w = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot H^2}{2},$$

где B – магнитная индукция;

H – напряженность магнитного поля.

Примеры решения задач

Пример 12 – Два параллельных бесконечно длинных провода D и C , по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого проводниками с током в точке A (рисунок 11), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

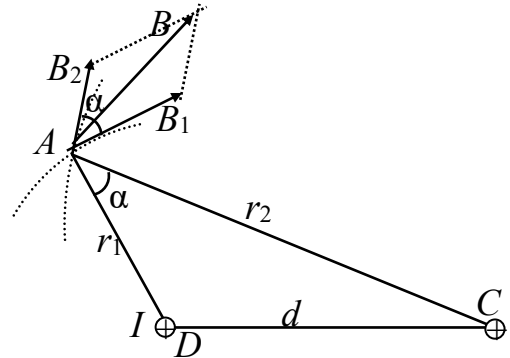


Рисунок 11

Дано:

$$I = 60 \text{ А}$$

$$d = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$r_1 = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_2 = 12 \text{ см} = 0,12 \text{ м}$$

$$B = ?$$

Решение

Для нахождения магнитной индукции B в точке A воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций B_1 и B_2 полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Модуль вектора $\vec{B}$ может быть найден по теореме косинусов:

$$|\vec{B}| = B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (27)$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Магнитные индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ выражаются через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводника до точки A соответственно:

$$B_1 = \mu_0 \cdot I / (2\pi \cdot r_1); \quad B_2 = \mu_0 \cdot I / (2\pi \cdot r_2).$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (27) и вынеся $\mu_0 \cdot I / (2\pi)$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 \cdot r_2} \cos \alpha}.$$

Вычислим $\cos \alpha$. Заметив, что α – это угол DAC , по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cos \alpha,$$

где d – расстояние между проводами.

Откуда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 \cdot r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \cdot \frac{23}{40}} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Пример 13 – Короткая катушка, содержащая $N = 10^3$ витков, равномерно вращается с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси AB , лежащей в плоскости катушки и перпендикулярной линиям однородного магнитного поля ($B = 0,04 \text{ Тл}$). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля. Площадь катушки $S = 100 \text{ см}^2$.

Дано:	Решение
$N = 10^3$ $n = 10 \text{ с}^{-1}$ $B = 0,04 \text{ Тл}$ $\alpha = 60^\circ$ $S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$ $\varepsilon = ?$	Мгновенное значение ЭДС индукции ε определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла: $\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (28)$

а потокосцепление $\psi = N\Phi$, где N – число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ . Подставив выражение ψ в формулу (28), получим

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (29)$$

При вращении катушки магнитный поток Φ , пронизывающий катушку в момент времени t , изменяется по закону

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

где B – магнитная индукция;

S – площадь катушки;

ω – угловая скорость катушки.

Подставив выражение для магнитного потока Φ в (29) и продифференцировав полученную формулу по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Учитывая то, что угловая скорость ω связана с частотой вращения n катушки соотношением $\omega = 2\pi \cdot n$ и угол $\omega \cdot t = \pi / 2 - \alpha$, получим

$$\varepsilon = 2\pi \cdot n \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \sin(\pi / 2 - \alpha) = 2\pi \cdot n \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Произведем анализ размерности:

$$\varepsilon = [n] \cdot [B] \cdot [S] = \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}.$$

Произведем вычисления:

$$\varepsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = 25,1 \text{ В}.$$

Пример 14 – Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4 \text{ А}$ магнитный поток $\Phi = 6 \text{ мкВб}$. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Дано:	Решение
$N = 1200$	Индуктивность L связана с потоко- сцеплением ψ и силой тока I соотношением
$I = 4 \text{ А}$	
$\Phi = 6 \text{ мкВб} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$	
$L, W - ?$	$\psi = L \cdot I.$ (30)

Потоко-сцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\psi = N \cdot \Phi. \quad (31)$$

Приравняв (30) и (31), найдем формулу для индуктивности соленоида:

$$L = N \cdot \Phi / I. \quad (32)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = L \cdot I^2 / 2. \quad (33)$$

Подставив в формулу (33) вместо индуктивности выражение (32), получим формулу для расчета энергии соленоида:

$$W = N \cdot \Phi \cdot I / 2.$$

Произведем вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

3.4 Колебания и волны

Колебание – это процесс, который повторяется с течением времени.

При гармонических колебаниях значения физических величин изменяются по закону синуса или косинуса.

Кинематика колебаний описывается **кинематическим уравнением гармонических колебаний**, которое имеет вид:

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где S – мгновенное значение колеблющейся величины, при механических колебаниях S – смещение от положения равновесия;

A – амплитуда колебания (максимальное значение величины S);

$(\omega \cdot t + \varphi_0)$ – фаза колебания;

ω – угловая или циклическая частота колебания;

φ_0 – начальная фаза колебания.

Динамика колебаний описывается следующим **дифференциальным уравнением незатухающих гармонических колебаний**:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot S = 0.$$

Решением этого уравнения является приведенное выше кинематическое уравнение.

Быстрота изменения колеблющейся величины определяется **скоростью v и ускорением a** , которые вычисляются по формулам:

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0);$$

$$a(t) = \frac{d^2 S}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где $A \cdot \omega$ – амплитудное (максимальное) значение скорости;

$A \cdot \omega^2$ – амплитудное (максимальное) значение ускорения.

Следует иметь в виду, что приведенными уравнениями описываются как механические, так и электромагнитные колебания. Например, при электрических колебаниях первая производная от уравнения колебания заряда дает урав-

нение колебания силы тока:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

При сложении гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты результирующее колебание также является гармоническим. При этом амплитуда и фаза колебания определяются следующим образом:

– *амплитуда результирующего колебания*

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

– *начальная фаза результирующего колебания*

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

где $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ – амплитуды и фазы складываемых колебаний.

Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = A_1 \cos(\omega \cdot t)$; $y = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, описывается уравнениями:

- $y = \frac{A_1}{A_2} x$, если разность фаз $\varphi = 0$;
- $y = -\frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = \pm \pi$;
- $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, если разность фаз $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Волновой процесс (волна) – это процесс распространения колебаний в пространстве.

Уравнение плоской (бегущей) синусоидальной волны имеет вид:

$$S(x, t) = A \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \text{ или } S(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x),$$

где $S(x, t)$ – мгновенное значение смещения любой точки среды от ее положения равновесия;

x – расстояние от источника волны до рассматриваемой точки;

v – скорость распространения волны в среде;

k – волновое число, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (где λ – длина волны);

$(\omega \cdot t - k \cdot x)$ – фаза колебания точки среды.

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны, находящихся друг от друга на расстоянии Δx , отсчитанном в направлении распространения волны, определяется как

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x,$$

где λ – длина волны.

Наложение когерентных волн.

Когерентными называются волны с постоянной во времени разностью фаз.

Когерентными являются гармонические волны с одинаковыми частотами (длинами волн).

При наложении когерентных волн в одних точках пространства они взаимно усиливают, а в других ослабляют друг друга. То есть происходит перераспределение энергии волн в пространстве. Это явление называется интерференцией волн.

Результат наложения волн зависит от разности их хода Δx , с которой они приходят в данную точку.

Условие усиления волн.

Если разность хода

$$\Delta x = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

то в точку наложения волны приходят с одинаковыми фазами и усиливают друг друга. Величина m называется номером максимума.

Условие ослабления волн.

Если разность хода

$$\Delta x = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

то в точку наложения волны приходят с противоположными фазами и ослабляют друг друга. Величина m называется номером минимума.

Примеры решения задач

Пример 15 – Частица массой $m = 0,01$ кг совершает гармонические колебания с периодом $T = 2$ с. Полная энергия колеблющейся частицы $E = 0,1$ мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы $F_{\max}$, действующей на частицу.

Дано:	Решение
$m = 0,01$ кг $T = 2$ с $E = 10^{-4}$ Дж $A, F_{\max} - ?$	Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением для полной энергии частицы $E = m \cdot \omega^2 \cdot A^2 / 2,$ где $\omega = 2\pi / T$.

Отсюда для амплитуды получим

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -k \cdot x$, где k – коэффициент квазиупругой силы; x – смещение колеблющейся точки. Сила будет максимальной при максимальном смещении $x_{\max}$, равном амплитуде:

$$F_{\max} = k \cdot A.$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m \cdot \omega^2 = 4\pi^2 \cdot m / T^2.$$

Подставив выражения для полной энергии и коэффициента k в формулу для амплитуды и произведя упрощения, получим

$$F_{\max} = 2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot E} / T.$$

Проведем анализ размерности:

$$\begin{aligned} [F_{\max}] &= \frac{[m \cdot E]^{1/2}}{T} = \frac{1 \text{ кг}^{1/2} \cdot 1 \text{ Дж}^{1/2}}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ кг}^{1/2} \cdot 1 \text{ Н}^{1/2} \cdot 1 \text{ м}^{1/2}}{1 \text{ с}} = \\ &= 1 \text{ Н}^{1/2} \cdot 1 \text{ Н}^{1/2} = 1 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм};$$

$$F_{\max} = \frac{2 \cdot 3,14}{2} \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН}.$$

Пример 16 – Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с частотой 2 Гц и амплитудой 1 см. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу 0,2. Будет ли груз скользить по платформе? Ответ обосновать.

Дано:

$$\nu = 2 \text{ Гц}$$

$$A = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\mu = 0,2$$

Будет ли груз скользить?

Решение

Для решения приведем рисунок 12.



Рисунок 12

Груз будет скользить в том случае, когда максимальная сила инерции $m \cdot a_{\max}$, действующая на груз будет равна или больше силы трения $F_{\text{тр}}$. В рассматриваемом случае сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot m \cdot g, \quad (34)$$

где m – масса груза;

g – ускорение свободного падения.

Максимальное ускорение силы инерции $a_{\max}$ равно максимальному ускорению колеблющейся платформы, которое определяется как

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A \text{ или } a_{\max} = 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A.$$

Произведение $a_{\max}$ и массы груза дает максимальную силу инерции:

$$F_{\text{ин}} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A. \quad (35)$$

Приравняв (34) и (35) и выразив ν , получим формулу для частоты, при которой груз будет скользить по платформе:

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{4\pi^2 \cdot A}}.$$

Произведем вычисления:

$$\nu = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 9,81}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{-2}}} = 2,24 \text{ Гц}.$$

Согласно условию, груз будет скользить при значении частоты, равном полученному значению или больше него. Так как заданное значение частоты меньше полученного, то груз не будет скользить по платформе.

Пример 17 – В колебательном контуре происходят свободные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора 10^{-6} Кл, а максимальная сила тока 10 А, найти частоту колебаний этого контура.

Дано:	Решение
$q_{\max} = 10^{-6} \text{ Кл}$ $I_{\max} = 10 \text{ А}$ $\nu = ?$	При электрических колебаниях кинематическое уравнение колебания заряда записывается в виде $q(t) = q_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$

где ω – циклическая частота колебания;

φ_0 – начальная фаза колебания.

Взяв производную по времени от заряда, получим уравнение колебания силы тока

$$q(t) = -q_{\max} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0). \quad (36)$$

В уравнении (36) произведение максимального заряда и циклической частоты определяет максимальное (амплитудное) значение силы тока:

$$I_{\max} = q_{\max} \cdot \omega. \quad (37)$$

При известных значениях $q_{\max}$ и $I_{\max}$ можно найти циклическую частоту. По условию задачи требуется найти ν . Поэтому используем формулу, которая связывает ω и ν :

$$\omega = 2\pi \cdot \nu. \quad (38)$$

Подставив (38) в (37) и выразив ν , получим расчетную формулу

$$\nu = \frac{I_{\max}}{2\pi \cdot q_{\max}}.$$

Произведем расчеты:

$$\nu = \frac{10}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 1,59 \text{ МГц}.$$

Пример 18 – Напряжение и сила тока в катушке изменяются по законам $U(t) = 60\sin(314t + 0,25\pi)$ и $i(t) = 15\sin(314t)$. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ между током и напряжением, а также полное Z , активное R и реактивное X_p сопротивления катушки.

Дано:	Решение
$U(t) = 60\sin(314t + 0,25\pi)$ $i(t) = 15\sin(314t)$ $\Delta\varphi, Z, R, X_p - ?$	Известно, что фазой колебания называется величина, стоящая под знаком $\sin$ или $\cos$. Поэтому искомая разность фаз $\Delta\varphi$ определяется как разность

$$\Delta\varphi = (314t + 0,25\pi) - 314t = 0,25\pi.$$

Полное сопротивление определим с помощью закона Ома для цепи переменного тока:

$$Z = \frac{U_a}{I_a},$$

где U_a , I_a – амплитудные значения напряжения и силы тока.

Из заданных уравнений следует, что $U_a = 60$ В и $I_a = 15$ А. Следовательно, полное сопротивление

$$Z = \frac{60}{15} = 4 \text{ Ом}.$$

Для определения активного R и реактивного $X_p = \omega \cdot L$ сопротивлений запишем формулы для полного сопротивления

$$Z^2 = R^2 + (\omega \cdot L)^2 \quad (39)$$

и для сдвига фаз

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\omega \cdot L}{R}, \quad (40)$$

где L – индуктивность катушки.

Выразив $\omega \cdot L$ из (40) и подставив в (39), получим формулу для активного сопротивления:

$$R = \frac{Z}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta\varphi}}.$$

Подставив в эту формулу найденные значения Z и $\Delta\varphi$, рассчитаем R :

$$R = \frac{4}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 0,25\pi}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2,83 \text{ Ом}.$$

Теперь по формуле (39) можно найти X_p :

$$X_p = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 2,83^2} \approx 2,83 \text{ Ом}.$$

Таким образом, получили, что при разности фаз $\Delta\varphi \cdot R = X_p$.

Пример 19 – Синусоидальная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебания точек шнура – 2,4 с, амплитуда колебания – 7 см. Определить длину волны, фазу и смещение точки, отстоящей на 45 м от источника колебаний, через 4 с.

Дано:	Решение
$v = 15 \text{ м/с}$ $T = 2,4 \text{ с}$ $A = 7 \text{ см} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ $x = 45 \text{ м}$ $t = 4 \text{ с}$	Уравнение синусоидальной волны имеет вид: $S(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x), \quad (41)$
$\lambda, \Phi, S(x, t) - ?$	где ω – циклическая частота; k – волновое число; $\omega \cdot t - k \cdot x$ – фаза колебаний, $\omega \cdot t - k \cdot x = \Phi$. Выразим ω и k через заданные величины: $\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ и } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$

Тогда формула фазы примет вид:

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \quad (42)$$

Определим длину волны

$$\lambda = v \cdot T = 15 \cdot 2,4 = 36 \text{ м}$$

и фазу волны

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{2,4} \cdot 4 - \frac{2\pi}{36} \cdot 45 = \frac{5\pi}{6}.$$

Теперь, подставив это значение фазы в формулу (41), определим искомое смещение:

$$S(x, t) = 7 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(5\pi / 6) = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 20 – Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой 300 Гц. Скорость распространения колебаний в среде равна 1,5 км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода волн будет наблюдаться максимальное ослабление колебаний. Каков результат интерференции в точке, расположенной на расстоянии 20 м от первого источника и 30 м от второго?

Дано:	Решение
$\nu = 300 \text{ Гц}$ $v = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ $x_1 = 20 \text{ м}$ $x_2 = 30 \text{ м}$	Для решения задачи используем условие усиления $\Delta x = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (43)$
$\Delta x_{\min} - ?$	и ослабления когерентных волн при их наложении $\Delta x = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (44)$

где $m = 0, 1, 2, \dots$;

λ – длина волны.

Найдем искомую разность хода.

Из (44) следует, что волны будут ослаблять друг друга, если в точку наложения они приходят с разностью хода Δx , равной *нечетному числу полуволн*. Минимальной разности хода соответствует $m = 0$.

Поэтому

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2}. \quad (45)$$

Определим длину волны

$$\lambda = v \cdot T = v / \nu = 1500 / 300 = 5 \text{ м.}$$

По формуле (45) получим

$$\Delta x_{\min} = 5 / 2 = 2,5 \text{ м.}$$

Найдем результат наложения волн в заданной точке, для которой разность хода

$$x_2 - x_1 = 30 - 20 = 10 \text{ м.}$$

Из формул (43) и (44) видно, что результат наложения волн зависит от того, четному или нечетному числу $\lambda / 2$ равна разность хода.

Поделив заданную разность хода на $\lambda / 2$, получим

$$\frac{\Delta x}{\lambda / 2} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

Число полуволн получилось четным. Это значит, что в заданной точке будет происходить усиление волн.

Список литературы

- 1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики: учебное пособие для втузов / Т. И. Трофимова. – Москва: Академия, 2007. – 560 с.
- 2 **Детлаф, А. А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва: Высшая школа, 2001. – 718 с.
- 3 **Трофимова, Т. И.** Курс физики. Задачи и решения: учебное пособие для втузов / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – Москва: Академия, 2004. – 592 с.
- 4 **Волькенштейн, В. С.** Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – Москва: Наука, 2003. – 328 с.
- 5 **Чертов, А. Г.** Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Москва: Высшая школа, 1981. – 430 с.
- 6 **Сена, Л. А.** Единицы физических величин и их размерность / Л. А. Сена. – Москва: Наука, 1988. – 432 с.

Приложение А (справочное)

Значения некоторых физических величин и постоянных

Таблица А.1 – Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	γ	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8$ м/с
Атомная единица массы	$a. e. m.$	$1,660 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Таблица А.2 – Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м ³	Твердое тело	Плотность, кг/м ³
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$	Медь	$8,93 \cdot 10^3$
Барий	$3,50 \cdot 10^3$	Никель	$8,90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6,02 \cdot 10^3$	Свинец	$11,3 \cdot 10^3$
Висмут	$9,80 \cdot 10^3$	Серебро	$10,5 \cdot 10^3$
Железо	$7,88 \cdot 10^3$	Цезий	$1,90 \cdot 10^3$
Литий	$0,53 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

Таблица А.3 – Диэлектрическая проницаемость

Диэлектрик	ϵ	Диэлектрик	ϵ
Вода	81	Слюда	7,5
Воздух	1,00058	Спирт	26
Воск	7,8	Стекло	6,0
Керосин	2,0	Фарфор	6,0
Парафин	2,0	Эбонит	2,7
Плексиглас	3,5	Масло трансформаторное	2,2
Полиэтилен	2,3		

Таблица А.4 – Удельные сопротивления проводников и изоляторов

Проводник	Удельное сопротивление (при 20 °С) ρ , 10^{-9} Ом·м	Температурный коэффициент α , К ⁻¹	Изолятор	Удельное сопротивление ρ , Ом·м
Алюминий	25	4,5	Бумага	10^{10}
Вольфрам	50	4,8	Парафин	10^{15}
Железо	98	6,5	Слюда	10^{13}
Золото	20	4,0	Фарфор	10^{13}
Медь	17	4,3	Шеллак	10^{14}
Свинец	190	4,2	Эбонит	10^{14}
Серебро	16	4,1	Янтарь	10^{17}

Таблица А.5 – Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1, 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	-0,063
Воздух	0,38	Бензол	-7,5
Кислород	1,9	Вода	-9,0
Эбонит	14	Медь	-10,3
Алюминий	23	Стекло	-12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	-12,6
Платина	360	Кварц	-15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	-176

Таблица А.6 – Энергия ионизации

Вещество	$E_i, \text{Дж}$	$E_i, \text{эВ}$
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

Таблица А.7 – Подвижность ионов в газах

Газ	Положительный ион	Отрицательный ион
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$