

DOI 10.24412/2077-8481-2024-4-39-47

УДК 621.7.08: 621

В. М. ПАШКЕВИЧ, *д-р техн. наук, проф.*

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИК ПРОСТРАНСТВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ОТКЛОНЕНИЙ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Аннотация

Представлены принципы численного моделирования прилегающих поверхностей для оценки отклонений профилей поверхностей машиностроительных объектов. Показаны результаты применения статистического метода моментов. Предложены методологические основы для моделирования номинальных поверхностей. Приведены результаты использования с этой целью различных метрик расстояний.

Ключевые слова:

профиль реальной поверхности, номинальные поверхности, статистическое моделирование, моменты распределения, метрики расстояний.

Для цитирования:

Пашкевич, В. М. Об использовании различных метрик пространств при исследованиях отклонений формы и расположения деталей машин / В. М. Пашкевич // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2024. – № 4 (85). – С. 39–47.

Введение

Основными показателями геометрической точности изделий в машиностроении являются отклонения формы и расположения их конструктивных элементов и поверхностей.

При этом в качестве отклонений формы действующие стандарты принимают соответствующие отклонения от номинальных поверхностей. Такие поверхности (математически идеальные) заданы обычно чертежом изделия или другой технической документацией [1].

Указанные отклонения формы могут иметь различную размерность.

Так, одномерным отклонением формы характеризуется отклонение линейного профиля, т. е. линии, образованной пересечением секущей плоскости и трехмерного объекта (например, отклонение от прямолинейности профиля продольного сечения вала).

Двухмерное отклонение формы характерно для профилей, описываемых двумя координатами (например, отклонение от круглости поперечного сечения

вала).

Трехмерным отклонением формы описываются геометрические погрешности тел (например, отклонение реальной поверхности вала от цилиндричности).

В зависимости от относительного расположения номинальных поверхностей внутри или вне материала изделия (на практике наиболее часто в этом качестве применяются прямые, окружности, плоскости и цилиндры) различают прилегающие описанные и вписанные поверхности.

Такие прилегающие поверхности расположены либо целиком в материале изделия (вписанные поверхности), либо целиком за его пределами (описанные поверхности), т. е. в зависимости от типа сопрягаемой поверхности являются охватывающими или охватываемыми.

Данное свойство позволяет также охарактеризовать прилегающие поверхности как поверхности, соответствующие сопряжению с реальным профилем с нулевым зазором (или натягом).

Прилегающие поверхности обла-

дают также тем определяющим свойством, что отклонение от них до наиболее удаленной точки реальной поверхности изделия имеет минимальное значение по сравнению со всеми другими аналогичными поверхностями. Данное обстоятельство позволяет сформулировать для прилегающих поверхностей следующий критерий оптимальности:

$$z = \max_i (|x_{ri} - x_{ni}|) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где x_{ri} – i -й отсчет из массива реального профиля; x_{ni} – i -й отсчет из массива номинального профиля.

Использование прилегающих поверхностей является способом оценки отклонений формы, наиболее удобным для практического применения. При этом определение положения прилегающих поверхностей в пространстве при измерениях ведется с использованием их физических эквивалентов (например, поверочных линеек – для линейных профилей; эталонных оправок и разрезных втулок – для отклонений от круглости; контрольных плит – для оценки отклонений от плоскостности; комбинированных эталонов – для отклонений от цилиндричности и фасонных поверхностей [1]).

При этом точность оценки отклонений формы во многом определяется погрешностью изготовления указанных эталонных поверхностей. Другим существенным недостатком этого способа часто является необходимость изготовления индивидуальных эталонных поверхностей для каждого номинала размеров, выполненных с точностью, как правило, на 2–3 квалитета выше, а потому сопряженной с достаточной трудоемкостью.

Наименее затратным способом в описанной ситуации обладал бы метод оценки отклонений формы, связанный с прямыми измерениями размеров изделия (его «оцифровкой»), а затем с аналитическим построением соответствующ-

щих номинальных поверхностей.

Однако точное решение в данном случае может быть получено только для наиболее простых случаев. Например, для оценки отклонений от прямолинейности может быть получено аналитическое решение такой задачи методом наименьших квадратов. Начиная уже с двухмерных объектов решения оказываются приближенными. Так, к примеру, оценка отклонений от круглости поперечного сечения валов ведется путем нахождения не прилегающей, а средней окружности с использованием с такой целью метода наименьших квадратов. Для трехмерных объектов аналитическое решение вовсе не существует (например, на сегодняшний день не существует строгого аналитического метода для нахождения прилегающего цилиндра).

Попытке решения таких задач численными методами посвящена данная работа.

Основная часть

При решении задач, связанных с отысканием прилегающих профилей, всегда в качестве критерия точности найденного решения приходится использовать меру расстояний между геометрическими объектами (метрику пространства). Несмотря на кажущуюся простоту использования метрик, выбор их типа может оказаться нетривиальной задачей.

Свойства метрик пространств

В качестве меры (функции) расстояний между двумя точками $(x_i; y_i; z_i)$ и $(x_j; y_j; z_j)$ в декартовой системе координат традиционно используется евклидова метрика

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (2)$$

Однако при решении многих задач прикладной геометрии, связанных с определением расстояний (например, задач метрического распознавания образов в факторном пространстве), может использоваться и ряд других метрик, удовлетворяющих аксиоме тождества и аксиоме треугольника.

Примером семейства таких метрик является обобщенное расстояние Минковского [2]:

$$d_{ij} = \sqrt[n]{|x_i - x_j|^n + |y_i - y_j|^n + |z_i - z_j|^n}, \quad (3)$$

где n, m – произвольные неотрицательные показатели метрики (за исключением случаев, когда $n = m < 1$, при которых нарушается неравенство треугольника и формула (3) не является метрикой).

Классическая метрика по Минковскому описывается сочетанием параметров $n = m$.

При $n = m = 1$ формула (3) соответствует метрике Хэмминга (расстоянию по Манхэттену). При $n = m = 2$ она описывает классическую метрику Евклида.

Особый интерес представляет собой случай $n = m = \infty$, соответствующий метрике Чебышёва. В этом случае формула (3) вырождается в метрику

$$d_{ij} = \max(|x_i - x_j|; |y_i - y_j|; |z_i - z_j|). \quad (4)$$

Как нетрудно убедиться, формула (4) изоморфна выражению для целевой функции (1), которая минимизируется при поиске прилегающих поверхностей.

Использование метрик обобщенных расстояний позволяет дифференцированно подходить к оценке меры близости профилей. Так, при минимальных значениях параметров n и m в оценку расстояния d_{ij} вносят относительно равный вклад координаты, имеющие даже небольшие разности. Наоборот, большие

значения параметров n и m приводят к тому, что величина d_{ij} определяется преимущественно большими разностями координат; предельным случаем этого является метрика (4).

Это обстоятельство позволяет сделать предположение о том, что выбор конкретного вида метрики для оценки расстояний, таким образом, может быть связан со спецификой решаемой задачи.

Оценка отклонений формы и расположения поверхностей как задача оценки обобщенных расстояний

Оценка отклонений формы по координатам точек, образующих контур изделий, связана с учетом как систематических погрешностей геометрических измерений (методических, инструментальных), так и случайных составляющих, определяемых состоянием поверхности, влиянием технологических факторов предшествующей механической обработки (технологической наследственностью).

Автоматизация процедуры поиска прилегающего (или вписанного) профиля численным методом, как правило, опирается на использование критерия наименьших квадратов

$$S_{ocm} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

где S_{ocm} – остаточная сумма или сумма невязок аппроксимирующего (номинального) $\hat{y}_i$ и аппроксимируемого (измеренного) y_i профилей; ε_i^2 – квадрат отклонения аппроксимирующего значения от аппроксимируемого.

Если принять гипотезу о том, что аппроксимирующий профиль совпадает или минимально отличается от математического ожидания аппроксимируемого профиля, т. е. $\hat{y}_i \approx \bar{y}_i$, то расчет остаточной суммы (5) в этом случае ана-

логичен процедуре вычисления центрального момента второго порядка μ_2 с точностью до множителя $1/n$ (без усреднения по числу измерений):

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|^2.$$

Применительно к решаемой задаче величины $\hat{y}_i$ и y_i могут быть интерпретированы как обобщенные декартовы координаты метрического пространства размерностью m , а вычисление остаточной суммы $S_{ост}$ в этой связи – как оценка обобщенного декартова расстояния между аппроксимируемым и аппроксимирующим профилями поверхностей. Очевидным образом, для сравнения значений $\hat{y}_i$ и y_i могут быть использованы вычисления моментов третьего и более высоких порядков μ_m , более чувствительных к локальным отклонениям профиля. Формулы центральных моментов [3] в этом случае оказываются аналогичными (с точностью до усреднения и возведения в степень $1/m$) метрикам обобщенных расстояний (3).

В качестве обобщенного критерия близости (остаточной суммы) в этом случае могут применяться суммы

$$S_{ост}^m = \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|^m = n\mu_m \rightarrow \min, \quad (6)$$

где n – число точек, описывающих профили измеренной и приближающей поверхностей.

Моделирование прилегающих профилей с использованием обобщенных расстояний

С целью оценки влияния метрик обобщенного расстояния на результаты построения номинальных контуров были проведены численные эксперименты по нахождению аппроксимирующих по-

верхностей.

В качестве параметров линии профиля вычислялись постоянный коэффициент (смещение) и угловой коэффициент (коэффициент наклона).

Для поверхностей в форме плоскости определялись четыре параметра: смещение и угловые коэффициенты по координатным осям x, y, z .

Для профиля окружности рассчитывались четыре параметра: координаты центра и радиус.

Для цилиндра определялись семь параметров: координаты центров базовых торцев и радиус (для уменьшения размерности задачи принималось допущение, что плоскости торцев перпендикулярны линии, соединяющей их центры).

Поиск указанных параметров велся на основе алгоритма случайного поиска с возвратом [4]. Использование такого алгоритма позволяет снизить риск «застреваний» вычислений в локальных экстремумах пространства поиска, однако может демонстрировать низкую скорость сходимости решения.

На начальном этапе параметры поиска Π инициализируются начальными значениями (в первом приближении, допустимо нулевыми):

$$\Pi = \{\pi^0_1; \pi^0_2; \dots; \pi^0_k\},$$

после чего по формуле (6) рассчитывается начальная остаточная сумма $S_{ост}^{m^0}$ с выбранным порядком метрики m .

Последовательно вносятся случайные изменения в текущие значения параметров π^0_k :

$$\pi^1_k = \pi^0_k + \varepsilon^1_k,$$

где ε^1_k – случайное число, абсолютная величина которого определяет точность найденной величины параметра (рекомендуется экспоненциально уменьшать ее в процессе поиска решения).

После каждого случайного изме-

нения параметра рассчитывается целевая функция (остаточная сумма (6))

$S^{m1}_{ост}$ и при выполнении условия

$$S^{m0}_{ост} > S^{m1}_{ост}$$

полученное изменение фиксируется (найден локальное улучшение решения). Далее описанные действия повторяются в цикле по всем остальным параметрам.

Решение будет найдено, когда будут выполнены условия останова алгоритма (сделано заранее заданное количество шагов; целевая функция на протяжении длительного числа циклов не изменяется и т. п.).

Далее представлены результаты численного моделирования контуров

прилегающих окружностей, найденные с использованием различных метрик расстояний. Для улучшения восприятия по координатным осям при этом отложены не действительные размеры измеренного профиля, а его отклонения от среднего размера в микрометрах.

На рис. 1 показан аппроксимирующий профиль, полученный с использованием метрики $m = 2$ (евклидова метрика, метод наименьших квадратов (МНК)). Такой профиль представляет собой окружность, локализованную посередине измеренных точек, равноудаленную от них в квадратическом смысле. Однако данный профиль не обладает свойствами прилегающей окружности (не расположен вне или внутри материала изделия).

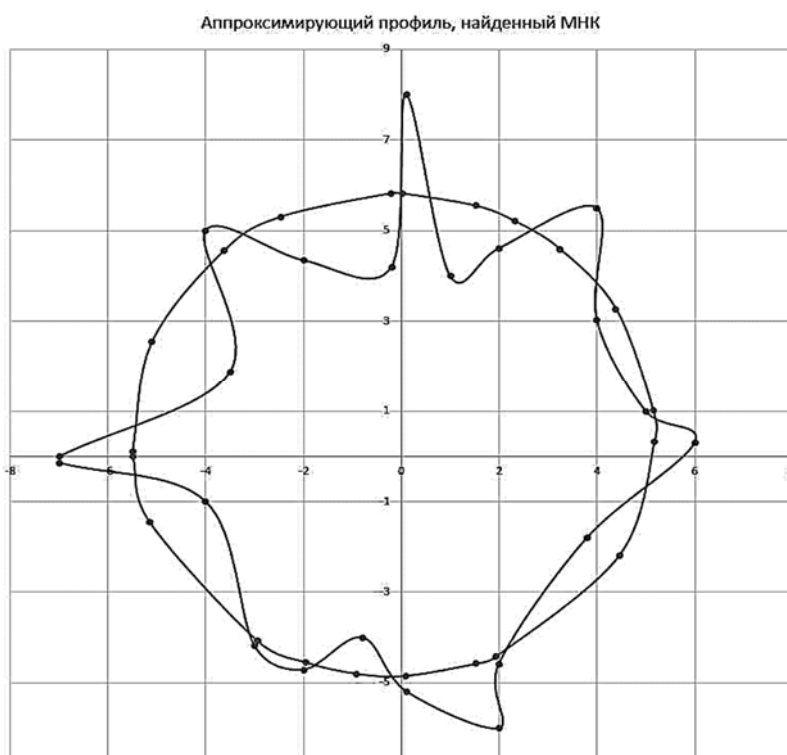


Рис. 1. Приближение к контуру прилегающей окружности с использованием метрики $m = 2$ (метод наименьших квадратов)

Исправить данное обстоятельство позволяет повышение порядка целевой

функции $S^m_{ост}$. На рис. 2 представлен аналогичный график для метрики $m = 10$.

Видно, что повышение ее порядка приводит к тому, что аппроксимирующий профиль начинает смещаться к наиболее удаленным точкам реального профиля. В еще большей мере этот эффект заметен для метрики порядка $m = 50$ (рис. 3), а для метрики $m = 500$ (рис. 4) получен

практически совпадающий с прилегающей окружностью профиль, положение которого определяется позицией наиболее удаленной от центра точки, обеспечивающей приближенное выполнение условия (4).

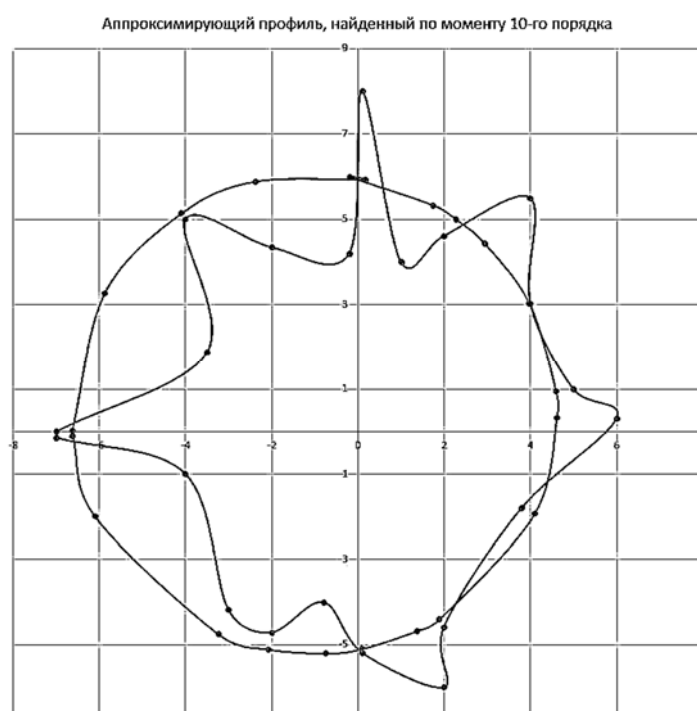


Рис. 2. Приближение к контуру прилегающей окружности с использованием метрики $m = 10$

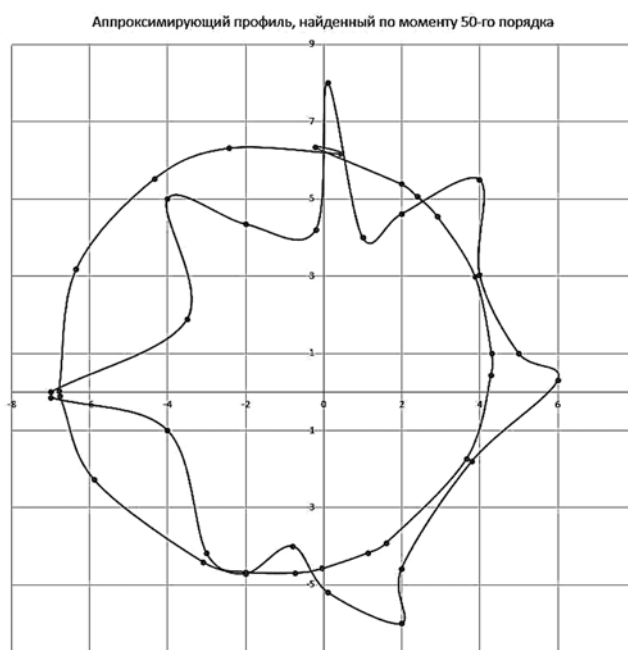


Рис. 3. Приближение к контуру прилегающей окружности с использованием метрики $m = 50$

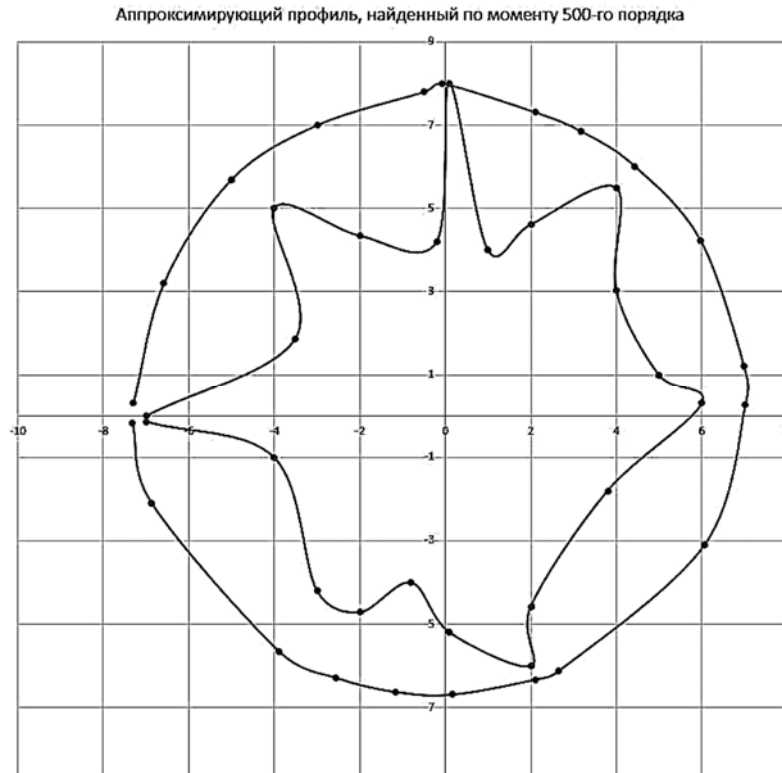


Рис. 4. Приближение к контуру прилегающей окружности с использованием метрики $m = 500$

Вышеописанный метод, по-видимому, может применяться и для приближенного нахождения вписанных профилей. При этом на меру расстояния должны влиять наиболее близкорасположенные точки профиля, что соответствует нахождению метрик размерностью $m < 1$. Так, пример использования для нахождения вписанной окружности с помощью метрики $m = 0,5$ приведен на рис. 5. Необходимо, однако, отметить, что алгоритмы, использующие метрики $m < 1$, демонстрировали неустойчивую работу.

Простота описанного подхода заметно нивелируется необходимостью операций с крайне большими числами, являющимися слагаемыми сумм $S^m_{ост}$. При значительных порядках метрик возможны ситуации с зависаниями программы из-за переполнения стека процессора. Также существует вероятность «застревания» алгоритма в локальных минимумах, в связи с чем рекомендуется

перезапуск алгоритма.

Одним из способов снижения размерности при применении описанных алгоритмов является использование процедуры логарифмирования метрик (3), при которой сохраняется общая тенденция изменения расстояния (увеличение при возрастании расстояния), но снижаются величины расстояний.

Другим, более радикальным, способом может быть использование сжимающих преобразований, с помощью которых бесконечные интервалы расстояний преобразовываются к конечным. С этой целью может использоваться, например, логистическая функция

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (7)$$

или обобщенная логистическая

$$y(x) = (1 + e^{-x})^m. \quad (8)$$

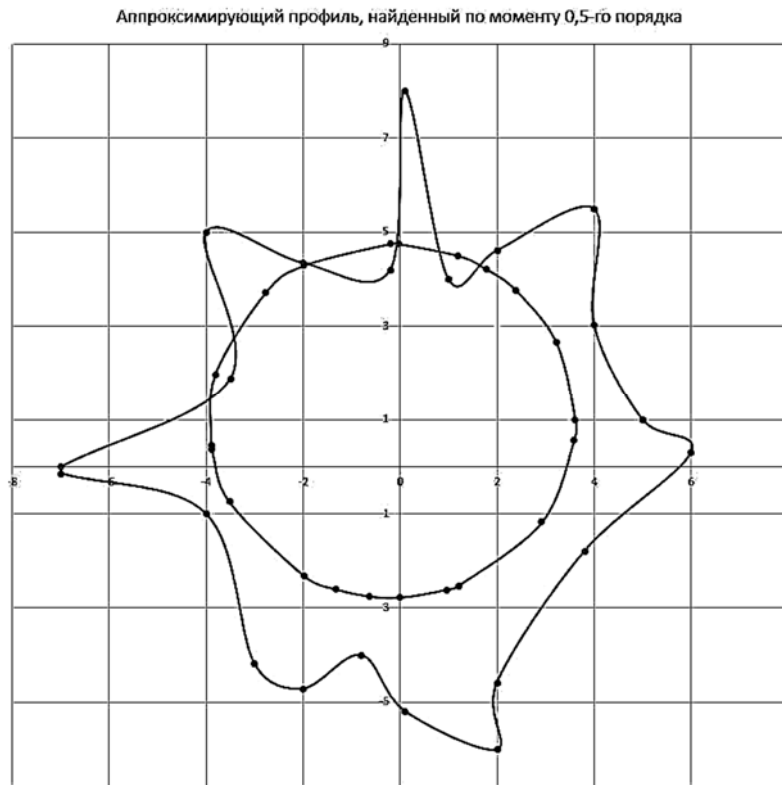


Рис. 5. Приближение к контуру вписанной окружности с использованием метрики $m = 0,5$

Выводы

1. Рассмотрен простой алгоритм построения прилегающих поверхностей, базирующийся на использовании обобщенных метрик Минковского.
2. Приведено описание результатов

численных экспериментов с различными метриками для нахождения описанных ($m > 1$) и вписанных ($m < 1$) поверхностей.

3. Предложена процедура применения сжимающих функций для снижения размерности задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Допуски и посадки: справочник: в 2 ч. / В. Д. Мягков, М. А. Палей, А. Б. Романов, В. А. Брагинский. – 6-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1982. – Ч. 1. – 543 с.
2. Биргер, И. А. Техническая диагностика / И. А. Биргер. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.
3. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 1983. – 279 с.
4. Пашкевич, В. М. Функциональные семантические сети для обеспечения точности механической обработки: монография / В. М. Пашкевич, М. Н. Миронова. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 210 с.

Статья сдана в редакцию 17 сентября 2024 года

Контакты:
 rvm@bk.ru (Пашкевич Виктор Михайлович).

V. M. PASHKEVICH

**ON THE USE OF VARIOUS SPACE METRICS IN RESEARCHING DEVIATIONS
IN THE FORM AND LOCATION OF MACHINE PARTS**

Abstract

The paper presents the results of modeling adjacent surfaces for assessing deviations in surface profiles of mechanical engineering objects. The results of applying the statistical method of moments are shown. Methodological foundations for modeling nominal surfaces are proposed. The results of using various distance metrics for this purpose are given.

Keywords:

real surface profile, nominal surfaces, statistical modeling, distance metrics, distribution moments.

For citation:

Pashkevich, V. M. On the use of various space metrics in researching deviations in the form and location of machine parts / V. M. Pashkevich // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2024. – № 4 (85). – P. 39–47.